வகைநுண் கணிதம்

(Differential Calculus)

கோ. சண்முகசுந்தரம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—479

வகைநுண் கணிதம்

(பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

(திருத்தப்பட்ட பாடத்திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகின்றது)

ஆசிரியர்

கோ. சண்முகசுந்தரம், எம்.ஏ., எம்.எஸ்ஸி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
ஜி. டி. என். கலைக்கல்லூரி,
திண்டுக்கல்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—July, 1973

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 479

© Tamil Nadu Text Book Society

DIFFERENTIAL CALCULUS

G. SHANMUGASUNDARAM

Price Rs. 13-65

'Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.'

Printed by
BHARANI PRESS,
11, Venkatadri Naicken Street,
Kuyappettai, Madras-12.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதின்மூன்றாண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப் படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மனநிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ் வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ் நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'வகைநுண் கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 479 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 514 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின், மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின்கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

			பக்கம்
1.	கணங்களும் சார்பலன்களும்	...	1
2.	தொடர்ச்சியும் எல்லையும்	...	26
3.	வகையிடல்	...	75
4.	வகைக்கெழுவின் பயன்கள்	...	143
5.	தொடர் வகைக்கெழு	...	168
6.	சார்புகளை விரித்தல்	...	195
7.	தேரப்பெருத அமைப்புகள்	...	239
8.	தொடுகோடும் வரைச்செங்கோடும்	...	272
9.	பகுதி வகைக்கெழு காணல்	...	338
10.	வளைவு	...	394
11.	சூழியும் வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியும்	...	446
12.	பெருமம், சிறுமம்	...	477
13.	அணுகுகோடுகள்	...	515
14.	சிறப்புப் புள்ளிகள்	...	562
15.	வளைகோடுகளின் சுவடுகளைக் காணுதல்	...	594
	மேற்கோள் நூல் பட்டியல்	...	655
	கலைச்சொற்கள்	...	656

1. கணங்களும் சார்பலன்களும்

§ 0-0. வகைநுண் கணித அறிமுகம்

சராசரி மாற்றங்களை அளவிடும் தேவை எழும்போதெல்லாம் அதற்கான முறைகள் நாம் அறிந்தனவே. ஆனால் கணத்துக்கு கணம் மாற்றங்கள் இடைவிடாது நடந்துகொண்டே இருந்தால், ஒரு கணத்தில் மாற்றம் பற்றி அளவிட சராசரி முறைகள் சிறந்த பலனைத் தரா. இத்தகைய சமயங்களில் எல்லை காணல் என்ற கொள்கையும், வகையிடல் என்ற செயல் முறையும் வகைநுண் கணித வாயிலாக அறிமுகப்படுத்தப்படுகின்றன.

இயல்பியலில் திசைவேகம், முடுக்கம் வெப்பநிலை மாற்றம், பொறியியலில் பொறி பணி செய்யும் திறன், வடிவ கணிதத்தில் வளைகோட்டின் வளைவு, வேதியியலில் ரேடியோ கதிர்கள் வெளியிடும் மூலகங்களின் சிதைவு வீதம், பொருளியலில் பண்டங்களின் உற்பத்தி மாற்றத்துக்கும் விலைமாற்றத்துக்கும் உள்ள தொடர்பு போன்ற பல ஆய்வுகளில் கணத்தில் மாற்ற வீதம் தேவைப் படும் போதெல்லாம் வகைநுண் கணித முறைகள் பயனாகும்.

குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டுகளைக் கருதாது பொதுவாகக் கூறுவதானால் வகைநுண் கணிதமானது மெய் எண்கள் பற்றிய ஒரு ஆய்வே. வழக்கமாக மெய் எண்களில் வழங்கும் செய்கைகளான கூட்டல், கழித்தல், பெருக்கல், வகுத்தல் போன்ற செய்கைகளோடு எல்லை காணல் என்ற புதிய செய்கையை வகைநுண் கணிதத்தில் அறிமுகம் செய்து அதன் பயனாக வகையிடல் என்ற மிகவும் பயனுள்ள ஒரு செயல் முறையைப் பெறுகிறோம்.

§ 1-1. கணங்கள் (Sets)

குறிப்பிட்ட பண்பு ஒன்றினைக் கொண்ட பொருள்களின் தொகுப்பு கணம் (set) எனப்படும் கணதத்தில் இடம் பெறும் பொருள்கள் அக் கணத்தின் மூலகங்கள் (elements) எனப்படும்.

a என்பது S-ன் மூலகமானல் (அதாவது S எனும் கணத்தில் இடம் பெறுவதற்கான பண்பை a எனும் மூலகம் பெற்றிருந்தால்) $a \in S$ எனக் குறியீட்டால் எழுதி 'a என்பது S-ன் மூலகம்' அல்லது 'a ஆனது S-ல் உள்ளது' எனப்படிப்போம். b என்ற மூலகம் S என்ற கணத்தில் இடம் பெறவில்லை என்பதை $b \notin S$ என எழுதுவோம்.

மூலகங்களை எழுதி அவற்றுக்கு அடைப்புக் குறியிட்டு கணத்தைக் குறிப்பது ஒரு முறை. எடுத்துக்காட்டாக ஆங்கில அரிச்சுவடியின் உயிர் எழுத்துக்களின் கணத்தை $\{a, e, i, o, u\}$ எனவும், ஒற்றைப்படை எண்கள் கணத்தை $\{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$ எனவும் எழுதலாம். இவ்வாறு அல்லாது தன்மையைக் கொண்டு விவரணம் செய்து கணத்தை எழுதும் முறையும் வழக்கத்தில் உண்டு. இம் முறையில் முன் எடுத்துக்காட்டாக கூறிய கணங்களை

$\{x : x$ என்பது ஆங்கில உயிர் எழுத்து$\}$

$\{x : x$ என்பது ஒற்றைப்படை எண்$\}$

எனப் பண்பு வழியாகவும் குறிப்பிடலாம். இவற்றை உயிர் எழுத்துக்களாக அமையும் x களின் தொகுப்பு, ஒற்றைப்படை எண்களாம் x தொகுப்பு எனப் படித்தல் வேண்டும்.

பொதுவாக வகைநுண் கணிதத்தில் நாம் கையாளப் போகும் கணங்கள் எண்களின் பலவகையின. அவற்றை பின் வரும் ஆங்கில எழுத்துக்களால் குறிப்போம்.

(i) $N = \{x : x$ இயற்கை எண்$\}$

$= \{1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\}$

(ii) $Z = \{x : x$ முழு எண்$\}$

$= \{\ldots\ldots -4, -3, -2, -1, -0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\}$

(iii) $Q = \{x : x$ விகிதமுறு எண்$\}$

[குறிப்பு: $2/3$, $-5/7$, $3/1$ என்பன போன்று இரு முழு எண்களின் விகிதமாக அமையக் கூடிய எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் (rational numbers) எனப்படும். $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{9}$ போன்ற எண்கள் விகிதமுறு எண்களாம்.]

(iv) $R = \{x : x$ மெய் (real) எண்$\}$

$= \{x : x$ விகிதமுறு எண் அல்லது விகிதமுரு எண்$\}$

(v) $C = \{ x : x$ சிக்கல் (complex) எண் $\}$

$= \{ x : x = a + ib;\ a, b \in R;\ i = \sqrt{-1} \}$

குறிப்புகள் : கணங்களை எழுதும்போது நினைவில் கொள்ள வேண்டியது :

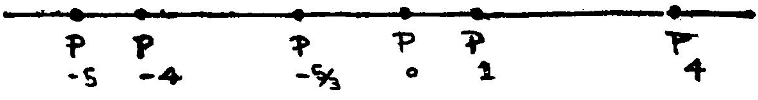
$\{ 3, 2, 1 \}$, $\{ 1, 2, 3 \}$ என வரிசையில் மாற்றங்கள் இருந்தாலும் அவை சமமானவையே ; ஒரே மூலகம் ஒன்றுக்கும் மேற்பட்ட தடவை வருவதனால் கணம் மாறாது ; அதாவது $\{ 1, 2, 3, 3, 2 \}$ என்ற கணம் $\{ 1, 2, 3 \}$ க்குச் சமமே.

§ 1-2. மெய் எண்கள்

R என்ற கணத்தில் உள்ள மெய் எண்களை பொதுவாக அளவைகளாகப் பயன்படுத்துகிறோம். இதனை வேறு விதமாகக் கூறலாம். கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டில் ஒவ்வொரு மெய் எண்ணுக்கும் (r), இயைய ஒரு புள்ளியினை (P_r) தொடர்பு படுத்தி ஆயத்தொலைகளாக அமைப்பதற்கு மெய் எண்கள் தொகுப்பை பயன்படுத்தலாம். இவ்வாறு மெய் எண்களை ஆயத் தொலைகளாக அமைத்துக்காட்டும் முறையினை இப்பகுதியில் படிப்படியாக விவரிப்போம்.

கொடுக்கப்பட்ட நேர்கோட்டில் P_0 என்பது எதேச்சையான ஒரு புள்ளி. இப்புள்ளி பூச்சியம் (0) எனும் எண்ணைக் குறிப்பதாகக் கொள்க. P_0 ஆனது நேர்கோட்டை இருபாகங்களாக அல்லது இரு புறங்களாக பிரிக்கிறது. P_0ன் வலப்புறத்தை மிகை (positive) ஆகவும், இடப்புறத்தை குறை (negative) ஆகவும் பாகுபாடு செய்து எண்களைக் குறிப்பது மரபு.

கோட்டின் மிகைப்பகுதியில் P_1 என்ற மற்றுமொரு எதேச்சையான புள்ளியை 1 எனும் எண்ணின் பிரதிநிதியாகக் கருதி குறிக்கவும். P_0P_1 என்ற தூரம் அலகு இடைவெளியின் நீளம் (length

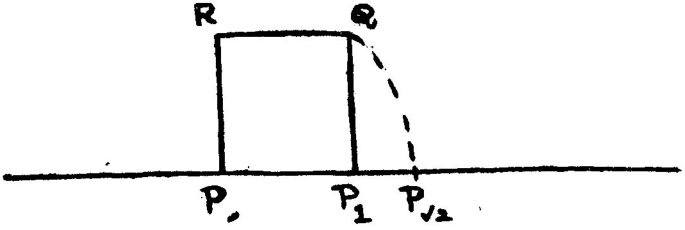


படம் 1·1

of unit interval) எனப்படும் ; இதனை அளவு கோலாகப் பயன்படுத்தி கோட்டில் பிற விகிதமுறு எண்களைக் குறித்துக் காட்ட முடியும். இவ்வாறாக 4 என்ற மெய் எண்ணைக் குறித்துக் காட்ட

நேர்கோட்டில் $P_0P_4 = 4$. $P_0 P_1$ என அமையுமாறு P_4 என்ற புள்ளியைத் தேர்க. இதற்கு பிரதிபலிப்பாக இடப்புறத்தில் P_{-4} என்ற புள்ளியை P_{-4} P_4க்குமையமாக P_0 அமையுமாறு குறித்தால் P_{-4} என்பது -4 என்ற எண்ணைக் குறிக்கும். இவ்வாறே Z என்ற கணத்தின் மூலகங்களையெல்லாம் அதாவது முழு எண்களையெல் லாம் நேர்கோட்டின் இருபுறமும் குறித்துக் கொண்டே போக லாம்.

இப்போது நேர்கோட்டில் விகிதமுறு பின்னங்களை சேர்ப் போம். $-5/3$ என்ற எண்ணைக் குறிக்க வேண்டுமானுல் முதலில் P_{-5} என்ற புள்ளியைக் குறித்து P_0-க்கும் P_{-5}-க்கும் இடையே மூன்றில் ஒரு தூரத்தில் $P_{(-5/3)}$ என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். இவ்வாறே p/q என்ற அமைப்பில் $(q \neq 0)$ உள்ள பிற எண் களையும் குறிக்கலாம். இவ்வாறு Q என்ற கணத்துப் புள்ளிகளை யெல்லாம் குறித்திட்ட பின்னரும் எண்களின் அச்சாக அமைந்த நேர்கோட்டில் எல்லாப்புள்ளிகளும் பயன்படுத்தப்பட்டு விட் டனவா ? இதே கேள்வியை வேறு விதமாகக் கேட்போம். நேர் கோட்டில் உள்ள புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் இயைந்த எண்கள் விகிதமுறு எண்கள் தானு ? இல்லை என்பதை பின்வருமாறு



படம் 1·2

காட்டுவோம். $P_0 P_1$ என்பதன்மீது P_0 P_1 பக்கமாக உடைய $P_0 P_1 Q R$ என்ற சதுரம் அமைக்கவும். இச் சதுரத்தில் $P_0 Q$ என்பது மூலை விட்டம். அதன் நீளம் $\sqrt{2}$. $P_0 Q$ என்ற அளவை நேர்கோட்டில் $P_0 P_{\sqrt{2}}$ என்ற நீளமாகக் குறிக்கவும். $P_{\sqrt{2}}$ என்ற புள்ளி குறிக்கும் எண்ணுன $\sqrt{2}$ என்பது விகிதமுரு எண். ஏனெ னில் a, b என்பன மெய் எண்ணுக $\sqrt{2}$ க்குச் சமமான a/b என்ற விகிதமுறு எண் இல்லை.

எனவே நேர்கோட்டில் ஆதியையும் (P_0), P_1 என்ற புள்ளியை யும் தேர்ந்தெடுத்துவிட்டு நேர்கோட்டில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் இயைந்து ஒரு எண் இருக்க வேண்டுமெனக் கோரினுல்

விகிதமுறு எண்களோடு விகிதமுரு எண்களையும் சேர்த்துக் கொள்ள வேண்டிய தேவை எழுகிறது. இவ்வாறு செய்து விட்டால் ஒவ்வொரு மெய்எண்ணுக்கும் இயைய ஒரே ஒரு புள்ளி நேர்கோட்டில் இருக்குமென்பதும், நேர்கோட்டுப் புள்ளி ஒவ்வொன்றுக்கும் இயைய ஒரே ஒரு மெய்எண் இருக்குமென்பதும், நிறுவப்பட்டுள்ளது. இந்தத் தொடர்புடன் $r < s$ எனில் P_r என்பது P_s-ன் இடப்புறம் அமையும் என்ற பரிமாண வரிசையும் கிடைக்கிறது.

இவ்வாறு நேர்கோட்டில் R என்ற மெய்எண் கணத்து எண்கள் தொடர்பு படுத்தப்பட்டால் நேர்கோட்டை மெய் எண் அச்சு அல்லது மெய் எண் கோடு (real axis or real line) என்போம். P_r என்ற புள்ளியையும், அதன் ஆயத்தொலை எண்ணான r எனும் எண்ணையும் வேறுபடுத்தாது Rன் மூலகங்களை எண் என்றும் புள்ளி என்றும் ஒரே பொருளில் வழங்கலாம்.

P_a, P_b ஆகிய புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள தூரம் $|b-a|$ எனக்குறிப்பிடப்படும். $|b-a| = |a-b|$ என்பதை அறிக. அத்தோடு $l \geq 0$ எனில் $|l| = l$

$l < 0$ எனில் $|l| = -l$

எடுத்துக்காட்டாக $|3| = 3$; $|-4| = 4$; $|0| = 0$; $|u|$ என்பது u-ன் தனிப்பெறுமானம் (absolute value) அல்லது மட்டு மதிப்பு எனப்படும். தனிப்பெறுமானத்தினைப் பயன்படுத்தும் போது

$$|u + v| \leq |u| + |v|$$

$$|uv| \leq |u| \cdot |v|$$

ஆகிய அடிப்படை விதிகள் உண்மையென நிறுவலாம்.

மெய் எண்களாலான பின்வரும் கணங்களை நாம் பயன்படுத்த வேண்டிய தேவை எழும்.

(i) a, b என்பன மெய் எண்கள் ; $a < b$;

$\{x \mid x \in R, a \leq x \leq b\}$

என்பது a, b ஐ முடிவுப் புள்ளிகளாக உடைய அடைத்த இடைவெளி (closed interval) எனப்படும்.

$\{x \mid x \in R, a < x < b\}$

என்பது a, b ஐ முடிவுப் புள்ளிகளாக உடைய திறந்த இடைவெளி (open interval) எனப்படும்.

இந்த இடைவெளிகள் முறையே $[a, b]$, $]a, b[$ எனச் சுருக்கமாகக் குறிக்கப்படும்.

(ii) $|x| \leq C$ என்பது உண்மையாக அமையும்.

x-ன் கணம் $[-C, C]$ எனும் இடைவெளியாகும்.

(iii) $|x-m| \leq C$ என்பது உண்மையாக அமையும்.

x-ன் கணம் $[m-C, m+C]$ எனும் இடைவெளியாகும்.

பயிற்சிகள் 1 (A)

1. N, Z, Q, R, C ஆகிய கணங்களில் எவ்வெவற்றில் பின்வரும் எண்கள் இடம் பெறும் ?

-3, π, $1+3i$, $\sqrt{-4}$, $4/1$, $\sqrt{2}$, -15, $\sin 30°$, $-95/3$ $0{\cdot}3333\ldots\ldots$

2. $2 \leq x \leq 9$; $x \geq 4$, $\sqrt{3} < x < \sqrt{5}$

$-3 \leq x \leq 2$; $0 < x < 2$ ஆகிய இடைவெளிகள்

எவ்வெவற்றில் பின்வரும் எண்கள் இடம் பெறுகின்றன ?

π, $\sqrt{5}$, $-1/4$, 100, $\sqrt{2}$, 4, i.

3. R-ல் x-ன் எம்மதிப்புகளுக்கு பின்வருவன உண்மையாகும் ?

(i) $|x| = 7$ (ii) $|x-2| = 7$

(iii) $|x+2| \leq 6$ (iv) $\leq |x-2| \leq 3$

விடைகள் 1 (A)

1. Z, Q, R, C ; R, C ; C ; C; N, Z, Q, R, C ; R, C ; Z, Q, R, C ; Q, R, C ; Q, R, C ; Q, R, C.

2. $\pi : 2 \leq x \leq 9$; $\sqrt{5} : 2 \leq x \leq 9$; $-\frac{1}{4} : -3 \leq x \leq 2$; $100 : x \geq 4$; $\sqrt{2} : -3 \leq x \leq 2$, $0 < x <$ $4 : 2 \leq x \leq 9$, $x \geq 4$; i : இல்லை.

3. (i) $-7, 7$ (ii) $-5, 9$ (iii) $[-8, 4]$ (iv) $[3, 5]$

§ 1-3. சார்புகள்

அறிவியல் ஆய்வுகளில் பயனுகும் மாறிகளுக்கிடையே (variables) ஒன்றின் மாற்றங்கள் மற்றதை பாதிக்குமாறு தொடர்புகள் நிலவுவதை நாம் அடிக்கடி காண்கிறேம். எடுத்துக்காட்டுகள் சில காண்போம்.

(i) மணிக்கு 4 மைல் வேகத்தில் ஓடும் மனிதன் t மணி நேரத்தில் s மைல்கள் ஓடினுல்

$$s = 4t$$

இங்கே s, t மாறிகள். t மாற s மாறும்; s மாற t மாறும்.

(ii) $A = \pi r^2$ எனும் வாய்ப்பாடு வட்டத்தின் பரப்பு Aஐ, r எனும் ஆரையின் வாயிலாகக் கணிக்கிறது. இங்கே r பல்வேறு எண் மதிப்புக்களை பெறுவதற்கேற்ப A பல்வேறு மதிப்புக்களை ஏற்கும்.

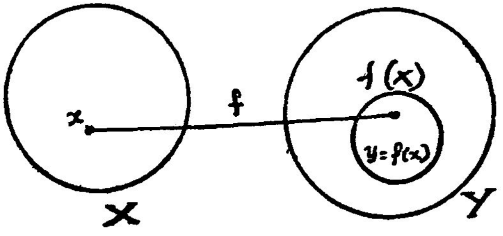
(iii) கல்கத்தாவின் மக்கட் கணிப்பு விவரம் பின் வருமாறு எண்க :

y ஆண்டு	P மக்கட்தொகை (மில்லியனில்)
1931	2
1941	2·5
1951	3·6

இங்கே yும் Pம் மாறிகள்.

மேற்கூறிய எடுத்துக்காட்டுகளில் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்புடைய இரு மாறிகள் சிலவற்றைக் கண்டோம். இவற்றில் காணும் மாறிகள் பெறக் கூடிய மதிப்புகளுக்கு சில கட்டுப்பாடுகள் இருப்பதைக் கவனிக்கவும். முதல் இரு எடுத்துக்காட்டுகளில் மிகை மதிப்புக்களை மட்டுமே மாறிகளுக்குத் தர முடியும். குறை மதிப்புகள் பொருந்தா. ஆனுல் எடுத்துக்காட்டு மூன்றில் y என்பது 1931, 1941, 1951 ஆகிய மதிப்புக்களை மட்டுமே பெற

முடியும்; அதற்கிணைந்து P ஆனது 2, 2·5, 3·6 ஆகிய மதிப்புகளை மட்டுமே பெறும். இவ்வகையாக தத்தமக்கு ஏற்புடைய மதிப்புகளில், மாறி ஒன்று ஒரு மதிப்பு பெற அதன் பயனாக மற்றொரு மாறி ஒரு தனித்த (unique) மதிப்பு ஒன்றைப் பெறுமாறு தொடர்பு கொண்டிருந்தால் அம்மாறிகளுக்கிடையே சார்புத் தொடர்பு (functional relation) இருப்பதாகக் கூறுவோம். சார்புக்கு இலக்கணம் கூறுவோம்.



படம் 1·3

X, Y என்பன இருகணங்கள். X-ன் மூலகமான x-ஐ, y-ன் மூலகமான y உடன் தொடர்பு படுத்தும் விதியான f பின்வருமாறு அமைந்துள்ளது; ஒவ்வொரு x-க்கும் இயைந்த y உண்டு; ஒரு x-க்கு இயைந்த y ஒன்று மட்டுமே இருக்கும். இத்தகைய விதி f ஆனது X எனும் கணத்திலிருந்து Y எனும் கணத்துக்கு சார்பலன் அல்லது சார்பு (function or mapping) எனப்படும். இதனை

$f : X \longrightarrow Y$ அல்லது $X \xrightarrow{f} Y$

என எழுதுவோம். f ஆனது X ஐ Y ல் சார்புபடுத்தும் எனப் படிப்போம்; அல்லது f என்பது X லிருந்து Y க்கு சார்பு (சார்பலன்) என்போம்.

இவ்வாறு X-ன் மூலகமான x உடன் தொடர்பு படும் Y-ன் (தனித்த) மூலகமான y ஐ, x ன் விம்பம் (image) எனக்கூறி $f(x)$ என எழுதுவோம்; இதனை x ல் f ன் மதிப்பு என்றும் கூறலாம்.

$f : X \longrightarrow Y$ என்ற சார்புக்கு X என்பது சார்பலன் வரையறை ஆகும் அரங்கம் (domain of definition for function) என்றும், சுருக்கமாக அரங்கம் (domain) என்றும், Y ஆனது இணை அரங்கம் (codomain) என்றும் கூறப்படும். அத்தோடு x ன் f விம்பங்களாலான கணத்தை சார்பின் வீச்சு (range) என்போம். வீச்சு இணை அரங்கத்தில் அடங்கும் என்பதைக் கவனிக்கவும். x என்பது சாராமாறி (independent variable) என்றும் y என்பது சார்ந்தமாறி (dependent variable) என்றும் அழைக்கப்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

(1) ஒவ்வொரு மெய் எண்ணையும் f ஆனது அதன் வர்க்கத் தோடு தொடர்புபடுத்துகிறது என்க. அதாவது ஒவ்வொரு

$$f(x) = z^2$$

மெய் எண் x-க்கும் $f : \mathrm{R} \longrightarrow \mathrm{R}$ ஆனது $x \longrightarrow x^2$ எனும் வண்ணம் அமைந்திருக்கிறது.

இங்கே அரங்கமும் இணை அரங்கமும் R f-ன் வீச்சு, அதாவது $f(\mathrm{X}) = \{ x : 0 \leq x < \propto \}$

(ii) $y = f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x \text{ விகிதமுறு எண் ஆனல்} \\ 0 & ; \quad x \text{ விகிதமுரு எண் ஆனல்} \end{cases}$

இங்கே f-ன் அரங்கம் R

வீச்சு $\{ 1, 0 \}$

(iii) $\mathrm{A} = \{ a, b, c, d \}$; $\mathrm{B} = \{ a, b, c, d \}$

$f : \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{B}$ எனும் சார்பு

$$f(a) = b$$
$$f(b) = b$$
$$f(c) = d$$
$$f(d) = a$$

என்பனவற்ருல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது எனக் கொள்க. இங்கே f-ன் அரங்கமும் இணை அரங்கமும் $\{ a, b, c, d \}$

வீச்சு $= \{ a, b, d \}$

(iv) $f(x) = \sin x$

f ன் அரங்கம் R.

வீச்சு $[-1, 1]$

(v) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

$x = 0$ எனில் $f(0) = \dfrac{0}{0}$; இது வரையறை செய்யப் படாதது. எனவே f-ன் அரங்கத்தை 0 நீங்கலாக R என்று கட்டுப்பாட்டுடன் எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும்.

சார்பினை வெளியிடுவதற்கு x-ஐயும் y-ஐயும் வாய்ப்பாடு ரீதியில் பிணைத்துதான் கூறவேண்டும் என்பதில்லை. x-க்கு இயைந்த y மதிப்பினைக் காண்பதற்கான வழிமுறையைத் தெளி

வாகக் கூறுவதே போதுமானது. சார்பை வெளியிட வாய்ப்பாடு அமைப்பேயன்றி, x-ஐயும் அதற்கியைந்த y-ஐயும் தொடர்பு படுத்திய பட்டியல், வரைபடம் முதலானவையும் பயன்படுத்தப் படுவதுண்டு.

பட்டியல் அமைப்பில் $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ என்ற மதிப்புகளுக் கேற்ற $y_1, y_2, \ldots\ y_n$ என்பன வரிசையாக எழுதப்படும். கோண கணிதப் பட்டியல்கள், லாகிருதப் பட்டியல்கள், இவ்வகையின. ஒரு வானிலை ஆராய்ச்சி நிலையத்தில் ஒரு நாளில் பல சமயங்களில் எடுக்கப்பட்ட காற்றின் வெப்பநிலையை பின்வருமாறு குறித்தால்

t (மணி)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
T (வெப்ப நிலை)	0	-1	-2	-2	0·6	1	3	3·4	4

இந்தப் பட்டியல் T-ஐ t-ன் சார்பாக வரையறை செய்கிறது.

§ 1-4. பல்மதிப்புச் சார்புகள் (Multivalued Functions)

அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்புக்கும் இயைந்த y ஒன்று மட்டுமே என $y = f(x)$ சார்பினை அறிமுகப்படுத்தினோம். எடுத்துக்காட்டாக $y = x^2$, $y = \sin x$ போன்ற சார்புகளில் x-க்கு ஒரு மதிப்பு தந்தால் y-க்கு ஒரு மதிப்பே கிடைக்கிறது. ஆனால் சில வளைகோடுகளை வடிவ கணித அமைப்பில் வெளியிடும் போது வளைகோடு முழுவதும் ஒரு (தனிமதிப்பு) சார்பால் வெளியிட முடியாமல் பல சார்புகளை உபயோகப்படுத்தக்கூடிய தேவை எழலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x^2 + y^2 = 1$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்ட வட்டத்தை வெளியிட $y = +\sqrt{1 - x^2}$ $y = -\sqrt{1 - x^2}$ என இரண்டு சார்புகளும், $y^2 - x^2 = 1$ என்ற அதிபர வளையத்தை வெளியிட $y = +\sqrt{1 + x^2}$, $y = -\sqrt{1 + x^2}$ என இரண்டு சார்புகளும் தேவைப்படுகிறது. எனவே இத்தகைய வளைகோட்டுக்கு இயைந்த சார்பலன்கள் சந்தேகத்துக்கு இடமின்றி தீர்மானம் ஆவதில்லை. சில சமயங்களில் இத்தகைய வளைகோடுகளுக்கு இயைந்த சார்பலன்களை பல்மதிப்பு சார்பலன் என்று குறிப்பிடுவதுண்டு. பல்மதிப்புச் சார்பலன் வெளியிடும் வளைகோட்டின் கிளைகளை (branches) தனியான சார் பலன்கள் சுட்டுவதாகக் கருதுகிறோம். அதாவது பல்மதிப்பு சார் பலனை தனிமதிப்பு சார்பலன்களின் தொகுப்பாகக் கருதுகிறோம்.

இந்நூலில் சார்பலன் என்று பேசும் போது தனி மதிப்பு சார்பலன் குறித்தே பேசுகிறோம் என்பதை கவனத்தில் கொள்க.

§ 1-5. சார்புகளின் வகைகளும் அவற்றின் வரைபடங்களும்

A, B என்பன மெய் எண் கணங்கள். f என்ற சார்புக்கு A அரங்கம்; B வீச்சு என்றால்

$$\{ x, f(x) \mid x \in A\}$$

என்ற புள்ளிகளின் தொகுப்பாலான கணத்தை சார்பலனின் வரைபடம் என்கிறோம்.

$y = f(x)$ என, (x, y) புள்ளிகளைக் குறித்து, சார்பலனின் வரைபடத்துக்கு வடிவம் கொடுக்கலாம்.

குறிப்பு 1 : $x \in A$ எனில் $y = f(x)$ என்ற சமன்பாட்டின் நியமப் பாதையே வரைபடம் என்பதைக் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு 2 : சார்பலனின் வரைபடத்துக்கு x அச்சில் வீச்சு கண்டால் அரங்கமும், y அச்சில் வீச்சு கண்டால் சார்பலனின் வீச்சும் கிடைக்கும்.

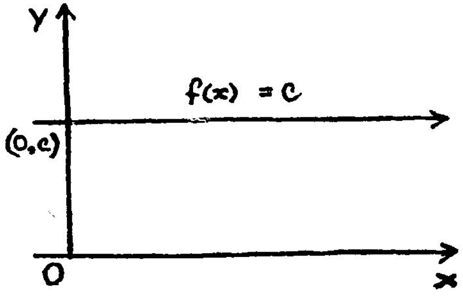
இனி சார்பலன் வகைகள் காண்போம்.

(i) மாறிலிச் சார்பலன் (Constant Function)

R-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும், C என்ற மாறிலி எண்

$$f(x) = C$$

என இருந்தால் f மாறிலிச் சார்பு எனப்படும்.



படம் 1·4

இதன் வரை படம், y அச்சை (0, C)-ல் வெட்டி, x அச்சுக்கு இணையாகச் செல்லும் கோடாகும்.

(ii) நேர்கோட்டுச் சார்பலன் (Linear Function)

x அச்சுக்கு செங்குத்தாக இல்லாத நேர்கோடு ஒவ்வொன்றும் நேர்கோட்டுச் சார்பின் வரைவடிவமாக அமைந்து விளங்குகிறது. R-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும் m, b என இரு எண்கள்

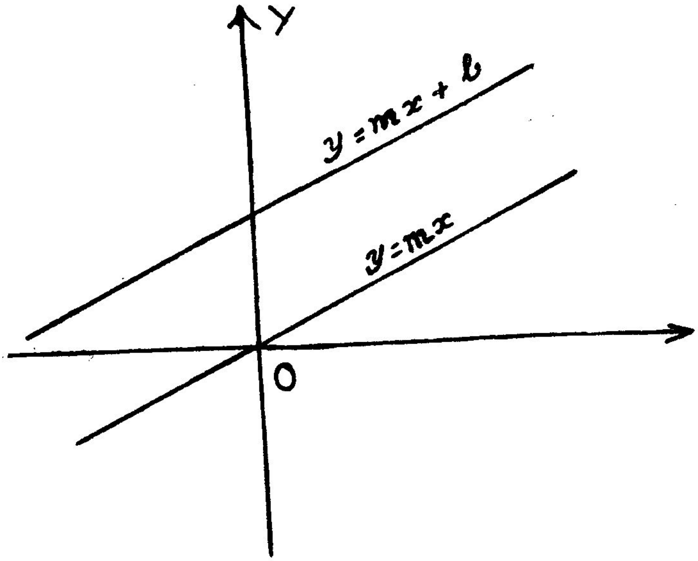
$$f(x) = mx + b$$

என இருந்தால் f என்பது நேர்கோட்டுச் சார்பு எனப்படும்.

$y = mx$ என்ற சார்பின் வரைபடம் ஆதிவழியே செல்கிறது.

$y = mx + b$ என்ற சார்பின் வரைபடம் y அச்சை $(0, b)$-ல் வெட்டுகிறது.

m என்பது கோட்டின் சாய்வு வீதம் (slope).



படம் 1·5

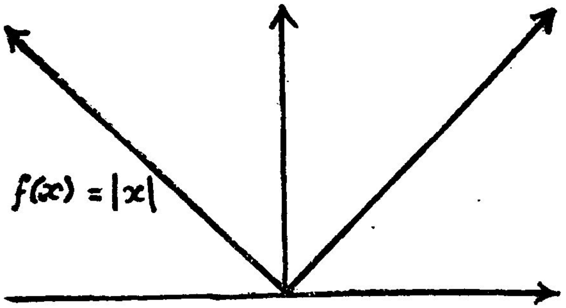
(iii) மட்டு மதிப்புச் சார்பலன் (Absolute Value Function)

R-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும்

$$f(x) = |x|$$

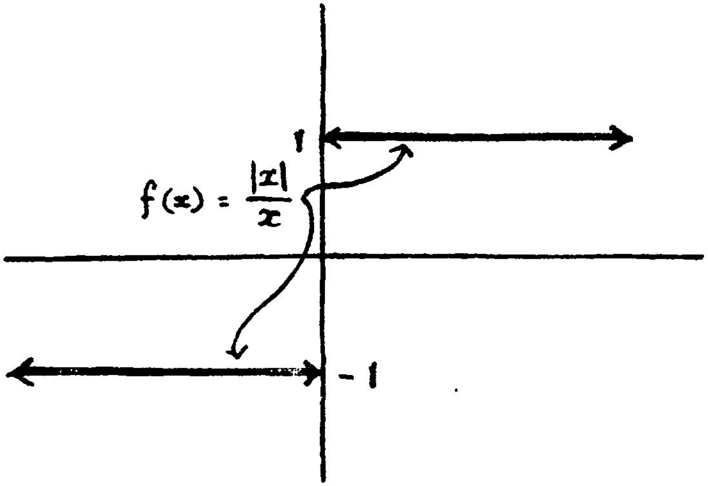
என்பதால் வரையறை செய்யப்படும் மட்டுமதிப்புச் சார்பலனின் வரைபடம் இங்கே தரப்பட்டுள்ளது. $x > 0$ எனில் $g(x) = x$

உடனும், $x < 0$ எனில் $h(x) = -x$ உடனும் இந்த வரைபடம் ஒத்து விளங்குவதைக் கவனிக்கவும்.



படம் 1·6

$f(x) = \frac{|x|}{x}, (x \neq 0)$ என்ற சார்பலனின் வரைபடம் அடுத்து வரையப்பட்டுள்ளது. இப்படத்தை வரையும்போது $x > 0$ எனில் $|x| = x$ என்பதையும், $x < 0$ எனில் $|x| = -x$



படம் 1·7

என்பதையும் நினைவில் கொள்க. $x = 0$-ல் படம் தொடர்ச்சியற்று இருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

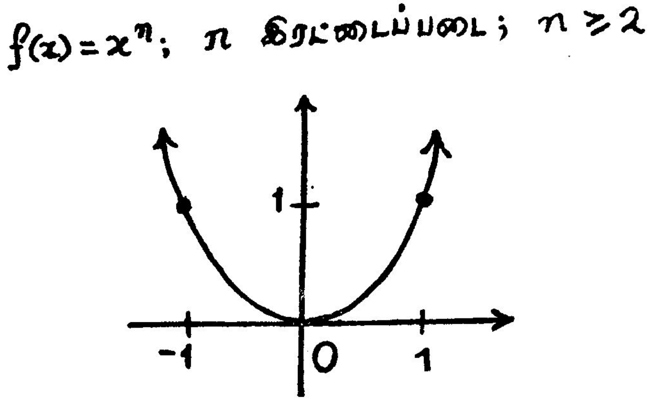
(iv) அடுக்குச் சார்பலன் (Power Functlon)

n என்பது மிகை முழு எண் ; R-ல் உள்ள எல்லா *x*-க்கும்

$$f(x) = x^n$$

என்பதால் வரையறை செய்யப்படும் சார்பலன் அடுக்குச் சார் பலன் எனப்படும். *n* ஒற்றைப்படை அல்லது இரட்டைப்படை யாக அமைவதைப் பொறுத்து வளைகோட்டின் அமைப்பு வெவ் வேறாக இருப்பதை விளக்க இரு வரைபடங்கள் வரையப் பட்டுள்ளன.

n இரட்டைப்படையாகவும், $n > 2$ ஆகவும் இருந்தால் வரை படம் $f(x) = x^2$-ன் வரைபடத்தை ஒத்ததே ; ஆனல் பூச்சியத் தின் அருகே தட்டையாகவும் $(-1, 1)$ வெளியே கூராகவும் படம் அமையும்



படம் 1·8

$y = x^2$ என்பதன் வரைபடம் பரவளையத்தின் வரைபடம் என்பதை அறிக.

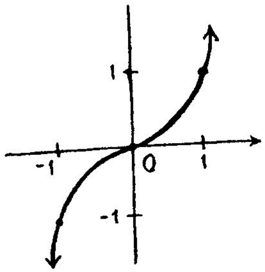
n ஒற்றைப் படையாகவும், $n > 3$ ஆகவும் இருந்தால் வரை படம் $f(x) = x^3$-ன் வரைபடத்தை ஒத்ததே. ஆனல், பூச்சி யத்திதின் அருகே தட்டையாகவும் $(-1, 1)$ வெளியே கூராகவும் படம் அமையும். *n* அதிகமாக அதிகமாக இத்தன்மையும் அதிகரிக்கும்.

$y = x^3$ என்பதன் வரைபடம் அரைமுப்படிப் பரவளை வுடைய (semi cubical parabola) வரைபடம் என்பதை அறிக.

குறிப்பு : ஒற்றை (odd) இரட்டைச் (even) சார்பலன்கள்

அடுக்குச் சார்பலன்களின் வரைபடத்தைக் கவனிக்கும்போது முதல் படம் y அச்சைப் பொறுத்தும் இரண்டாம் படம் ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் பெற்று விளங்கக் காண்கிறோம். இதற்குத் தனியாகப் பெயரிடுவோம்.

$f(x) = x^n$; n ஒற்றைப்படை ; $n \geq 3$



படம் 1·9

$y = f(x)$-ன் வரைபடம் y அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருந்தால் அதாவது

$$f(-x) = f(x)$$

என்றிருந்தால் இரட்டைச் சார்பலன் எனப்படுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக $y = x^2$ இரட்டைச் சார்பலன்.

$y = f(x)$-ன் வரைபடம் ஆதியைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருந்தால் அதாவது

$$f(-x) = -f(x)$$

என்றிருந்தால் ஒற்றைச் சார்பலன் எனப்படுகிறது. எடுத்துக் காட்டாக $y = x$, $y = x^3$ என்பன ஒற்றைச் சார்பலன்கள்.

(v) பல்லுறுப்புச் சார்பலன் (Polynomial Function)

மாறலிச் சார்பலன்கள், அடுக்குச் சார்பலன்கள் ஆகியவற்றைப் பெருக்கியும் கூட்டியும் அமைப்பது பல்லுறுப்புச் சார்பலன்கள். அதாவது $a_0, a_1, \ldots a_n$ என்பன கொடுக்கப்பட்ட எண்கள் ; R-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும்

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

என்ற அமைப்பை உடையன பல்லுறுப்புச் சார்பலன்கள். எடுத்துக் காட்டாக

$$g(x) = 3x^5 + 5x^4 - 2x^2 + 7, \quad h(x) = x^{19} - 7x$$

என்பன பல்லுறுப்புச் சார்பலன்கள்.

மாறிலிச் சார்பலன்கள், நேர்கோட்டுச் சார்பலன்கள், அடுக்குச் சார்பலன்கள் ஆகியன பல்லுறுப்புச் சார்பலன்களின் குறிப்பிட்ட வகைகளே.

(vi) விகிதமுறு சார்பலன்கள் (Rational Functions)

g, h என்பன கொடுக்கப்பட்ட பல்லுறுப்புச் சார்பலன்கள்; R-ல் உள்ள எல்லா x-க்கும்

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}, \quad h(x) \neq 0$$

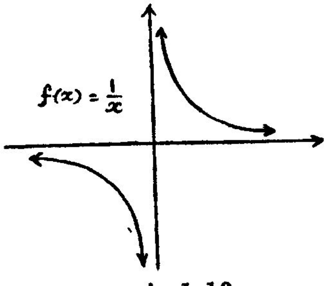
என வரையறை செய்யப்படுவது விகிதமுறு சார்பலன் ஆகும். எடுத்துக்காட்டாக

$$k(x) = \frac{3x^3 + 7}{x - 1}, \quad l(x) = \frac{x^{15} - 4x^3 + 7}{x^{16} + 5x^2 + 3x}$$

என்பன விகிதமுறு சார்பலன்கள்.

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

என R-ல் உள்ள பூச்சியமில்லா எல்லா x ஆலும் வரையறை செய்யப்படும் தலைகீழ் சார்பலன் (reciprocal function) முக்கியமானது. இதன் வரைபடம் தரப்பட்டுள்ளது (செவ்வக அதிபரவளைவு).



படம் 1·10

பூச்சியத்தால் வகுத்தல் பொருளற்றது. ஆகையால் $x = 0$-ல் சார்பலன் வரையறை செய்யப்படவில்லை என்பதையும், $x = 0$-க்கு அயலின் சார்பலன் மிகையாகவும் குறையாகவும் எதேச்சையான பெரு மதிப்புகளை அடைவதையும் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சியற்று விளங்குவதையும் கவனிக்கவும்.

குறிப்பு : ஓரியல்புச் சார்பலன்கள் (Monotonic Functions)

$f(x)$ வரையறை ஆகும். இடைவெளி (a, b) ல் $x_2 > x_1$ என்றமையும் எந்த x_1, x_2 என்ற எண்களுக்கும்.

(i) $f(x_2) \geq f(x_1)$ எனில் சார்பலன் ஒரே முறை ஏறும் சார்பலன் (monotonic increasing function).

(ii) $f(x_2) > f(x_1)$ எனில் திட்டமாய் ஒரே முறை ஏறும் சார்பலன் (strictly monotonic increasing function).

(iii) $f(x_2) \leq f(x_1)$ எனில் ஒரே முறை இறங்கும் சார்பலன்.

(iv) $f(x_2) < f(x_1)$ எனில் திட்டமாய் ஒரே முறை இறங்கும் சார்பலன்.

என வரையறை செய்யப்படுகிறது.

(vii) நேர்மாறு சார்பலன்கள் (Inverse Functions)

இரு மாறிகளுக்கு இடையே $y = f(x)$ என்பது போன்ற சார்பலன் தொடர்பு இருந்தால் அதனை இருவிதமாகக் கருத இடமிருக்கிறது; y-ஐ x-ன் சார்பாகவோ, x ஐ y-ன் சார்பாகவோ கருதலாம். பாயில்விதி (Boyle's Law) $p = \frac{c}{v}$ எனக் கூறினால் p, v ன் சார்பலன்; $v = \frac{c}{p}$ எனக் கூறினால் v ஆனது p ன் சார்பலன். $y = ax + b$ எனும் போது x-ன் சார்பலனாக y அமைந்துள்ளது; y ன் சார்பலனாக x ஐ அமைக்க வேண்டுமானால் $x = \frac{y-b}{a}$ என எழுதலாம். இவ்வாறு அமைந்த இரு சார்பலன்கள் ஒன்றுக்கொன்று நேர்மாறாக அமைந்தன என்போம். $y = x^2$ என்ற சார்பலன், $x = +\sqrt{y}$, $x = -\sqrt{y}$ எனும் இரு சார்பலன்களும் நேர்மாறு சார்பலன்கள் $y = f(x)$ எனும் சார்பலன் கொடுக்கப்பட்டால் y ன் அரங்கத்துள்ள ஒவ்வொரு y க்கும் இயைந்து திட்டமான x மதிப்பைத் தருமாறு அமைந்த $x = \phi(y)$ என்ற சார்பலன் உளதாயின் $\phi(y)$ ஆனது $f(x)$-ன் நேர்மாறு சார்பலன் எனப்படும்.

நேர்மாறு சார்பலன் ஒவ்வொரு சார்பலனுக்கும் இருந்தாக வேண்டியதில்லை. $a < x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் திட்டமாய் ஒரே முறை ஏறும் (அல்லது இறங்கும்) தன்மையை ஒரு தொடர்ச்சியான (continuous) சார்பலன் $f(x)$ பெற்றிருந்தால் தான், $y = f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = \phi(y)$ என்ற சார்பலனை நேர்மாறாக வரையறை செய்யும் என்பதையும், இவ்வாறு கிடைக்கும். நேர்மாறு சார்பலன் $f(a) \leq y \leq f(b)$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுடையது என்பதையும் திட்டமாய் ஒரே முறை ஏறும்

(அல்லது இறங்கும்) தன்மை உடையது என்பதையும் நிறுவல் இன்றிக் கூறுகிறோம்.

$y = f(x)$-ன் வரைபடம் இருப்பின் அப்படத்தை x, y அச்சுகள் உண்டாக்கும் கோணத்தின் சமவெட்டியான $x - y = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் பிரதிபலிப்பதன் மூலம் நேர்மாறு சார்பலன் $x = g(y)$-ன் வரைபடத்தைப் பெற முடியும் என்பதை அடுத்த பகுதியில் விளக்குவோம்.

(viii) படி மூலச் சார்பலன்கள் (Root Functions)

அடுக்குச் சார்பலன்களின் 'நேர்மாறு சார்பலன்களாக' அமைந்தன. படி மூலச் சார்பலன்கள்

n மிகை அல்லது குறை முழு எண்ணாக அமைய

$$y = x^{1/n}$$

என்ற சமன்பாட்டின் வரை வடிவம் காண்போம்.

$y = x^n$ வரை வடிவம் முன்பே வரைந்துள்ளோம். அது $[0, \infty[$ இடைவெளியில் (n எந்த முழு மதிப்பு பெற்றிருப்பினும்) ஒரே முறை வளர்வதாகவும், மிகையாகவும் அமைந்துள்ளது என்பதையும், ஒவ்வொரு மிகை மதிப்பையும் அது அடைய முடியும் என்பதையும் கவனிக்க. எனவே y ன் ஒவ்வொரு மிகை மதிப்புக்கு இயைந்த x மிகை மதிப்பு ஒன்றே ஒன்று தான். அது

$$y = x^n \text{ எனில் } x = y^{1/n}$$

என அமைந்துள்ளது.

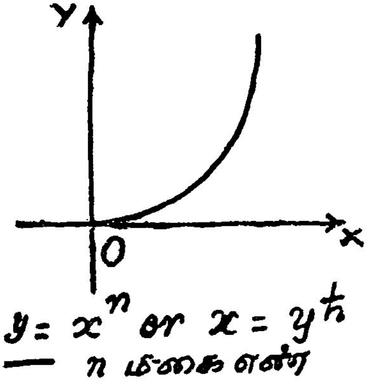
எனவே,

$$x = y^{1/n}$$

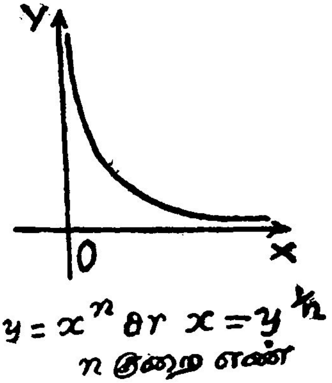
என்பது x எப்போதும் மிகையாக, $]0, \infty[$ இடைவெளியில் y-ன் சார்பலனாக x ஐ வரையறை செய்கிறது.

முதல் கால் வட்டப் பகுதியில் $y = x^n$ வரைபடப் பகுதியும், $x = y^{1/n}$ வரைபடப் பகுதியும் ஒன்றே

இப்போது $y = x^{1/n}$ வரைபடம் வேண்டுமாயின் x ஐ சாரா மாறியாகவும், y ஐ சார்ந்த மாறியாகவும் கருதவேண்டும். அதாவது $x = y^{1/n}$ மீதுள்ள (h, k) என்ற புள்ளியை (k, h) என்ற

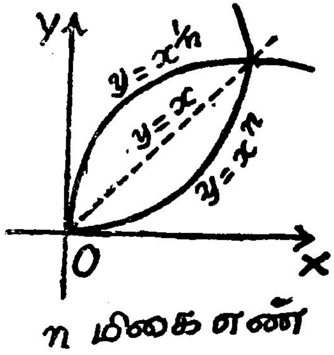


படம் 1·11



படம் 1·12

புள்ளிக்கு மாற்றவேண்டும். அதாவது $x = y^{1/n}$ என்ற வளை கோட்டை $y = x$ என்ற கோட்டின்மீது பிரதிபலிக்க $x = y^{1/n}$ என்ற சார்பலனின் வரைபடம் கிடைக்கும் என்பதை படத்தில் சுட்டிக்காட்டி யிருக்கிறோம்.



படம் 1·13

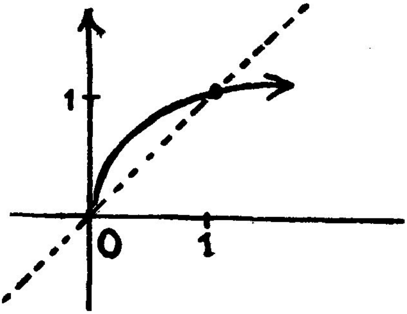
குறிப்பு : $x^{1/n}$ எனும் போது, $x > 0$ எனவும் $x^{1/n}$ என்பதில் x-ன் மிகை n படி மூலத்தையும் வரைபடத்துக்காக கருதவேண்டும்.

$y = x^{1/n}$ (n இரட்டைப்படை மிகை முழு எண் ≥ 2) என்ற சார்பலனின் வரைபடமும் $y = x^{1/n}$ (n ஒற்றைப் படை மிகை முழு எண் ≥ 3) வரைபடமும் பின்வருமாறு இருக்கும்.

(ix) **கோண கணிதச் சார்பலன்கள்** (Trigonometric Functions)

sin x, cos x, tan x, cot x, sec x, cosec x எனும் கோண கணிதச் சார்பலன்களின் தன்மைகள் மாணவர்க்கு அறிமுக

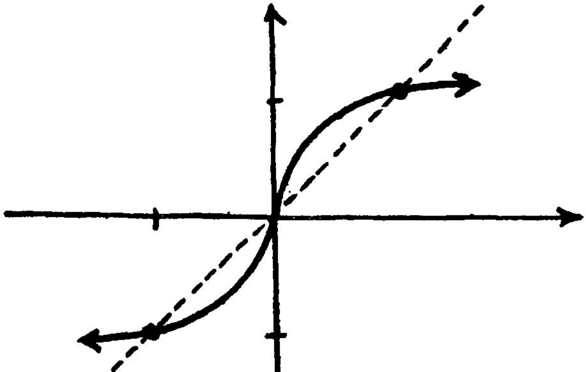
மானவை. எனவே இவற்றின் வரைபடம் வரையத் துணையாகும். செய்திகள் பற்றி சுருக்கமாகக் கூறுவோம்.



$f(x) = x^{1/n}$; n இரட்டைப்படை ; $n \geq 2$

படம் 1·14

(1) கோணங்கள் ஆரையன்களில் அளக்கப்பட்டு x அச்சிலும் கோணங்களுக்கு இயைந்த சார்பலன் மதிப்புகள் y அச்சிலும் அளக்கப்படுகின்றன,

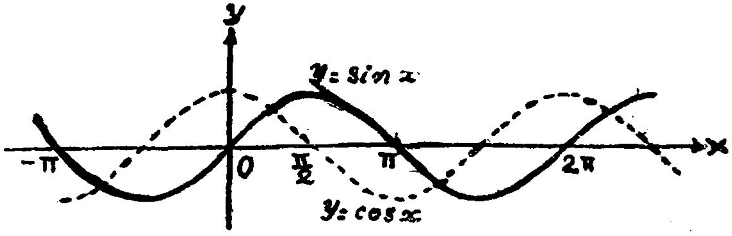


$f(x) = x^{1/n}$; n ஒற்றைப் படை ; $n \geq 3$

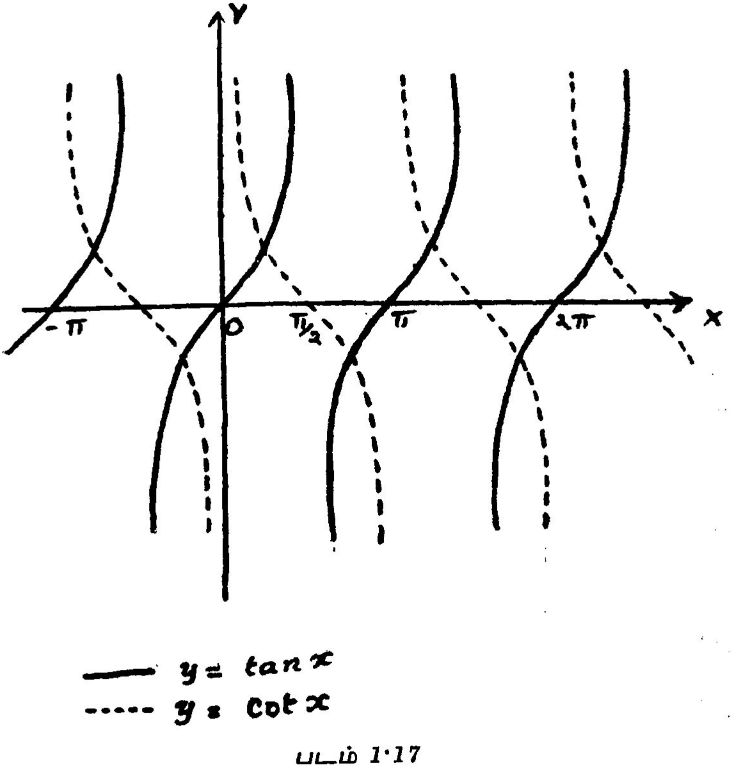
படம் 1·15

(2) tan x, cot x என்பன π அலைவுக் காலமும் (period) எஞ்சியன 2π அலைவுக் காலமும் கொண்டு திரும்பச் சார்புகளாக (periodic functions) விளங்குகின்றன.

(3) ஒவ்வொரு சார்புடைய மதிப்புகளுக்கு எல்லைகள், வரையறை ஆகாத புள்ளிகள் ஆகியனவற்றைத் தனித்தனியாக ஆய்ந்து ஒற்றைச் சார்பலன்கள் எவை, இரட்டைச் சார்பலன்கள் எவை எனப் பிரித்தறிந்து வரைப்படம் அமைக்கவும் வரைபடங்கள் பின்வருமாறு :



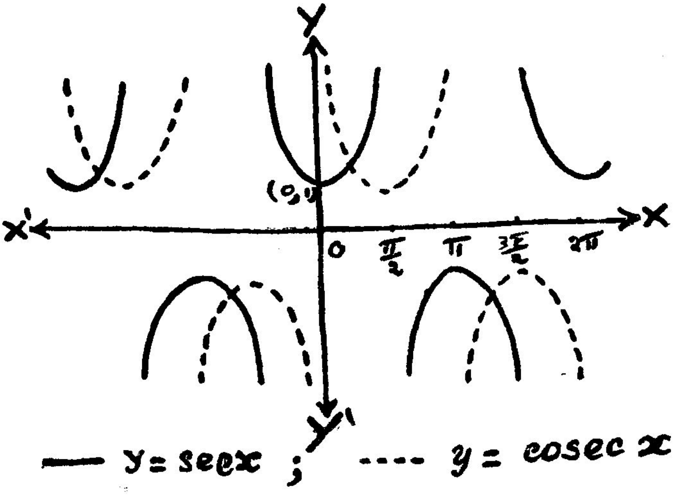
படம் 1·16



படம் 1·17

$y = \sin x$ என்ற சார்பலனை $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ என்ற அரங்கத்துக்கு வரையறுத்துக் கொண்டால் திட்டமாக வளரும் சார்பாக

இருக்கிறது ; மேலும் $y = \sin x$ தொடர்ச்சி உடையது ; எனவே $y = \sin^{-1} x$-ன் வரைபடம் தேவையெனில், $y = x$ என்ற கோட்டின் மீதில் $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ என அமைந்த $y = \sin x$ என்ற



படம் 1·18

வரைபடத்தை பிரதிபலிக்கவும். இவ்வாறு கிடைக்கும் $y = \sin^{-1} x$ ஆனது $-\frac{\pi}{2} \leq y < \frac{\pi}{2}$, $- \leq x \leq 1$ என அமைந்தது. இவ்வாறே ஏற்ற முறையில் வரையறைகள் செய்து எஞ்சிய நேர்மாறு கோண கணிதச் சார்பலன்களைக் காணுவது மாணவர்க்கு பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

(z) அடுக்குக் குறிச்சார்பும் மடக்கைச் சார்பும் (Exponential Functions and Logarithmic Functions)

a என்பது மிகை மாறிலி, $a \neq 1$ என்க x மெய் மாறி என்றால்

$$y = a^x$$

என்ற சமன்பாட்டால் வரையறை ஆகும் சார்பலன் அடுக்குக் குறிச் சார்பு எனப்படும். a என்பது அடி என்றும், x என்பது அடுக்குக்குறி என்றும் கூறப்படும். அதன் நேர்மாறு சார்பலன்

$$x = \log_a y$$

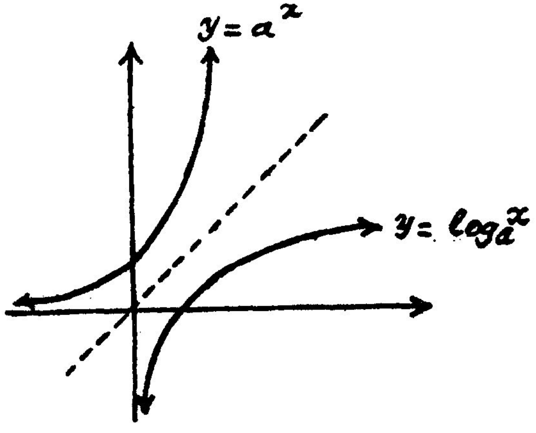
என்பது மடக்கைச்சார்பு எனப்படும்.

a^x என்பதில் x-க்கு விகிதமுறு எண்களுக்கு மட்டுமே வரையறையான பொருள் கூறியிருக்கிறோம். அதாவது $x = m/n$ எனில், m ஒரு முழு எண், n ஒரு மிகை முழு எண், $a^x = a^{m/n} = n\sqrt{a^n}$. இங்கே மரபுப்படி மிகைபடி மூலத்தையே எடுத்துக் கொள்கிறோம். x-க்கு விகிதமுறா மதிப்பு இருந்தால் என்ன பொருள் என்று இங்கே வரையறை செய்ய முற்படவில்லை. ஆனால் இதன் பொருள் என்ன என்பதை வரைபடம் மூலம் ஒருவாறு விளக்க முனைவோம்.

x-ன் விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கு இயைந்து $y = a^x$ ன் வரைபடப் புள்ளிகளைக் காண்க. இவற்றை தொடர்ச்சியான வளை கோட்டால் இணைக்க. x என்ற விகிதமுறா எண் தரப்பட்டால் x ஐ மட்டாயமாகக் கொண்ட வரைபடப் புள்ளியின் குத்தாயமே x க்கு இயைந்த a^x மதிப்பு ஆகும்.

$a > 1$ எனில் $y = a^x$ என்ற வளைகோடு பின்வரும் தன்மைகளைப் பெற்றிருப்பதைக் கவனிக்கவும்.

(i) x மிகையாக இருந்தாலும், குறையாக இருந்தாலும் a^x எப்போதும் மிகை.



படம் 1·19

(ii) x வரை a^x வளரும் ; a^x எத்தனை பெரிதாகவிருப்பினும் அதற்கேற்ற x உளதாகிறது.

(iii) $(0, 1)$ என்ற புள்ளி வளைகோட்டில் அமைகிறது.

(iv) $0 < x < \infty$-ல் திட்டமாக சார்பலன் வளர்கிறது; $-\infty$ முதல் ∞ வரை y எல்லா மதிப்பும் பெறுகிறது.

இக்குறிப்புகளைக் கொண்டு படம் வரைகிறோம். $y = x$-ல் பிரதிபலிக்கச் செய்தால் $y = \log_a x$-ன் வரைபடம் கிடைக்கிறது.

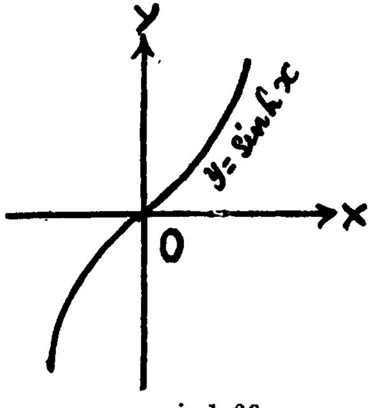
$0 < a < 1$ எனில் $y = a^x$, $y = \log_a x$ வரைபடம் வரைதல் மாணவர்க்கு பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

(xi) அதிபர வளைவுச் சார்பலன்கள் (Hyperbolic Functions)

$$\sinh x = \tfrac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

$$\cosh x = \tfrac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$$

என்ற வரையறை உடைய அதிபர வளைவுச் சார்பலன்களின் வரைபடம் வரைய முயல்வோம். இவற்றின் அரங்கம் $(-\infty, \infty)$; $\sinh x$-ன் வீச்சு $(-\infty, \infty)$. $\cosh x$-ன் வீச்சு $(0, \infty)$; $\sinh x$ ஒற்றைச் சார்பலன்; ஆனால் $\cosh x$ இரட்டைச் சார்பலன் இவற்றின் பிறதன்மைகள் கோண கணிதத்தில் அறிமுகப் படுத்தப்படும்.



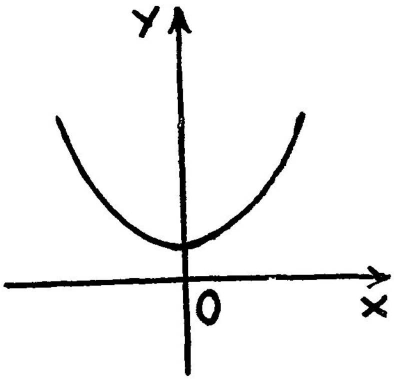
படம் 1·20

இவற்றின் வரைபடங்கள் பின்வருமாறு (படங்கள் 20,21) எஞ்சிய அதிபரவளைவுச் சார் பலன்கள் பின்வருமாறு.

$$\tan h\ x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}.$$

$\sin h\, x$, $\cos h\, x$, $\tan h\, x$ இவற்றின் தலைகீழ் பின்னங்கள் முறையே cosech x, sech x, cath x ஆகும். இவற்றை வரைதல் மாணவர்க்கு பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

அதிபர வளைவுச் சார்பலன்களின் நேர்மாறு சார்பலன்கள் பற்றிய விளக்கம் கோண கணித நூல்களில் கிடைக்கும்.



$y = \cosh x$

படம் 1·21

பயிற்சிகள் 1 (B)

பின்வருமாறு ஒரு சார்பலன் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது :

$-1 \leq x < 0$ எனில் $f(x) = 1 + x$

$0 \leq x < 1$ எனில் $f(x) = 1 - x$

$1 < x \leq 2$ எனில் $f(x) = x - 1$

$f(-2/5), f(3/4), f(8/7)$ காண்க. $f(-2), f(3)$ காண முடியுமா முடியாவிட்டால் விளக்கம் கூறுக. சார்பலனுக்கு வரைபடம் வரைக.

2. பின்வரும் சார்பலன்களின் வரைபடங்கள் வரைக :

(i) $f(x) = 1$

(ii) $f(x) = x - |x|$

(iii) $f(x) = 3x^5$

(iv) $f(x) = x^{10}$

(v) $f(x) = \sin x + \cos x$

(vi) $f(x) = \log_{10} x$

(vii) $f(x) = \tan^2 x$

(viii) $f(x) = x + \frac{1}{x}$

விடைகள் 1 (B)

1. $3/5$, $1/4$, $1/7$, b-ன் அரங்கில் $-2, 3$ இல்லை. எனவே: சார்பலன் மதிப்பு இப்புள்ளிகளில் இல்லை.

2. தொடர்ச்சியும் எல்லையும்

§ 2-0. அறிமுகம்

ஒரு இடைவெளியில் x-ன் சார்பலன் ஒன்று வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது எனக் கூறினல் அந்த இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்புக்கும் இயைந்து சார்பலனுக்கு மதிப்பு ஒன்று இருக்கிறது என்று பொருள். இவ்வாறு நாம் கூறும்போது x-ன் மதிப்புகளுக்கு இயைந்த சார்பலன் மதிப்புகள் ஒன்றுக்கொன்று தனித்து அமைந்தன என்பதும் அவற்றுக்கிடையே எவ்வித உறவும் இல்லை என்பதும் நினைவிலிருக்க வேண்டும். சார்பலனுக்கு நாம் கூறிய வரையறை அத்தகைய உறவு ஏதும் இருக்க வேண்டிய தேவையைச் சுட்ட வில்லை. எனவே தனித்த மாறிக்கு x_1, x_2 என்ற இரு மதிப்புகள் தரும்போது கிடைக்கும் சார்பலன் மதிப்புகள் $f(x_1)$, $f(x_2)$ என்ருல் $|x_1 - x_2|$ சிறிதாக இருக்கும் போது கூட $|f(x_1) - f(x_2)|$ மதிப்பு பெரிதாக அமைந்து இருக்கத் தடையில்லை, ஏனெனில் $f(x_1)$ என்ற மதிப்பும் $f(x_2)$ என்ற மதிப்பும் ஒன்றுக்கொன்று x_1, x_2 ஐப் பொறுத்து எத்தகைய தொடர்பும் பெற்றன அல்ல.

இந்த அத்தியாயத்தில் $|x_1 - x_2|$ ஐப் பொறுத்து $|f(x_1)- f(x_2)|$ மாற்றங்களை ஆராய்ந்து அதன் வாயிலாக சார்பலனின் தொடர்ச்சி, தொடர்ச்சியின்மை எல்லை ஆகியவற்றை அறிமுகப் படுத்துவோம்,

§ 2-1·0. ஒரு புள்ளியில் சார்பலனின் தொடர்ச்சி (Continnity)

மாறி ஒன்று தொடர்ச்சியான மாற்றம் உடையது என நாம் கூறும்போது, மாற்றம் ஒரு சீராக நடைபெறுகிறது என்ற பொருளும் திடீர் மாற்றங்கள் இல்லை என்ற பொருளும் தொனிக்கிறது. இந்தப் பொருளுக்கு நுண்மையாக விளக்கம் கொடுப்பதன் மூலமே தொடர்ச்சிக்கு வரையறை கூற முடியும்.

$[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் வரையறை செய்யப்பட்ட $f(x)$ என்ற சார்பலனை எடுத்துக் கொள்க. இந்த இடைவெளியில் c என்பது ஏதேனும் புள்ளி என்க. $x = c$ ல் சார்பலன் $f(x)$ தொடர்ச்சியுடன் மாற்றம் பெறுகிறது என்றால், c ன் இருபுறமும் c லிருந்து x மாற்றம் பெற சார்பலன் மதிப்பில் ஏற்படும் மாற்றம் திடீரென்று ஏற்படுவதாக இருக்கக்கூடாது; அதாவது x-ன் மாற்றம் சிறிதளவேயென்றால் சார்பலன் மதிப்பு மாற்றமும் சிறிதளவேயாக அமைய வேண்டும்.

சாரா மாறியான xன் மாற்றத்தை h எனக் குறிப்பிடுக; இது மிகையாகவோ குறையாகவோ அமையலாம். $[a,b]$ இடைவெளியில் $c + h$ என்ற x மதிப்பைக் கருதுக. சார்ந்த மாறியான $f(x)$ ல் மாற்றமான $f(c + h) - f(c)$ம் மிகையாகவோ குறையாகவோ இருக்கலாம். h எண் மதிப்பில் சிறிதாக இருக்கும் பொழுது $f(c+h) - f(c)$ன் எண் மதிப்பும் சிறிதாக இருக்க வேண்டும் என்பது தொடர்ச்சி பற்றிய வரையறையின் அடிப்படை. அதாவது $|h|$ன் மதிப்பை போதிய அளவு சிறிதாக எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $|f(c + h) - f(c)|$ மதிப்பை எத்துணை சிறிதாக வேண்டுமானாலும் ஆக்க முடியும் வரையறை கூறும்போது 'சிறிது' என்ற திட்ட வட்டமான பொருள் இல்லாத ஒரு சொல்லை வழங்குவது விரும்பத்தக்கது அல்ல. எனவே இச்சொல்லைத் தவிர்த்து தொடர்ச்சியின் வரையறையை பின் வருமாறு நுணுக்கமாகக் கூறுகிறோம்.

ϵ என்பது எதேச்சையாகத் தரப்பட்ட ஒரு மிகை எண்: $|h| < \delta$ என அமைந்த எல்லா h மதிப்புகளுக்கும் $|f(c + h) - f(c)| < \epsilon$ ஆக இருக்குமாறு ϵ-க்கு இயைந்த δ என்ற மதிப்பு உளதாயின் $f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = c$ல் தொடர்ச்சி உடையது எனக் கூறுகிறோம்.

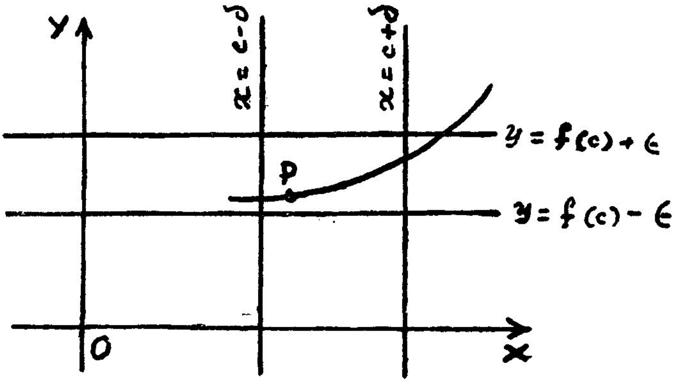
அதாவது $-\delta, \delta$ இடையே அமைந்த எல்லா h மதிப்புகளுக்கும் $f(c + h)$ ஆனது, $f(c) - \epsilon, f(c) + \epsilon$ இடையும் அமையும் எனப் பொருள்.

$c + h$ என்பதை x எனக் கொண்டு இதே கருத்தை வேறு விதமாகவும், வரையறை கூறலாம்.

ϵ என்பது ஏதேச்சையாக முன் கூட்டியே தரப்பட்ட எண் எனில், $f(c) - \epsilon < b(x) < f(c) + \epsilon$ என அமையுமாறு x மதிப்புகளைக் கொண்ட $]c-\delta, c+\delta[$ என்ற இடைவெளி ஒன்று c ஐ ஒட்டி உளதாயின் $f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = c$ ல் தொடர்ச்சி உள்ளது.

§ 2-1·1. தொடர்ச்சிக்கு வரைபட விளக்கம்

$y = b(x)$ என்ற சார்பலனுக்கு வரைபடம் வரைந்து அதில் $P(c, f(c))$ என்ற புள்ளியைக் கருதுக. P க்கு இருபுறமும் x அச்சுக்கு இணையாக $y = f(c) - \epsilon$; $y = f(c) + \epsilon$ ... (1)



படம் 2.1

எனும் இருகோடுகள் வரைக. இங்கே ϵ என்பது முன்கூட்டியே தரப்பட்ட எதேச்சையான மெய் எண்; இதன் மூலம் (1) மூலம் தரப்பட்ட கோடுகளின் நெருக்கத்தை அளவிடலாம்.

$f(x)$ என்பதற்கு $x = c$ ல் தொடர்ச்சி இருப்பின், $x = c$ என்ற கோட்டுக்கு இருபுறமும் y அச்சுக்கு இணையாக உள்ள

$$x = c - \delta, \quad x = c + \delta \qquad \dots (2)$$

எனும் இருகோடுகளுக்கு இடையிலுள்ள வரைபடப் பகுதியின் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றும் (1) ஆல் கூறப்பட்ட இருகோடுகளுக்கு உள்ளே அமையும் வண்ணம் $x = c - \delta$, $x = c + \delta$ என்ற கோடுகளை வரைதல் சாத்தியமாக வேண்டும்.

பொதுமையாகக் கூறவேண்டுமென்றால் இடையில் வெட்டு (breaks) இல்லாத வளைகோடாக வரைபடம் உள்ள சார்பலன்களே தொடர்ச்சி உடையன.

§ 2-1.2. ஓர் இடைவெளியில் சார்பலனின் தொடர்ச்சி

சார்பலனின் அரங்கத்தின் ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சி என்றால் என்ன எனக் கூறினோம். (a, b) என்ற இடைவெளியில் ஒரு சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது என்று கூறினால், அச்சார்பலன் குறியிடப்பட்ட இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சி

உடையது என்பது பொருளாகும். மற்றும் அரங்கத்தில் உள்ளன ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது என்றால் சார்பலன் தொடர்ச்சியானது எனப் பொதுவாகக் கூறுகிறோம்.

§ 2-2·0. தொடர்ச்சியின்மை

$f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = C$ல் தொடர்ச்சி யில்லாமல் இருந்தால் சார்பலன் $x = C$ல் தொடர்ச்சியின்மை கொண்டுள்ளதாக வரையறை கூறுவோம்.

தொடர்ச்சிக்கும், தொடர்ச்சியின்மைக்கும் சில எடுத்துக் காட்டுகள் தந்து விளக்கம் கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 1 : $f(x) = 4x - 3$ என்ற சார்பலன் $x = 1$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

நிறுவல் : $x = 1$ எனில்

$$f(1) = 4 - 3 = 1$$

$$\therefore f(x) - f(1) = 4x - 3 - 1 = 4(x - 1)$$

வேறுபாட்டு மதிப்பை (எண் மதிப்பு) முன் கூட்டியே தரப் பட்ட மிகைமதிப்பினை (·001 என்க) விடக் குறைந்ததாக ஆக்க முடியும் என நிறுவுவோம்.

வகை 1: $x > 1$ எனில் $4(x - 1)$ மிகை. $f(x) - f(1)$ ன் எண் மதிப்பு $4(x - 1)$.

எனவே $|f(x) - f(1)| = 4(x - 1) < \cdot 001$

ஆக $$x - 1 < \frac{\cdot 001}{4}$$

அல்லது $x < 1 + \cdot 00025$

அல்லது $x < 1\cdot 00025$ ...... (1)

ஆக வேண்டும்.

வகை 2 : $x < 1$ எனில் $4(x - 1)$ குறை.

$\therefore$ $f(x) - f(1)$ ன் எண் மதிப்பு $4(1 - x)$.

$$\therefore \quad |f(x) - f(1)| = 4(1 - x) < \cdot 001$$

ஆக $\quad 1 - x < \frac{\cdot 001}{4}$

(அது) $\quad 1 - x < \cdot 00025$

(அது) $1 - \cdot 00025 < x \qquad \ldots \quad (2)$

(i), (ii) மூலம் $| f(x) - f(x) | < \cdot 001$

ஆக x ன் மதிப்புகள்யாவும்

$$1 - \cdot 00025 < x < 1 + 1.00025$$

என அமைய வேண்டும்.

$\therefore \; \epsilon = \cdot 001$ என்ற குறிப்பிட்ட மதிப்பை பயன்படுத்தி தொடர்ச்சியை சோதிக்க, $x = 1$ ல் சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது என்ற முடிவுக்கு வந்தோம். வேறு எந்த ϵ மதிப்புக்கும் தொடர்ச்சி உடையது என்று நிறுவமுடியும். பொதுவாக பின் வருமாறு சோதனை செய்யலாம்.

ϵ என்பது ஏதோ ஒரு மிகை எண் என்க.

$$|f(x) - f(1)| = 4 |x - 1|$$

$4 |x - 1| < \epsilon$ ஆக வேண்டுமானால்

$$|x - 1| < \frac{\epsilon}{4}$$

(அது) $\quad 1 - \frac{\epsilon}{4} < x < 1 + \frac{\epsilon}{4}$

அதாவது $]\, 1 - \frac{\epsilon}{4},\; 1 + \frac{\epsilon}{4}\, [$ என்ற இடைவெளி, அந்த இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x க்கும் $f(x)$ க்கும் $f(1)$ க்கு உள்ள வேறுபாட்டின் எண் மதிப்பு முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மெய் எண்ணுன ϵ ஐ விடக் குறைவாக இருக்குமாறு உளதாகிறது.

$\therefore \quad x = 1$ ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

(இவ்வாறே ஒவ்வொரு x க்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவலாம்.)

எ. கா. 2: $\quad x \neq 0$ எனில் $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$\qquad\qquad x = 0$ எனில் $f(x) = 0$

எனுமாறு வரையறை செய்யப்பட்ட சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

நிறுவல் : $|f(x)| - f(0) = |x \sin \frac{1}{x} - 0|$

$$= |x \sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

(ஏனெனில் $|\sin \frac{1}{x}| \leq 1$)

$\therefore$ "$|f(x) - f(0)| < \epsilon$ $|x - 0| < \delta$ ஆக இருந்தால்" என்ற நிபந்தனை $\delta = \epsilon$ எனத்தேர்வதால் நிறைவு செய்யப்படுகிறது. $x = 0$ ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

எ. கா. 3: $f(x) = x^2$ என்ற சார்பலன் $-a \leq x < a$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

நிறுவல் :

வகை 1 : $c\ (> 0)$ என்ற புள்ளியை $-a \leq x < a$ என்ற இடைவெளியில் தேர்க. $|x - c| < \delta$ ஆக இருக்கையில் $|f(x) - f(c)| < \epsilon$ ஆக இருக்குமாறு கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon > 0$க்கு இயைந்து மெய் எண் δ உளதாக வேண்டும்.

(அது) $|x - c| < \delta$ எனில் $|x^2 - c^2| < \epsilon$ ஆக இருக்க வேண்டும்.
(அது) $|x - c| < \delta$ எனில் $c^2 - \epsilon < x^2 < c^2 + \epsilon$ ஆக வேண்டும்;
(அது) $c - \delta < x < c + \delta$ எனில்

$$\sqrt{c^2 - \epsilon} < x < \sqrt{c^2 + \epsilon} \text{ ஆக வேண்டும் ;}$$

எனவே $c - \delta = \sqrt{c^2 - \epsilon}$; $c + \delta = \sqrt{c^2 + \epsilon}$

அது $\delta = c - \sqrt{c^2 - \epsilon}$; $\delta = \sqrt{c^2 + \epsilon} - c$

என்ற சமன்பாடுகளில் இருந்து குறைந்த மதிப்பாக எந்த δ கிடைக்கிறதோ அதுவே கொடுக்கப்பட்ட $\epsilon\ (< c^2)$ க்கு இயைந்த δ ஆகும்.

வகை 2 : $c \leq 0$ என்றாலும் முன்பு போலவே ஆராய வேண்டும்.

எனவே $-a \leq x \leq a$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = x^2$ தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவலாம்.

எ. கா. 4 : $\sin^2 x$ எல்லா x க்கும் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

நிறுவல் : $\in$ முன்கூட்டியே தரப்பட்ட மெய் எண் என்க. எனவே $|x(x) - f(c)| = |\sin^2 x - \sin^2 c|$

$$= |\sin(x + c)\sin(x - c)|$$

$$\leq |\sin(x - c)|$$

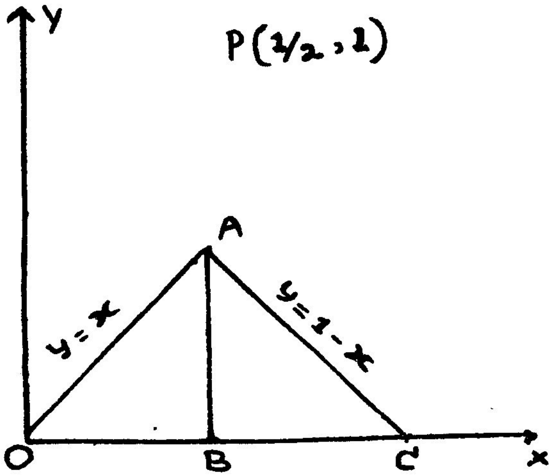
$$\leq |x - c|$$

$\therefore$ $|x - c| < \in$ எனில் $|f(x) - f(c)| < \in$ ஆகும்.

$\therefore$ $\sin^2 x$ ஆனது $x = c$ ல் தொடர்ச்சி உடையது. c என்பது எந்த எண்ணுக இருப்பினும் மேற்கூறிய முடிவு உண்மையே

$\therefore$ $\sin^2 x$ ஆனது எல்லா x க்கும் தொடர்ச்சி உடையது.

எ. கா. 5 : $f(x)$ என்ற பின்வரும் சார்பலன் $x = \frac{1}{2}$ ல் தொடர்ச்சி உடையது அல்ல என நிறுவுக.



படம் 2·2

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ 1 & x = \frac{1}{2} \text{ எனில்} \\ 1 - x & \frac{1}{2} < x < 1 \text{ எனில்} \end{cases}$$

நிறுவல் : வரை படத்தை துணை கொண்டு தொடர்ச்சியை ஆராய்வோம்.

சார்பலனின் வரைபடத்தில் P $(\frac{1}{2}, 1)$ என்ற புள்ளியும் OA, AC என்ற A தவிர்ந்த இரு கோடுகளும் உள்ளன. A-ல்வரை படத்தில் பிளவு (gap) காணப்படுவதால் A-ல் தொடர்ச்சி யின்மை இருக்கிறது என ஊகிக்கிறோம்.

மேலும் $x = \frac{1}{2}$ ஐ ஒட்டிய ஒவ்வொரு x மதிப்புக்கும் $f(x)$ ஆனது $f(\frac{1}{2})$ லிருந்து வேறுபாடு $\frac{1}{2}$ ஐ விட அதிகமாகவே இருப் பதால் $\epsilon = \frac{1}{2}$ எனக் கொடுத்தால் இதனை விடக் குறைந்த வேறு பாடு இருக்குமாறு δ தேர்ந்தெடுக்க வழியில்லை.

எனவே $x = \frac{1}{2}$ ல் சார்பலன் தொடர்ச்சியின்மை கொண் டுள்ளது.

§ 2-3·0. எல்லை (Limit)

$x = c$ ல் $f(x)$-ன் தொடர்ச்சியை ஆராய c க்கு அண்மை யான x மதிப்புகளுக்கு, $f(x)$-ன் மதிப்பு $f(c)$-க்கு நெருக்க மானது எனக் கூறினேம். இந்த விவாதத்தில் $x = c$ ல் சார் பலன் மதிப்பான $f(c)$ ம், $x = c$ அண்மையில் $f(x)$ மதிப்பும் பொதுவாக வெவ்வேருனவை எனப் புலனுகியது. சில சமயங் களில் $f(c)$-க்கு சமமில்லாத k என்ற எண்ணுக்கு நெருக்கமாக c க்கு அணுக்கமான x மதிப்புகளுக்கு $f(x)$-ன் மதிப்புகள் அமைய லாம்; இவ்வாறு குறிப்பிட்ட எந்த எண்ணுக்கும் நெருக்கமாக $f(x)$ மதிப்புகள் அமையாமலே போய்விடவும் கூடும். எடுத்துக் காட்டு 5-ல் $f(\frac{1}{2}) = 1$ ஆக இருந்தபோதும் $\frac{1}{2}$-க்கு அணுக்கமான x மதிப்புகளைப் பிரதியிட்ட $f(x)$ மதிப்புகள் 1-க்கு நெருக்கமாக அமையவில்லை. எனவே x க்கு ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு நெருக்கமாக மதிப்புகள் தர $f(x)$ எந்தக் குறிப்பிட்ட மதிப்பை ஆவது நெருங்குகிறது என்ற கருத்தை ஆராய வேண்டிய தேவை எழுகிறது. இதன் வாயிலாகத் தோன்றியதே எல்லை பற்றிய வரையறை.

வரையறை

ϵ எத்தனை சிறிய முன்கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை எண்ணுக இருந் தாலும் $0 < |x - a| < \epsilon$ என மாறி x-ன் மதிப்புகள் மாறிலி a க்கு நெருக்கமாக அமையக் கூடுமாயின் மாறி x மாறிலி a ஐ அணுகுகிறது (approaches, tends) எனக்கூறி $x \longrightarrow a$ என எழுது கிரோம்.

அதாவது ϵ எதேச்சையான முன்கூட்டியே தரப்பட்ட சிறு

மிகை எண் எனில் $x = a$ தவிர்த்த $]\, a - \epsilon,\ a + \epsilon\, [$ இடைவெளியில் x அமையும் என்பது பொருள். இதனை மேலும் விவரித்துக் கூறலாம்.

(i) x ஆனது $]\, a, a + \epsilon\, [$ இடைவெளியில் இருந்தால் x, a ஐ வலப்புறமிருந்து அணுகுகிறது எனக்கூறி $x \longrightarrow a + 0$ அல்லது $x \longrightarrow a^{+}$ என எழுதுகிறோம்.

(ii) x ஆனது $]\, a - \epsilon, a\, [$ இடைவெளியில் இருந்தால் x, aஐ இடப்புறமிருந்து அணுகுகிறது எனக்கூறி $x \longrightarrow a - 0$ அல்லது $x \longrightarrow a^{-}$ என எழுதுகிறோம்.

இனி x ம் y ம் $y = f(x)$ என்ற சார்பலன் உறவால் தொடர்பு பட்டுள்ளபோது, $x \longrightarrow a$ எனில் y என்ன ஆகும் என்பது அடுத்த கேள்வி.

வரையறை

ϵ என்பது முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை எண். ϵ எத்துணை சிறிதாக இருந்தாலும், $0 < |x - a| < \delta$ ஆக இருக்கும்போது $|f(x) - l| < \epsilon$ ஆக அமையுமாறு δ என்றமிகை எண்ணைக் காண முடியுமானால் $x \longrightarrow a$ ஆகும்போது $f(x)$க்கு l என்ற எல்லை இருக்கிறது எனக் கூறுகிறோம்.

இதனை

$$\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{L}t}\, f(x) = l$$

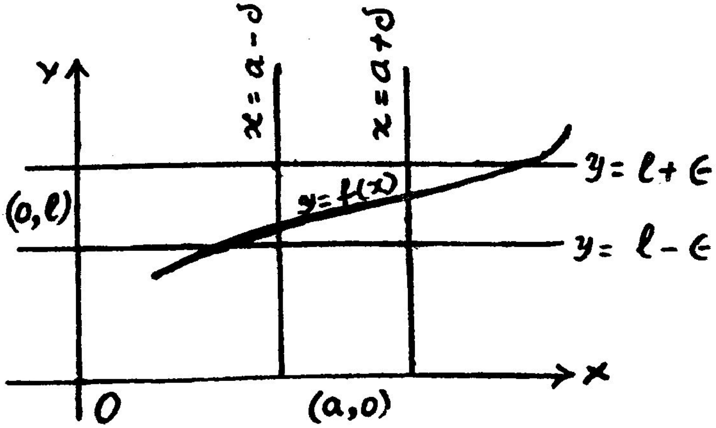
எனக் குறியீடாக வெளியிடுகிறோம்.

இதன் பொருளாவது, ϵ ஏதேச்சையான சிறு எண்ணாக இருக்க, x-ன் மதிப்புகள் $(a - \delta, a)$, $(a, a + \delta)$ என்ற திறந்த இடைவெளிகளில் இருக்கும்போது $f(x)$ ஆனது $(l - \epsilon, l + \epsilon)$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் அமையும் என்பதாகும். $x = a$ எனில் $f(x)$ என்ன என்பதை இங்கேயும் கவனிக்கவில்லை.

இக்கருத்தை வரைபடமாக வெளியிடுவதானால் $a - \delta < x < a$ $a < x < a + \delta$ என்ற இரு திறந்த இடைவெளிகளில் அமையும் என்றால் $f(x)$-ன் வரை படம் $y = l - \epsilon$, $y = l + \epsilon$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே அமைகிறது எனக்கூறலாம்.

குறிப்புகள் :

1. $y = f(x)$-ன் வரை படத்தில் கருதப்படும் இடைவெளியில் வெட்டு ஏதும் இல்லை.



படம் 2·3

$x = a$ க் கியைந்த புள்ளி கருதப்படவில்லை. $f(x)$-ன் எல்லைக்கும், $f(x)$ க்கு $x = a$ ன் மதிப்புக்கும் தொடர்பில்லை. $f(a)$ ஆனது வரையறை செய்யப்படாமல் இருந்தாலும் கூட $f(x)$ க்கு $x \longrightarrow a$ எனும் போது எல்லை இருக்கத் தடை இல்லை.

2. வரையறைப்படி, $\epsilon \; (> 0)$ எத்துணை சிறியதாக இருந்தாலும், அதற்குப் பொருத்தமான δ இருக்கும். ஒவ்வொரு ϵ மதிப்புக்கும் ஏற்ற δ தீர்மானம் ஆவதால், ϵ ன் சார்பலனாக δ அமைகிறது. ஆனால், பொதுவாக, a நிலைத்திருக்க, கொடுக்கப்பட்ட ϵ சிறிதாக சிறிதாக δ ம் சிறிதாகும் என்பது தெளிவு.

§ 2-3·1. வலப்புற, இடப்புற எல்லைகள்

x-ன் இரு இடைவெளிகளான (திறந்தவை) $a - \delta < x < a$ $a < x < a + \delta$ என்பன இரு வகை எல்லைகளை வரையறை செய்ய இடம் தருகின்றன.

கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ க்கும் $a - \delta < x < a$ ஆக இருக்கையில் $|f(x) - l| < \epsilon$ ஆக அமைய $\delta > 0$ உளதானல், $x \longrightarrow a$ இடப்புறமாக ஆகும் போது, $f(x)$ க்கு l என்ற எல்லை இருப்பதாகக் கூறுகிறோம்.

இதனை

$$L \lim_{x \to a} f(x) = l$$

அல்லது

$$\lim_{x \to (a-o)} f(x) = l$$

அல்லது $f(a-o) = l$

என எழுதி l என்பதை $f(x)$ ன் இடப்புற எல்லை என அழைக்கிறோம்.

இவ்வாறே கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு $\epsilon > 0$ மதிப்புக்கும் $a < x < a + \delta$ ஆக இருக்கையில் $|f(x) - l| < \epsilon$ ஆக அமைய $\delta > 0$ உளதானல் $x \longrightarrow a$ வலப்புறமாக ஆகும்போது $f(x)$க்கு l என்ற எல்லை இருப்பதாகக் கூறுகிறோம்.

இதனை

$$R \lim_{x \to a} f(x) = l$$

அல்லது

$$\lim_{x \to (a+o)} f(x) = l$$

அல்லது $f(a+o) = l$

என எழுதி l என்பதை $f(x)$ன் வலப்புற எல்லை என அழைக்கிறோம்.

இத்தகைய எல்லை இரண்டும் இருந்து அவை சமமாக இருக்கும்போது மட்டுமே தான் $x \longrightarrow a$ எனில் $f(x)$க்கு l என்ற எல்லை இருப்பதாகக் கூறுகிறோம்.

அதாவது

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \rightleftarrows \lim_{x \to a-o} f(x) = \lim_{x \to a+o} f(x).$$

குறிப்பு : f-ன் இடப்புற எல்லையை x கீழிலிருந்து a அணுகும் எல்லை என்றும் $(x \longrightarrow a - o)$, வலப்புற எல்லையை, x மேலிருந்து a அணுகும் எல்லை என்றும் $(x \longrightarrow a + o)$, குறிப்பிடுவதுண்டு.

குறிப்பு : $x \longrightarrow a$ எனில் $f(x)$ அணுகும் எல்லையை $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பு என்று கூறுவதுண்டு. இது $f(a)$ ஆக இருக்க வேண்டும் என்பதில்லை; $f(a)$ வரையறை ஆகாதபோது கூட எல்லை மதிப்பு இருக்கலாம்.

$f(x)$க்கு எப்போதுமே எல்லை மதிப்பு இருந்தாக வேண்டும் என்பதுமில்லை. கொடுக்கப்பட்ட ஏதோ ஒரு ϵ க்கு மட்டும் ஏற்ற δ கண்டுபிடிக்க முடியாமல் போனால் கூட எல்லை மதிப்பு இல்லாது போய்விடும். இக்கருத்துகள் அடுத்த பகுதியில் விளக்கப்படும்.

§ 2-3·2. $f(x)$க்கு $x = a$-ல் மதிப்புக்கும், $x \to a$-ல் $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்புக்கும் உள்ள வேறுபாடு.

(i) தனித்த மாறி aஐ அணுகும்போது, சார்பலன் அணுகும் மாறிலியே எல்லை மதிப்பு. $x = a$ல் சார்பலன் மதிப்பாவது தனித்த மாறியின் ஒரே மதிப்பால் தீர்மானமாவதாகும்.

(ii) $x = a$ல் $f(x)$-ன் மதிப்பைச் கருதும்போது $x = a$-ன் அணுக்கத்தில் $f(x)$ ஐப் பற்றிக் கருதுவதில்லை. ஆனால் $x \to a$-ல் $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பைக் கருதும்போது $x = a$-ன் அணுக்கத்தில் சார்பலனின் தன்மையைக் கருதுகிறோமே அன்றி $x = a$ல் $f(x)$ஐப் பற்றிக் கவலைப்படுவதில்லை.

(iii) $x = a$ல் $f(x)$ மதிப்பும், $x \to a$க்கு $f(x)$-ன் எல்லை மதிப்பும் வெவ்வேறாக இருக்கலாம்.

(a) $f(a)$ மதிப்பு உளதாகி, எல்லை மதிப்பு இல்லாமல் போகலாம். எடுத்துக்காட்டாக

$$
\begin{aligned}
f x &= 1 \qquad x > 0 \text{ எனில்}\\
&= 0 \qquad x = 0 \text{ எனில்}\\
&= -1 \qquad x < 0 \text{ எனில்}
\end{aligned}
$$

என்ற சார்பலனுக்கு $f(0) = 0$

ஆனால் $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} f(x) = 1;\quad \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} f(x) = -1$

எனவே $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} f(x) \neq \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} f(x)$

எனவே எல்லைமதிப்பு $x = 0$ல் இல்லை

(b) $f(a)$ மதிப்பு இல்லாமலிருந்தும் எல்லைமதிப்பு உளதாகலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x = 4$ல் $\dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$ என்ற சார்பலனைக் கருதுக. எல்லையை முதலில் காண்போம். ϵ என்ற ஏதேச்சையான மிகை எண் தரப்பட்டுள்ளது.

$0 < |x - 4| < \delta$க்கு

$$\left| \frac{x^2 - 16}{x - 4} - 8 \right| < \epsilon \text{ என அமைய}$$

$\delta > 0$ காணவேண்டும்.

(அது) $0 < | x - 4 | < \delta$ எனில்

$$\left| \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} - 8 \right| < \epsilon$$

$x \longrightarrow 4$ என்ற எல்லையை காண முற்படும்போது $x - 4 \neq 0$ ஆதலால் பின்ன மேல்பகுதியில் இருந்தும் கீழ்ப்பகுதியிலிருந்தும் $x - 4$ என்ற காரணியை எடுக்கலாம்

(அது) $0 < | x - 4 | < \delta$ எனில்

$$| x + 4 - 8 | < \epsilon$$

(அது) $0 < | x - 4 | < \delta$ எனில்

$$| x - 4 | < \epsilon$$

$\delta = \epsilon$ என எடுத்துக்கொள்ள இரு தொடர்புகளும் நிறைவு செய்யப்படும்.

$$\text{எனவே } \underset{x \longrightarrow 4}{Lt} \left(\frac{x^2 - 16}{x - 4} \right) = 8$$

ஆனால் $x = 4$ என எடுத்துக் கொண்டால் $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

என்ற சார்பலன் $\dfrac{0}{0}$ அமைப்பாவதால் வரையறை ஆகவில்லை.

(c) $x = a$ல் $f(x)$ மதிப்பும், எல்லை மதிப்பும் இருந்து அவை சமமில்லாமல் போகலாம். எடுத்துக்காட்டாக $x \neq 0$ எனில் $f(x) = 0$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 1$

என்ற சார்பலனைக் கருதுக

$x = 0$ல் சார்பலன் மதிப்பு 1

ஆனால் எல்லைமதிப்பு $= \underset{x \longrightarrow 0 - 0}{Lt} f(x) = \underset{x \longrightarrow 0 + 0}{Lt} = 0$

இரண்டும் வெவ்வேறானவை.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x \longrightarrow 2$ எனும்போது

$\frac{x^2 - 4}{x - 2}$ என்ற சார்பலனின்

எல்லையை ஆராய்க.

தீர்வு : சார்பலன் 2 என்ற மதிப்பைத் தவிர பிற மதிப்புகளுக்கெல்லாம் வரையறை உடையது.

$$x \neq 2 \text{ எனில்}, y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

வகை 1 : $x > 2$ எனில் y-ன் தன்மையை முதலில் காண்போம்.

$x > 2$ எனில், $y > 4$ என்பது வெளிப்படை.

x, 2ஐ விடக் கூடுதலாகவே இருந்து 2-லிருந்து அதன் மதிப்புக்குள்ள வேறுபாடு சிறிது சிறிதாகக் குறைய y-க்கும் 4-க்கும் உள்ள வேறுபாடு சிறிது சிறிதாகக் குறையும்; ஆனால் 4-க்கு மேற்பட்டே இருக்கும்.

x-ஐ 2-க்கு போதிய அளவு நெருக்கமாக எடுப்பதன் மூலம் y-க்கும் 4க்கும் உள்ள வேறுபாட்டை விரும்பிய வண்ணம் சிறிதாக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக .001 எனத்தரப்பட்டால்

$$| y - 4 | = y - 4 = x + 2 - 4 > \cdot 001$$

$$\therefore x < 2 \cdot 001$$

எனவே $2 < x < 2 \cdot 001$ என அமைந்த x மதிப்புகளுக்கு, y-க்கும் 4-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மட்டு மதிப்பு நாம் முன் கூட்டியே தேர்ந்த .001 ஐ விடச் சிறிதாக இருக்கும்.

.001 என்ற குறிப்பிட்ட எண்ணுக்கு பதிலாக ϵ என்ற மிகை எண்ணைத் தேர்ந்தாலும்

$$y - 4 = x - 2 < \epsilon$$

அல்லது $x < 2 + \epsilon$ எனப் பொருத்தமாக x காணலாம்.

அதாவது ϵ என ஏதேச்சையாக மிகை எண் தரப்பட்டால், y க்கும் 4-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மட்டு மதிப்பு ϵ-ஐவிடக் குறைவு படுமாறு $]2, 2+\epsilon[$ என்ற இடைவெளியில் உள்ள x மதிப்புகளுக்கு ஏற்ப y மதிப்பு கிடைக்குமாறு இடைவெளி உளதாகும்.

$$\therefore \quad \underset{x \to 2+0}{Lt} \; y = 4$$

வகை 2 : $x < 2$ எனில் y ன் தன்மையை ஆராய்வோம்.

முன்பு விவாதித்தது போலவே ϵ என ஏதேச்சையாக மிகை எண் தரப்பட்டால் $]2-\epsilon, 2[$ என்ற இடைவெளி அதற்குள் அமைந்த x-க்கு இயைந்த y-க்கும் 4-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மட்டுமதிப்பு ϵ-ஐவிடக் குறைவாக இருக்குமாறு உளதாகும் என நிறுவலாம்.

$$\therefore \quad \underset{x \to 2+0}{Lt} \; y = 4$$

வகை 3 : இரு பகுதிகளில் கண்ட முடிவைத் தொகுத்து ϵ என ஏதேச்சையாக மிகை என் ஒன்று தரப்பட்டால் $]2-\epsilon, 2+\epsilon[$ என்ற இடைவெளி, 2-ஐத் தவிர்த்து இடைவெளியில் அமையம் x மதிப்புகளுக்கு இயைந்த y-க்கும் 4-க்கும் உள்ள வேறுபாட்டின் மட்டுமதிப்பு ϵ-ஐவிடக் குறைவாக இருக்குமாறு, 2-ஐ ஒட்டி உளதாகும்.

அதாவது $|x - 2| < \epsilon$ எனில்

$$|y - 4| < \epsilon$$

(அது) $x \longrightarrow 2$ எதில் $y \longrightarrow 4$.

$$\underset{x \to 2}{Lt} \; y = 4.$$

எடுத்துக்காட்டு 7:

$y = x \sin x$ என்ற சார்பலனுக்கு $x \longrightarrow 0$ எனும் போது எல்லையை ஆராய்க.

தீர்வு :

வகை 1 : $x > 0$ **என்க.**

$0 < x < \pi/2$ என்றால் $y > 0$.

$0 < x < \pi/2$ எனும் போது

$$\sin x < x$$

$$\therefore \quad x \sin x < x^2$$

ϵ என்பது முன்கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை எண் என்க; மிகையாகவும், $\sqrt{\epsilon}$ விடக் குறைவாகவும் உள்ள மதிப்புகளுக்கு $x^2 < \epsilon$.

$$\therefore \quad x \sin x < \epsilon$$

0-க்கும் $x \sin x$-க்கும் உள்ள வேறுபாடு மதிப்பில் முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை ϵ-விடக் குறைவாக இருக்குமாறு x மதிப்புக்களை உடைய $]\,0, \sqrt{\epsilon}\,[$ என்ற இடைவெளி உளதாகிறது.

$$\therefore \quad \underset{x \to 0+0}{Lt} \; x \sin x = 0. \qquad \ldots (1)$$

வகை 2 : $x < 0$ என்க.

அப்போது $x > -\pi/2$ எனில் $y > 0$.

மதிப்பில் சமமாகவும், குறியீட்டில் வேறாகவும் உள்ள இரு x மதிப்புகளுக்கு சார்பலன் மதிப்பு சமமாதலால் வகை 1 போன்ற விவாதத்தினால் $x \sin x$-க்கும் 0-க்கு உள்ள வேறுபாடு மதிப்பில் முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை ϵ விடக் குறைவாக இருக்குமாறு x மதிப்புக்களை உடைய $]\,-\sqrt{\epsilon}, 0\,[$ என்ற இடைவெளி உளதாகிறது.

$$\therefore \quad \underset{x \to 0-0}{Lt} \; x \sin x = 0 \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) மூலம் $|\,x \sin x - 0\,| < \epsilon$ ஆக இருக்குமாறு மதிப்புகள் கொண்டு 0 ஐ ஒட்டி $]\,-\sqrt{\epsilon}, \sqrt{\epsilon}\,[$ என்ற இடைவெளி உளதாகிறது.

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{Lt} \; x \sin x = 0$$

குறிப்பு : $x = 0$ ல் சார்புடைய மதிப்பு $0 \sin 0 = 0$. இங்கே சார்பு மதிப்பும் எல்லை மதிப்பும் ஒன்றே $\therefore$ $x = 0$-ல் சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 8:

$$\underset{x \to 0}{Lt} \; \sin \frac{1}{x}$$ ஐ ஆராய்க.

தீர்வு :

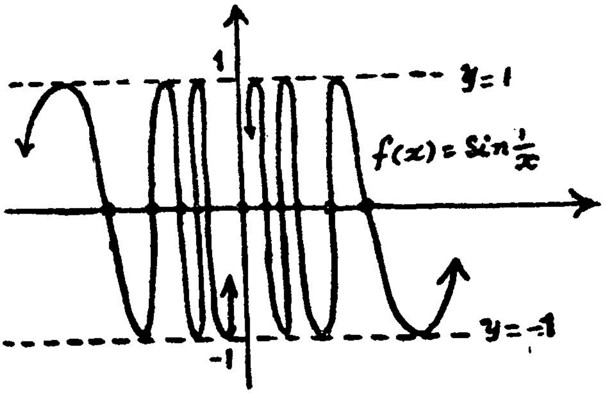
பூச்சியமில்லா எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $\sin \frac{1}{x}$ வரையறை உடையது.

$x \longrightarrow 0$ எனில் $\frac{1}{x}$ எல்லையற்று வளரும். $\frac{1}{x}$-முடிவின்றி வளர, சார்பு $+1$-க்கும், -1-க்கு இடையே ஊசலாடும்.

n முழு எண் எனில்

$x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ என்ற புள்ளிகளில் சார்பு $+1$ மதிப்பும்

$x = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ என்ற புள்ளிகளில் சார்பு -1 மதிப்பும் பெறுகிறது. எனவே பூச்சியத்துக்கு நெருக்கமாக xஐ கொண்டு போனால் -1-க்கும் $+1$-க்கும் முன்னும் பின்னுமாக விரைவாக சார்பலன் மதிப்பெடுக்கிறது. குறிப்பிட்ட எந்த மதிப்பையும் நெருங்கவில்லை.



படம் 2·4

(சார்பின் இத்தன்மையை படம் நன்கு எடுத்துக்காட்டும்.)

எனவே $\underset{x \longrightarrow 0}{Lt} \sin \frac{1}{x}$ உளதாகாது.

எ. கா. 9 : x பூச்சியத்தை அணுகும் எல்லையில் $x \sin \frac{1}{x}$ காண்க.

தீர்வு : $x = 0$ல் சார்பலன் வரையறை ஆகவில்லை.

பூச்சியமல்லா x மதிப்புகளுக்கு,

$$\left| x \sin \frac{1}{x} \right| = |x| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| .$$

$$\therefore \; |x - 0| = |x| < \epsilon$$

எனில் $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| = \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| < \epsilon$

எனவே ϵ என்ற மிகை எண் தரப்பட்டால் 0 என்ற மதிப்பு தவிர பிற x மதிப்புகளுக்கு $\left| x \sin \frac{1}{x} - 0 \right| < \epsilon$ ஆக இருக்குமாறு] $-\epsilon, \epsilon$ [எனும் இடைவெளியில் அமையும் x மதிப்புகள் நிறைவு செய்ய இடைவெளி உளதாகிறது.

$$\therefore \quad \underset{x \to 0}{\mathrm{L}t} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = 0$$

§ 2-3·4. முடிவிலி எல்லைகள் (Infinite Limits)

$x \longrightarrow a$ எனும்போது $\frac{1}{x-a}$-ன் எல்லையைக் கருதுக.

இருபுறத்திலிருந்தும் x ஆனது aக்கு நெருக்கமாக இருக்க $\frac{1}{x-a}$ ஆனது $\pm$ (பெரிய எண்)- $a = 1$ எனக் கொள்க. x-ஐ 1க்கு ஏற்ற அளவு நெருக்கமாகக் கொண்டு வருவதன் மூலம் $\frac{1}{x-1}$ ஐ முன் கூட்டியே தரப்பட்ட எந்த எண்ணையும் மிஞ்சுமாறு செய்து விடலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக $x = 1 \pm \frac{1}{2^{15}}$ எனில்

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| = 2^{15} = 32848$$

$\left| \frac{1}{x-1} \right| > 30000$ இருக்க வேணடுமென நினைத்தால் $x = 1 \pm \frac{1}{2^{15}}$ ஆக எடுத்துக் கொள்ளவேண்டும். இத்தகைய சமயங்களில்

$x \longrightarrow 1$ எனில் $\frac{1}{x-1} \longrightarrow \infty$ எனக் கூறுகிறோம்.

வரையறை :

(i) L என்ற எத்துணை பெரிய மிகை எண் கொடுக்கப்பட்டிருந்தாலும், $]c - \delta, c + \delta[$ என்ற இடைவெளியில் c தவிர்த்த எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $f(x) > \mathrm{L}$ ஆக இருக்குமாறு δ ஒன்றைக் கண்டுபிடிக்க முடியுமானால், x ஆனது c-ஐ அணுக $f(x)$ ஆனது ∞-ஐ அணுகும் எனக் கூறுவோம்.

இதனை $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ எனக்குறிப்போம்.

(ii) L என்ற எத்துணை பெரிய மிகை எண் கொடுக்கப்பட்டிருந் தாலும், $]c - \delta, c + \delta[$ என்ற இடைவெளியில் c தவிர்த்த எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் $f(x) < -L$ ஆக இருக்குமாறு δ ஒன்றைக் கண்டு பிடிக்க முடியுமானால், x ஆனது cஐ அணுக $f(x)$ ஆனது $-\infty$-ஐ அணுகும் எனக் கூறுவோம். இதனை

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

எனக்குறிப்போம்.

குறிப்பு: எல்லை இல்லாமையைக் குறிக்கும். ஒரு குறியீடே ∞ என்பதையும் அது ஒரு எண் போலக் கருதக் கூடாது என்பதை யும் கவனத்தில் கொள்ளவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: மேற்கூறியதை நிறுவ δ-ஐ L-ன் சார்பலனாக அமைத்து

$$0 < |x - 0| < \delta\text{-க்கு } \frac{1}{x^2} > N \text{ என நிறுவ வேண்டும்.}$$

(அது) $x^2 < \frac{1}{N}$, $0 < |x| < \delta$-க்கு என நிறுவ வேண்டும்.

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ எனத் தேர்ந்தால் இது இயலும்}$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

வரையறை :

(i) முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை எண்ணுன ϵ எத்தனை சிறியதாக இருப்பினும், $x > m$ ஆக இருக்கையில் ($-x > m$ ஆக இருக்கையில்) $|f(x) - l| < \epsilon$ ஆக அமையுமாறு போதிய அளவு பெரிய m உளதாயின் $x \longrightarrow \infty$ ($-x \longrightarrow \infty$) எனும்போது $f(x)$ ஆனது l என்ற எல்லையைப் பெற்றுள்ளது என்போம்.

குறியீட்டில்

$$\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} f(x) = l \qquad \underset{x \longrightarrow -\infty}{\text{Lt}} f(x) = l$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \dfrac{1}{x^2} = 0$ என நிறுவுக.

நிறுவல் : இந்த முடிவை நிறுவ

$x > m$க்கு $\left|\dfrac{1}{x^2} - 0\right| < \epsilon$ ஆக அமைய ϵன் சார்பலனுக m காணவேண்டும்.

வர்க்கம் எடுத்துள்ளதால் மட்டு (modulus) அமைப்பு தேவையில்லை.

$\therefore$ $x > m$ எனில் $\dfrac{1}{x^2} < \epsilon$ அல்லது $x^2 > \dfrac{1}{\epsilon}$ ஆக வேண்டும்.

(அது) $x > \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ $\left(\text{அல்லது, } x < -\dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}\right)$

என $x > m$க்கு இருக்கவேண்டும்.

$m = \dfrac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ என எடுத்தால் இரு நிபந்தனைகளும் நிறைவு செய்யப்படும்.

எனவே $x \longrightarrow \infty$ எனில் (அது மட்டுமல்ல $-x \longrightarrow \infty$ அல்லது $x \longrightarrow -\infty$ என்றாலும் கூட) $\dfrac{1}{x^2} \longrightarrow 0$ என நிறுவுகிறோம்.

வரையறை : முன் கூட்டியே தரப்பட்ட மிகை எண் Nக்கு ஏற்ப $x > m$ ($-x > m$) என்றால் $f(x) > \text{N}$ என அமையுமாறு m என்ற

மிகை எண் உளதாயின் $x \longrightarrow \infty$ $(-x \longrightarrow \infty)$ எனில் $f(x)$ ஆனது ∞ ஐ அணுகும் எனக் கூறுகிறோம்.
இதனைக் குறியீட்டில்

$$\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} f(x) = \infty \qquad \underset{x \longrightarrow -\infty}{\text{Lt}} f(x) = \infty$$

என எழுதுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு 12:

$\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} x^2 = \infty$ என நிறுவுக.

தீர்வு: $x > m$ எனில் $x^2 > N$ ஆக அமைய Nக்கு ஏற்ற m காண வேண்டும். (அது) $x > \sqrt{N}$ (அல்லது $x < -\sqrt{N}$) ஆக அமைய வேண்டும்

$m = \sqrt{N}$ என எடுத்துக்கொண்டால் சரியாக இருக்கும்

எனவே $x \longrightarrow \infty$ எனில் $x^2 \longrightarrow \infty$

$x \longrightarrow -\infty$ எனிலும் $x^2 \longrightarrow \infty$ என்பதையும் கவனிக்கவும்.

பயிற்சிகள் 2 (A)

1. பின்வரும் எல்லைகள் உளதென நிறுவுக; எல்லை மதிப்புகளை சரிபார்க்க:

(i) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{Lt}} \sqrt{x} = 1$ (ii) $\underset{x \longrightarrow 5}{\text{Lt}} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} = 10$

(iii) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{Lt}} \dfrac{1}{(x-1)^2} = \infty$ (iv) $\underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \dfrac{1}{2x+3} = \dfrac{1}{3}$

(v) $\underset{x \longrightarrow 1+0}{\text{Lt}} \dfrac{x}{x-1} = \infty$ (vi) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{Lt}} \dfrac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$

(vii) $\underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \dfrac{x}{1 + x^3} = 0$ (viii) $\underset{x \longrightarrow 1}{\text{Lt}} x^2 + 3 = 4$

2. $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\mathrm{Lt}} \tan x$ உளதாகவில்லை என நிறுவுக.

2. ஆய்க : $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; 2^{1/x}$

விடைகள் 2 (A)

3. $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \; 2^{1/x} = \infty \qquad \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \; 2^{1/x} = 0$

$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; 2^{1/x}$ இல்லை.

§ 2-4. தொடர்ச்சியும் எல்லையும்

தொடர்ச்சி, எல்லை ஆகிய இரண்டையும் அறிமுகப் படுத்தினோம். இனி இவை இரண்டையும் தொடர்புபடுத்து வோம்.

$x = c$ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது என்பதும்

$\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}} \; f(x) = f(c)$ ... ... என்பதும் ஒன்றே.

அதாவது $f(x)$ என்ற சார்பலனுக்கு $x = c$-ல் எல்லை மதிப்பும் f-(c) மதிப்பும் ஒன்றேயெனில் $f(x)$ ஆனது $x = c$ல் தொடர்ச்சி உடையது; மறுதலையும் உண்மை.

இதிலிருந்து $f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = c$ ல் தொடர்ச்சி யின்மை கொண்டிருக்கக் காரணங்களை வகைப்படுத்திக் கூறலாம். இதனை அடுத்தப்பகுதியில் விளக்குவோம்.

§ 2-5. தொடர்ச்சியற்ற சார்பலன்கள்

$f(x)$ என்ற சார்பலன் வரையறை செய்யப்படும் அரங்கத்தில் a என்பது ஒரு உட்புள்ளி என்க. $x = a$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்று இருப்பதானால் பின்வரும் காரணங்கள் அதற்கு இருக்கலாம்.

வகை 1 : $f(a-0) = f(a+0) =$ முடிவுள்ள எண். ஆனால் $x = a$-ல் $f(x)$ வரையறை செய்யப்படவில்லை. இதனை முதல் வகைத் தொடர்ச்சியின்மை (discontinuity of first kind)

அல்லது எளிய தொடர்ச்சியின்மை (simple discontinuity) அல்லது நீக்கப்படக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை (removable discontinuity) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$f(x) = \frac{x^2}{x}, \qquad x = 0\text{-ல்}$$

$$\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2}{x} =$$

$$= \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} x = 0$$

இவ்வாறே $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} f(x) = 0$

$$\therefore \; f(0-0) = 0 = f(0+0)$$

ஆனால் $f(0) = \frac{0}{0}$ வரையறை செய்யப்படவில்லை

எனவே $(x) = 0$-ல் $f(x) = \frac{x^2}{x}$ தொடர்ச்சி அற்றது.

$x = 0$-ல் $f(x)$-க்கு மதிப்பு தருவதன் மூலம் தொடர்ச்சியின்மையை நீக்கிவிடலாம்.

வகை 2 :

$f(a)$ முடிவுள்ளது.

$f(a-0) = f(a+0) =$ முடிவுள்ளது.

ஆனால் $f(a-0) = f(a+0) \neq f(a)$

இத்தகைய தொடர்ச்சியின்மை முதல்வகை நீக்கத்தக்க தொடர்ச்சியின்மையே.

எடுத்துக்காட்டு :

$x = 0$ எனில் $f(x) = 1$

$x \neq 0$ எனில் $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது,

இங்கே $\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x^2 (1 + \cos x)}$

$$= \frac{(1 - \cos^2 x)}{x^2 (1 + \cos x)}$$

$$= \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$= \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\frac{1}{1 + \cos x}\right)$$

எனவே $f(0 - 0) = f(0 + 0) = 1^2 \cdot \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$

ஆனால் $f(0) = 1$. ஆகையால் $x = 0$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்றது.

வகை 3 :

$f(a)$, $f(a - 0)$, $f(a + 0)$ உளதான போதிலும் $f(a - 0) \neq f(a + 0)$

இதனை எளிய தொடர்ச்சியின்மை எனக் கூறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$f(x)$ என்ற சார்பலன் பின்வருமாறு வரையறை செய்யப் படுகிறது.

$f(x) = 5$ $\quad x < 0$ எனில்

$= 8$ $\quad x = 0$ எனில்

$= 12$ $\quad x > 0$ எனில்

இச்சார்பலனுக்கு

$f(0) = 8$

$f(0 - 0) = 5$

$f(0 + 0) = 12$

எனவே $f(0 - 0) \neq f(0 + 0)$

சார்பலனுக்கு $x = 0$-ல் தொடர்ச்சியில்லை.

வகை 4 :

$f(a-0)$, $f(a+0)$ உளதானவை, $f(a)$ வரையறை செய்யப்படவில்லை ஆனால்

$$f(a-0) \neq f(a+0)$$

இதனையும் எளிய தொடர்ச்சியின்மை எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$f(x)$ என்ற சார்பலன் பின்வருமாறு வரையறை செய்யப் படுகிறது.

$$f(x) = 2+x \qquad x>0 \text{ எனில்}$$
$$= x \qquad x<0 \text{ எனில்}$$
$$= \text{வரையறை செய்யப்படாதது} \quad x = 0 \text{ எனில்}$$

இச்சார்பலனுக்கு

$f(0)$ வரையறை செய்யப்படவில்லை.

$$f(0-0) = 0$$

$$f(0+0) = 2$$

$$\therefore \; f(0-0) \neq f(0+0)$$

எனவே சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சியற்றது.

வகை 5 :

$$f(a), \; \underset{x \to a}{\text{Lt}} \; f(f) \text{ உளதாக வில்லை}$$

இதனை இரண்டாம் வகைத் தொடர்சியின்மை எனக் கூறுகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(i) $x = 0$-ல் $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

இரண்டாம் வகைத் தொடர்ச்சியின்மை (முடிவிலி) உடையது.

ii $x = 0$ $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$

இரண்டாம் வகைத் தொடர்ச்சியின்மை [ஊசலி (oscillatons) உடயைது. (எ. கா. 8 பார்க்கவும்).

இதுவரைக் கூறியவற்றைத் தொகுத்துக் கூறுவோம். $x = a$-ல் $f(x)$-க்கு தொடர்ச்சியின்மைக்கு காரணங்கள் பின்வரும் ஒன்றாக இருக்கலாம்.

(i) $x = a$-ல் $f(x)$ வரையறைஆகவில்லை

(ii) $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x)$ உளதாகவில்லை

(iii) $f(a)$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x)$ உளதான போதும்

இரண்டும் சமமல்ல.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 13. $x \neq 0$ எனில் $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 1$

என்ற சார்பலன் $x = 0$ ல் தொடர்ச்சி உடையதா ?

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{\sin 2(0+h)}{0+h}\right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[2 \cdot \frac{\sin 2 L}{2h}\right] = 2 \underset{h \leftarrow 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin 2h}{2h} = 2.$$

$$\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin 2x}{x}$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{\text{siu } 2(0-h)}{0-h}\right]$$

$$= \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[2 \cdot \frac{\sin 2h}{2h}\right] = 2$$

$$\therefore \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} f(x) = 2$$

மேலும் $f(x)$-ன் மதிப்பு $x = 0$-ல் 1. $\therefore$ $x = 0$-ல், எல்லை மதிப்பும், $f(0)$ வெவ்வேறானவை; தொடர்ச்சி இல்லை.

எ. கா. 14 : $x = 0$-ல் பின்வரும் சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது அன்று என நிறுவுக.

$$f(x) = e^{1/x} \; (x \neq 0)$$

$$f(0) = 0.$$

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0-0}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0+0}{\text{Lt}} e^{1/x} = \infty$$

ஏனெனில் $\frac{1}{x} \to \infty$

மற்றும் $\underset{x \to 0-0}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0-0}{\text{Lt}} e^{1/x}$

$$= \underset{x \to 0-0}{\text{Lt}} \frac{1}{e^{-1/x}} = 0$$ ஏனெனில் $-\frac{1}{x} \to \infty$

$$\therefore \underset{x \to 0+0}{\text{Lt}} (x) \neq \underset{x \to 0-0}{\text{Lt}} f(x).$$

எனவே $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} f(x)$ உளதாகவில்லை.

$f(x)$ ஆனது $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது அன்று.

எ. கா. 15 :

$x < 0$ எனில் $f(x) = -x$

$0 \leq x \leq 1$ எனில் $f(x) = x$

$x > 1$ எனில் $f(x) = 2-x$

என வரையறை ஆகும் சார்பலன் $x=0$, $x=1$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

தீர்வு :

(i) $x = 0$ என்ற புள்ளி

$$\underset{x \to 0+0}{\text{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0+0}{\text{Lt}} x = 0$$

$$\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} -x = 0$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} f(x) = 0$$

மேலும் $f(0) = 0$

எனவே $x = 0$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $x = 1$ என்ற புள்ளி

$$\underset{x \to 1+0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 1+0}{\mathrm{Lt}} (2-x) = 1$$

$$\underset{x \to 1-0}{\mathrm{Lt}} f(x) = \underset{x \to 1-0}{\mathrm{Lt}} (x) = 1$$

$$\therefore \underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} f(x) = 1$$

மேலும் $f(1) = 1$

எனவே $x = 1$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

§ 2.6 எல்லைப்பற்றி சில தேற்றங்கள்

தேற்றம் 1. $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = l$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} g(x) = m$

எனில் $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \{f(x) + g(x)\} = l + m$

நிறுவல்: ϵ என்ற மிகை எண் சிறிதாகத் தரப்பட்டுள்ளது என்க.

$$0 < |x - a| < \delta_1 \text{ எனில் } |f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2},$$

$$0 < |x - a| < \delta_2 \text{ எனில் } |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

என அமைய $\frac{\epsilon}{2}$-ஐப் பொறுத்து δ_1, δ_2 என இரு எண்களைக் காணலாம்.

δ_1, δ_2 இரண்டில் சிறியதை δ என்க. அப்போது $0 < |x-a| < \delta$ எனில்

$$|f(x) - l| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |g(x) - m| < \frac{\epsilon}{2}$$

எனவே $0 < |x - a| < \delta$ எனில்

$$|[f(x) + g(x)] - [l + m]|$$

$$= |\{f(x) - l\} + \{g(x) - m\}|$$

$$\leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

$$< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$$\therefore \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x) + g(x)\} = l + m$$

கிளை 1. $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x) - g(x)\} = l - m$

கிளை 2. $f(x)$, $g(x)$ என்பன a-ல் தொடர்ச்சி உடைய இரு சார்பலன்கள் என்க.

அது $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = f(a)$; $\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) = g(a)$

$$\therefore \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f x \pm g(x)\} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) \pm \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x)$$

$$= f(a) \pm g(a) = \{f(x) \pm g(x)\}\ x = a$$

$$\therefore \quad f(x) + g(x) \ ; \ f(x) - g(x)$$

என்பன $x = a$-ல் தொடர்ச்சி உடையன.

தேற்றம் 2: $\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = l$, $\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) = m$ எனில்

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x).\ g(x)\} = l\,.m$$

நிறுவல் : இரு எல்லைகள் தரப்பட்டுள்ளன. எனவே ϵ' கொடுக்கப்பட்டால் $0 < |x - a| < \delta$ எனும்போது

$|f(x) - l| < \epsilon \longrightarrow |g(x) - m| < \epsilon'$ ...(1)

நிறைவு செய்யப்படுமாறு δ உளதாகும்.

இனி $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \{f(x).\ g(x)\} = l.m$ என நிறுவ

$|f(x).\ g(x) - lm|$ கருதுக.

$$|f(x)\,g(x) - lm| = |\,g(x)\{f(x) - l\} + l\{g(x) - m\}|$$
$$\leq |g(x)| \times |f(x) - l| + |l| \times |g(x) - m|$$
$$< \{|m| + \epsilon'\} \times \epsilon' + |l| \times \epsilon' \qquad (1) \text{ மூலம்}$$
$$= \{|l| + |m| + \epsilon'\} \times \epsilon'$$

ϵ கொடுக்கப்பட்டால், $0 < |x - a| < \delta$ எனும்போது
$$|f(x)\,g(x) - l\,m| < \epsilon$$

ஆக δ உளதாக வேண்டுமானால்

1-ஐவிடக் குறைந்ததாகவும் $\dfrac{\epsilon}{|l| + |m| + 1}$ - ஐ விடக் குறைந்ததாகவும் அமையும் மிகை எண்ணுக ϵ' மதிப்பைத் தேர்தல் வேண்டும்

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

கிளை 1. $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, f(x) = l$, c மாறிலி எனில்

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, \{c\,f(x)\} = c.l.$$

கிளை 2. $f(x)$, $g(x)$ என்பன $x = a$-ல் தொடர்ச்சி உடைய சார்பலன்கள்; c மாறிலி எனில் பின்வருவனவும் $x = a$-ல் தொடர்ச்சி உடைய சார்பலன்களே.

(i) $f(x).\,g(x)$

(ii) $c\,f(x)$.

தேற்றம் 3. $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, f(x) = l$, $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, g(x) = m \neq 0$ எனில்

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

நிறுவல்: $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{m}$ என நிறுவிட பின் வருவதைக் கருதுக.

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| = \left|\frac{mf(x) - l\,g(x)}{m\,g(x)}\right|$$

$$= \left|\frac{m\{f(x) - l\} - l\{g(x) - m\}}{m\,g(x)}\right|$$

$$\leq \frac{|m| \times |f(x) - l| + |l| \times |g(x) - m|}{|m| \times |g(x)|} \quad \ldots(1)$$

$x \longrightarrow a$ எனில் $g(x) \longrightarrow m \neq 0$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$\frac{|m|}{2}$ தரப்பட்டால் $0 < |x - a| < \delta_1$ எனில்

$|g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$ எனுமாறு, δ_1 உளதாகிறது

(அது) $0 < |x - a| < \delta_1$ எனில்

$$|m| - |g(x)| \leq |g(x) - m| < \frac{|m|}{2}$$

(அது) $0 < |x - a| < \delta_1$ எனில், $|g(x)| > \frac{|m|}{2}$ ...(2)

மேலும் தேற்றம் 2-ல் விவரித்தவாறு, ϵ' தரப்படும்போது
$0 < |x - a| < \delta_2$ எனில்

$$|f(x) - l| < \epsilon', \ |g(x) - m| < \epsilon' \quad \ldots(3)$$

எனுமாறு δ_2 உளதாகிறது.

δ_1, δ_2 இரண்டில் மதிப்பில் குறைந்ததை δ என்று குறிப்பிடுக. ϵ என்ற எண் தரப்பட்டால்

$\epsilon' < \frac{|m|^2 \times \epsilon}{2\{|l| + |m|\}}$ என எடுத்துக்கொள்வதன் மூலம்

$0 < |x - a| < \delta$ என்றால்

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{l}{m}\right| < \frac{|m| \times \epsilon' + |l| \times \epsilon'}{|m| \times \frac{|m|}{2}} \quad ..(1),(2),(3) \text{ மூலம்}$$

$$= \frac{2\{|l| + |m|\}}{|m|^2} \cdot \epsilon' < \epsilon$$

$\therefore$ தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

இனி: $f(x), g(x)$ என்பன $x = a$-ல் தொடர்ச்சி உடையன,

$\underset{x \to a}{Lt}\ g(x) \neq 0$ எனில் $f(x) / g(x)$ என்பதும் $x = a$-ல் தொடர்ச்சி உடையதே.

குறிப்பு 1 : இரு சார்பலன்களைப் பிணைத்து நாம் நிறுவிய தேற்றங்களை, இரண்டுக்கும் மேற்பட்டு முடிவுள்ள எண்ணிக்கை உடைய சார்பலன்களுக்கும் விரித்துரைக்கலாம்.

குறிப்பு 2 : $\sin x, \cos x$ என்பன எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சி உடையன என நிறுவலாம்.

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x},\ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

என்பதால் தேற்றங்களின் கிளைகளைப் பயன்படுத்தி மேற்கண்ட சார்பலன்கள் வரையறை ஆகும் புள்ளிகளில் எல்லாம் தொடர்ச்சி உடையன என நிறுவலாம்.

குறிப்பு 3 : x, = (மாறிலி) என்பன x-ல் தொடர்ச்சி உடைய சார்பலன்களாதலால் $2x, 3x, \ldots$ மற்றும்

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

என்ற அமைப்பில் உள்ள சார்பலன்கள் தொடர்ச்சி உடையன என்றும், பின்ன கீழ்ப்பகுதி பூச்சியமாக இல்லாதபோது

$$\frac{a_0 x^m + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}$$ என்ற சார்பலனும் தொடர்ச்சி

என்ற சார்பலனும் தொடர்ச்சி உடையது என்றும் நிறுவமுடியும்

குறிப்பு 4 : $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x, \cot^{-1} x, \sec^{-1} x, \operatorname{cosec}^{-1} x, \log_a x, a^x$ என்பன வரையறை ஆகும் புள்ளிகளில் எல்லாம் தொடர்ச்சி உடையன.

இதுவரை நிறுவிய தேற்றங்களைத் தவிர வேறு சில தேற்றங்களைக் கூறுவோம். இவற்றை நிறுவுவது மாணவர்க்கு பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

தோற்றம் 4 :

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = b$$

$$\underset{x \to b}{\mathrm{Lt}} g(x) = g(b)$$

எனில் $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}}\, g\left\{ f(x) \right\} = g\left\{ \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) \right\}$

தோற்றம் 5 :

a-ன் குறிப்பிட்ட அயலில்

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) ;$$

$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} f(x) = l = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} h(x)$ எனில்

$$\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} g(x) = l$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எ. கா. 16: $\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^2 - 3x + 8}{4x^3 + x + 2}$ காண்க.

தீர்வு :

$\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 4x^3 + x + 2 \neq 0$ ஆதலால்

$$\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2 - 3x + 8}{4x^3 + x + 2} = \frac{\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x^2 - \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 3x + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 8}{\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 4x^3 + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 2}$$

$$= \frac{\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x^2 - 3 \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 8}{4 \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x^3 + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, x + \underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}}\, 2} = \frac{4 - 6 + 8}{32 + 2 + 2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

குறிப்பு : இந்தக் கணக்கில் $x = 2$ பிரதியிட எல்லை கிடைத்து விடுகிறது. இவ்வாறு பிரதியிடுவது எல்லையை எப்போதும் கொடுத்து விடாது என்பதை அடுத்த எடுத்துக்காட்டு விளக்கும்.

எ. கா. 17 : $\underset{x \to 4}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$ காண்க.

தீர்வு :

$x = 4$ எனில் சார்பலன் $0/0$ அமைப்பைப் பெறும் இது வரையறை செய்யப்படாதது ஆனால் $x \to 4$ எல்லையைக் கருதுவதால்

சார்பலனை $\dfrac{(x-4)(x-3)}{x-4} = x - 3$ என எழுதலாம். எனவே

$$\underset{x \to 4}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4} = \underset{x \to 4}{\mathrm{Lt}} (x - 3) = 4 - 3 = 1.$$

எ. கா. 18 : $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{5x^2 - 4x + 3}$ காண்க.

தீர்வு : $x = \dfrac{1}{y}$ எனப் பிரதியிட்டால் $\dfrac{\infty}{\infty}$

என்ற வரையறையற்ற அமைப்பைத் தவிர்த்து விடலாம்.

$x = \dfrac{1}{y}$ எனில் $x \to \infty$ ஆகும்போது $y \to 0$ ஆகும்.

$$\therefore \underset{y \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{2.\frac{1}{y^2} + 3.\frac{1}{y} + 4}{5.\frac{1}{y^2} - 4.\frac{1}{y} + 3}$$

$$= \underset{y \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{2 + 3y + 4y^2}{5 - 4y + 3y^2}$$

$$= \frac{2}{5}$$

§ 2·7. தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலன்களின் தன்மைகள் சில:

தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலன்களின் தன்மைகள் சிலவற்றை நிறுவல் இன்றி தொகுத்துக் கூறுவோம். அவை பின்வரும் அத்தியாயங்களில் பயனுகும்.

(i) $x = c$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது. $f(c) \neq 0$ என்றால் $f(c)$-ன் குறியீட்டையே $f(x)$ கொண்டிருக்குமாறு x மதிப்புக்களைக் கொண்ட $]c - \delta, c + \delta[$ என்ற இடைவெளி c-ஐ ஒட்டி உளதாகும்.

ஏனெனில், $f(c)$ மிகை என்க; $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையதாகையால் திடீர் மாற்றங்கள் இராது. எனவே உடனடியாக $f(x)$ குறையாக ஆகிவிடாது. c-ன் அயலில் குறிப்பிட்ட இடை

வெளியிலாவது உள்ள x மதிப்புகளுக்கு $f(x)$ மிகையாகவே இருக்கவேண்டும்.

இந்தத் தன்மை பெருமம், சிறுமம், வளைவுமாற்றப்புள்ளி முதலியன பற்றி ஆராய்கையில் பயனுகும்.

(ii) (a, b) என்ற அடைத்த இடைவெளியில் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையதாக இருந்து (a), $f(b)$ என்பன எதிர்க் குறியீட்டினைப் பெற்றனவாக இருந்தால், a, b-க்கு இடையே அமைந்த ஒரு x மதிப்புக்காவது $f(x)$ பூச்சியமாக இருக்கும்.

ஏனெனில் $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$ என்பன வளைகோட்டில் x-அச்சுக்கு இரு புறங்களில் உள்ள புள்ளிகளாக வளைகோட்டில் அமைந்திருப்பதாலும், வளைகோடு x-அச்சை ஒரு புள்ளியிலாவது வெட்டிச்செல்லும். அப்புள்ளியில் நிச்சயமாக $f(x) = 0$.

(iii) (a, b) என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையதாக $f(x)$ என்ற சார்பலன் இருந்தால் $[a, b]$, என்ற இடைவெளிக்குள் $f(x)$ ஆனது மிகப் பெரிய மதிப்பு M, மிகச்சிறிய மதிப்பு m ஆகிய வற்றைப் பெறுமாறு c, d என்ற புள்ளிகள் உளதாகும். அதாவது $f(c) = M$, $f(d) = m$.

குறிப்பு 1 : ரோல் தேற்றத்தினை நிறுவும் போது இத்தன்மையைப் பயன்படுத்துவோம்.

குறிப்பு 2 ; ஒரு இடைவெளியில் தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலன் மேல், கீழ் வரம்புடைய இத்தன்மை, தொடர்ச்சியிலா சார்பலன்களில் இருக்க வேண்டியதில்லை.

§ 2-8. சில பயனுள்ள எல்லைகள்

§ 2-8·1. x என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள மெய் எண். n மிகை முழு எண் மதிப்புகள் வழியாக முடிவிலியை அணுக, x^n-ன் எல்லை.

வகை I. $x > 1$ என்க.

h மிகையாக $x = 1 + h$ என எழுதலாம்.

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தின் படி,

$$(1 + h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!}h^2 + \dots \dots \dots \dots \dots + \frac{n(n-1)\dots\dots 1}{n!}h^n$$

இங்கே ஒவ்வொரு உறுப்பும் மிகை.

எனவே,

$$x^n = (1+h)^n > 1 + nh.$$

n முடிவிலியை அணுகும் போது $1 + nh$-ம் அதன் பயனாக x^n-ம் முடிவிலியை அணுகும்.

வகை II. : $x = 1$ எனில் n-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் $x^n = 1$. எனவே இந்த வகையில் $x^n \longrightarrow 1$.

வகை III : $0 < x < 1$ என்க.

எனவே இங்கும் x^n மிகை.

$x = \frac{1}{y}$ என எடுத்துக் கொண்டால், $0 < x < 1$ ஆதலால் $y > 1$.

$$x^n = \frac{1}{y^n}, \text{ மேலும் } \underset{n \to \infty}{Lt}\, y^n = \infty$$

$\epsilon > 0$ எனுத் தரப்பட்டுள்ளது என்போம். $y^n \longrightarrow \infty$ எனும் போது, $n > m$ மதிப்புக்கும் $y^n > 1/\epsilon$ உண்மையாக இருக்குமாறு m ஒன்று உளதாகும்.

அதாவது, எல்லா $n > m$ மதிப்புக்கும் $x^n < \epsilon$.

x^n மிகை ஆதலால் எல்லா $n \geq m$ மதிப்புக்கும்

$$|x|n^n = x^n < \epsilon.$$

எனவே,

$$Lt\, x^n = 0.$$

வகை IV : $x = < 0$ என்க.

n-ன் எல்லா மதிப்புக்கும் $x^n = 0$ ஆதலால் $x^n \longrightarrow 0$.

வகை V ; $-1 < x\ 0$ என்க.

x குறை ஆதலால் n-ன் எல்லா இரட்டைப்படை மதிப்புகளுக்கும் x^n மிகையாகவும், ஒற்றைப்படை மதிப்புகளுக்குக் குறையாகவும் அமையும். z என்பது < 1 ஆன மிகை எண்ணாக $x = -z$ என எழுதலாம். அப்போது $|x^n| = z^n$ ஆனால் $z^n \longrightarrow z^n$; எனவே

$$x^n \longrightarrow 0.$$

வகை VI : $x = -1$ என்க.

மாற்றி, மாற்றி x^n ஆனது -1 ஆகவும் $+1$ ஆகவும் இருக்கும். எனவே இவ்வகையில் முடிவுள்ள எல்லைக்கோ, முடிவிலிக்கோ x^n அணுகாது.

வகை VII : $x < -1$ என்க. இப்போது x^n மாற்றி மாற்றி மிகையாகவும், குறையாகவும் இருக்கும். முன்கூட்டியே தரப்பட்ட எந்த எண்ணையும் விட எண் மதிப்பில் பெரிய மதிப்புகளை x^n பெருமாறு செய்யலாம். எனவே x^n எந்த எல்லையையும் அணுகாது.

முடிவு : $n \to \infty$ எனில் $-1 < x \leq 1$ ஆக இருக்கும் போது மட்டுமே தான் x^n முடிவுள்ள எல்லை பெற்றிருக்கும்.

$$|x| < 1 \text{ எனில் } \mathrm{Lt}\, x^n = 0$$

$$x = 1 \text{ எனில் } \mathrm{Lt}\, x^n = 1.$$

§ 2-8·2. x என்பது கொடுக்கப்பட்டுள்ள மெய் எண். n மிகை முழு எண் மதிப்புகள் வழியாக முடிவிலியை அணுகும் $\frac{x^n}{n!}$-ன் எல்லை.

வகை I : x மிகை எண் என்க.

(a) $x \geq 1$ எனில்

$m, m+1$ என்ற இரு அடுத்தடுத்த மிகை, முழு எண்களிடையே x அமைவதாகக் கருதுக. அதாவது,

$m < x < m+1$ என எடுத்துக் கொள்கிறோம்.

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \cdots\cdots \frac{x}{m} \cdot \frac{x}{m+1} \cdot \frac{x}{m+2} \cdots \frac{x}{n}. \text{ என}$$

எழுதலாம்.

$k = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{2} \cdots\cdots \frac{x}{m}$ என எடுத்துக் கொண்டால் k என்பது n உடன் சாராத மிகை மாறிலி எண். மேலும்,

$\frac{x}{m+2}, \frac{x}{m+3} \cdots\cdots\cdots \frac{x}{n}$ எனும்

விகிதங்கள் ஒவ்வொன்றும் $< \frac{x}{m+1}$ ஆகும்.

$$\text{ஆகையால் } 0 < \frac{x^n}{n!} < k\left(\frac{x}{m+1}\right)^{n-m}$$

$$\text{ஆனல் } k\left(\frac{x}{m+1}\right)^{n-m} = \frac{k}{\left(\frac{x}{m+1}\right)^m}\left(\frac{x}{m+1}\right)^n$$

$$= p\left(\frac{x}{m+1}\right)^n \text{ என்க.}$$

இங்கே p ஆனது n சாராத மிகை எண்.

$$\therefore \quad 0 < \frac{x^n}{n!} < p\left(\frac{x}{m+1}\right)^n$$

ஆனல் $0 < \dfrac{x}{m+1} < 1$ ஆதலால்

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{L}t}\left(\frac{x}{m+1}\right)^n = 0$$ (முன்பகுதி § 2-8·1. மூலம்

$$\therefore \quad \underset{n\to\infty}{\mathrm{L}t}\frac{x^n}{n!} = 0$$

(b) $0 \leq x < 1$ எனில் $\underset{n\to\infty}{\mathrm{L}t}\dfrac{x^n}{n} = 0$ என நேரிடையாக நிறுவலாம். (§ 2-8·1. பார்க்கவும்)

வகை II

x குறை எண். y மிகையாக $x = -y$ என்க.

எனவே,

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \left|\frac{(-1)y^n}{n!}\right| = \frac{y^n}{n!}$$

$\dfrac{y^n}{n!} \longrightarrow 0$ ஆதலால், $\dfrac{x^n}{n!} \longrightarrow 0.$

முடிவு : n மிகை, முழு எண் மதிப்புகள் வழியாக முடிவிலியை அணுகும்போது, x எம் மதிப்பு பெற்றிருந்தாலும்,

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{L}t}\frac{x^n}{n!} = 0.$$

§ 2-8·3 n மிகை, முழு எண் மதிப்புகள் வழியாக முடிவிலியை அணுகும்போது $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ன் எல்லை.

ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை, மிகை, முழுஎண் படிக்குப் பயன்படுத்த,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}$$

$$+\dots\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-n+1)}{n!}\frac{1}{n^n}$$

$$=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$+\dots\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\quad ..(1)$$

இந்த விரிவில் வலப்புறத்தில் $n+1$ மிகை உறுப்புகள் உள்ளன. n-க்கு பதிலாக $n+1$ பிரதியிட, வலப்புறத்தில் $n+2$ மிகை உறுப்புக்கள் உள்ள பின்வரும் விரிவு கிடைக்கும்.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1.2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\dots\dots$$

$$+\frac{1}{1.2\dots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\dots\dots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

மேலும்,

$$1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1},\ 1-\frac{2}{n}<1-\frac{2}{n+1}$$

$$1-\frac{3}{n}<1-\frac{3}{n+1}\dots\dots\dots\dots\dots$$

எனவே $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$ என்ற விரிவில் வரும் உறுப்புக்கள் ஒவ்வொன்றும், $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ என்ற விரிவில் வரும் இயைந்த உறுப்பை விடப் பெரிதாக இருக்கும்.

எனவே n-ன் எல்லா மிகை, முழு எண் மதிப்புகளுக்கும்,

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

அதாவது,

n அதிகரிக்க $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ அதிகரிக்கும். எனவே மிகை முழு எண்கள் வழியாக $n \longrightarrow \infty$ எனில் $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ஆனது, $+\infty$-க்கோ அல்லது குறிப்பிட்ட மிகை எல்லைக்கோ அணுகும் ஆனால் (1)-ன் மூலம்

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{n!}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2}+\ldots+\frac{1}{\underbrace{2.2.2\ldots}_{(n-1)\text{ காரணிகள்}}}$$

$$< 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$$

$$< 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$< 3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

< 3, எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

எனவே $n \longrightarrow \infty$ எனில் $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ அதிகரித்தாலும் 3-ஐவிட குறைவாக அமைந்திருக்கும். ஆகையால் $n \longrightarrow \infty$ (மிகை, முழு எண்கள் வழியே) எனில்

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகும்.

குறிப்பு:

(i) இந்த எல்லையை e எனக் குறிப்பிடுவோம்.

(ii) $e < 3$.

(iii) (1)-ன் மூலம் $e > 2$.

இனை 1 : எல்லா மிகை, மெய் எண்கள் வழியாகவும் $x \longrightarrow \infty$ எனில் $Lt\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ ஆகும்.

நிறுவல் : x மிகை, 1 முழு எண் என்க. எனவே $n \leq x < n+1$ எனுமாறு n என்ற மிகை முழு எண் உளதாகும்.

$$\frac{1}{n} \geq \frac{1}{x} > \frac{1}{n+1}$$

$$1+\frac{1}{n} \geq 1+\frac{1}{x} > 1+\frac{1}{n+1}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$$

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) \geq \left(1+\frac{1}{x}\right)^x > \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}$$

$x \longrightarrow \infty$ என்க.

அப்போது மிகை முழு எண்கள் வழியே $n \longrightarrow \infty$, மற்றும் $n+1 \longrightarrow \infty$.

மற்றும் $\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ என அறிவோம்.

மேலும் $\underset{n+1\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$

$$\underset{n\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\underset{n+1\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$\therefore \underset{x\to\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

இங்கே மிகை எண்கள் வழியாக $x \longrightarrow \infty$.

இனை 2 :

$$\underset{x\to-\infty}{Lt}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$x = -y$ எனப் பிரதியிட,

நிறுவல் :

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y}$$

$$= \left(\frac{y}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$= \left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$ இங்கே $y - 1 = t$.

$x \longrightarrow -\infty$ எனில் $y \longrightarrow +\infty$.

$\therefore\ t \longrightarrow \infty$.

எனவே,

$$\underset{x\to-\infty}{\mathrm{L}t}\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underset{t\to\infty}{\mathrm{L}t}\left(1+\frac{1}{t}\right)\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$

$$= \underset{t\to\infty}{\mathrm{L}t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}$$

$$= e.$$

கிளை 3 : $\boxed{\underset{x\to\infty}{\mathrm{L}t}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e}$ எல்லா

x மெய் மதிப்புகளுக்கும் உண்மை.

கிளை 4 : $\boxed{\underset{x\to0}{\mathrm{L}t}\left(1+\frac{x}{a}\right)^{1/x}}$ $\underset{x\to0}{\mathrm{L}t}\left\{\left(1+\frac{x}{a}\right)^{a/x}\right\}^{1/a}$

$$\boxed{= e^{1/a}}$$

கிளை 5 : $\boxed{\underset{x\to0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{x}\log_e(1+x)} = \underset{x\to0}{\mathrm{L}t}\ \log(1+x)^{1/x}$

$$= \log \left\{ \underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1 + x)^{1/x} \right\}$$

$$= \log e = \boxed{1.}$$

கிளை 6 : $\boxed{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{a^x - 1}{x} = \log_e a \; (a > 0)}$

நிறுவல் :

$a^x - 1 = t$ எனில் $x \to 0$ ஆக $t \to 0$.

மேலும் $a^x = t + 1$ அல்லது $x \log a = \log (1 + t)$

$$x = \frac{\log (1 + 1)}{\log a}$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{a^x - 1}{x} = \underset{t \to 0}{\text{Lt}} \frac{t \cdot \log a}{\log (t + 1)}$$

$$= \underset{t \to 0}{\text{Lt}} \frac{\log a}{\left(\frac{1}{t}\right) \log (1 + t)}$$

$$= \log a \cdot \underset{t \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\log (1+t)^{1/t}}$$

$$= \log_e a \frac{1}{\log_e e}$$

$$= \log_e a.$$

கிளை 7 : $\boxed{\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$

§ 2-8·4. $a > 0$; n பூச்சியமில்லாத ஒரு மெய் எண் என்றால்

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1}$$

நிறுவல் :

$x = a(1+t)$ என எடுத்துக்கொண்டால் $x \longrightarrow a$ எனில் $t \longrightarrow 0$. அப்போது,

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{a^n [(1+t)^n -]}{a t}$$

$$= \frac{a^{n-1} [(1+t)^n - 1]}{t}$$

$(1+t)^n - 1 = u$ என்க. அப்போது $t \longrightarrow 0$. ஆக $u \longrightarrow 0$. மற்றும் $(1+t)^n = 1 + u$ ஆதலால்

$$n \log(1+t) = \log(1+u) \qquad \text{......(i)}$$

$$\therefore \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{a^{n-1} . u}{t}$$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{u}{\log(1+u)} \cdot \frac{\log(1+u)}{t}$$

$$= a^{n-1} \cdot \frac{u}{\log(1+u)} \cdot \frac{n \log(1+t)}{t}$$

...... (1)-ன் மூலம்.

$$= a^{n-1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{u} \log(1+u)} \cdot n \cdot \frac{1}{t} \log(1+t)$$

$$= a^{n-1} . n \frac{1}{\log(1+u)^{1/u}} . \log(1+t)^{1/t}$$

$x \longrightarrow a$ எனில் $t \longrightarrow 0$, $u \longrightarrow 0$.

$$\underset{x \longrightarrow a}{\text{Lt}} \frac{x^n - a^n}{x - a} = n \cdot a^{n-1} \underset{u \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\log(1+u)^{1/u}} \times \underset{t \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \log(1+t)^{1/t}$$

$$= n . a^{n-1} \cdot \frac{1}{\log e} \cdot \log e.$$

$$= n . a^{n-1} \cdot 1 \cdot 1 = n a^{n-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 19

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1}{x} = n$$ என நிறுவுக.

நிறுவல்: $(1+x)^n - 1 = t$ எனப் பிரதியிடுக. $x \to 0$ எனில் $t \to 0$.

$$(1+x)^n = 1 + t$$

$$n \log (1+x) = \log (1+t) \qquad \ldots (1)$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(1+x)^n = 1}{x} = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{t}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{t}{\log (1+t)} \cdot \frac{\log (1+t)}{x}$$

$$= \underset{t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{t}{\log (1+t)} \cdot \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{n.\log(1+x)}{x}$$

1-ன் மூலம்.

$$= \underset{i \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{1}{\log (1+t)^{1/t}} \cdot \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}}\, n \log (1+x)^{1/x}$$

$$= \frac{1}{\log^e} \cdot n \log_e = n.$$

§ 2-8·5. x ஆரையன் மதிப்பில் இருக்கும்போது $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1$ என நிறுவுதல்.

நிறுவல்: முதலில் $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x}$ காண்போம்.

$x \to 0$ ஆதலால் $x < \frac{\pi}{2}$ எனலாம்.

$\therefore \sin x < x < \tan x$ | அல்லது $1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$

அல்லது $1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x$.

$\therefore \underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x}$ ஆனது 1-க்கும் $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} (\cos x)$க்கும் இடையில் அமையும்.

ஆனல் $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} (\cos x) = 1$

$$\therefore \underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \dots (1)$$

இப்போது $\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x}$ காண்போம்.

$x = -y$ எனப் பிரதியிட

$$\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underset{y \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{\sin(-y)}{-y}\right]$$

$$= \underset{y \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin y}{y} = 1 \dots$$ (1)-ன் மூலம்.

$$\therefore \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{\sin x}{x}\right) \quad \dots (2)$$

எனவே (1), (2) மூலம்

$$\boxed{\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

பயிற்சிகள் 2 (B)

1. எல்லைகள் காண்க :

(i) $\underset{x \to 2}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

(ii) $\underset{x \to 3}{\mathrm{Lt}} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

(iii) $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{3x^2 - 5x + 4}{x^3 - 3}$

(iv) $\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 + 3x + 4}$

(v) $\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h}$

(vi) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin 4x}{5x}$

(vii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\tan x}{x}$

(viii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{\sin^2 3\theta}{\theta \sin 4\theta}$

(ix) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

2. எல்லைகள் காண்க :

(i) $\underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{e^{4h} - 1}{h}$

(ii) $\underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{e^{ah} - 1}{bh}$

(iii) $\underset{x \to 0}{Lt} \dfrac{e^{\sin x} - 1}{x}$

(iv) $\underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{\sqrt{\sin (x + h)} - \sqrt{\sin x}}{h}$

(v) $\underset{x \to 1}{Lt} \dfrac{x^{20} - 1}{x^{15} - 1}$

(vi) $\underset{h \to 0}{Lt} \dfrac{\log (x + h) - \log x)}{h}$

3. x ன் எல்லா மதிப்புக்கும் பின்வருவன தொடர்ச்சி உடையன என நிறுவுக :

(i) $\sin x$

(ii) $\cos x$

(iii) $5 + x + x^2$

(iv) $\cos^2 x$

4. $f(x) = |x|$ என்ற சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக :

5. $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3} \ (x \neq 3)$

$= 6 \quad (x = 3)$ எனில்

என்ற சார்பலன் $x = 3$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என நிறுவுக.

6. $\phi(x)$ என்ற சார்பலன் பின் வருமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது:

$x = 0$ எனில் $\phi(x) = 0$

$0 < x < \frac{1}{2}$ எனில் $\phi(x) = \frac{1}{2} - x$

$x = \frac{1}{2}$ எனில் $\phi(x) = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} < x < 1$ எனில் $\phi(x) = \frac{3}{2} - x$

$x = 1$ எனில் $\phi(x) = 1$

$\phi(x)$ ஆனது $x = 0, \frac{1}{2}, 1$ ஆகிய புள்ளிகளில் தொடர்ச்சியற்றது என நிறுவுக.

7. $f(x)$ என்ற சார்பலன் பின்வருமாறு வரையறை செய்யப்படுகிறது.

$0 < x < 1$ எனில் $f(x) = 5x - 4$

$1 < x < 2$ எனில் $f(x) = 4x^3 - 3x$

$x = 1$-ல் தொடர்ச்சியை ஆய்க.

$$\left.\begin{array}{l} x \neq 0 \text{ எனில் } f(x) = \dfrac{e^{1/x} - 1}{e^{1/x} + 1} \end{array}\right\}$$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 0$

என்ற சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையதா ;

9. $x \geqslant 0$ எனில் $f(x) = \cos x$

$x < 0$ எனில் $f(x) = -\cos x$

என்ற சார்பலனை $x = 0$-ல் தொடர்ச்சிக்காக ஆய்க.

10. $f(x)$ என்ற சார்பலன் பின்வருமாறு வரையறை உடையது :

$x \neq 0$ எனில் $f(x) = \dfrac{\sin^2 ax}{x^2}$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 1$.

இச்சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையதா ?

11. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ என்ற சார்பலனும்

$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$; $f(0) = 0$

என்ற சார்பலனும் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையன என நிறுவுக.

12. $f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x}$; $x \neq 0$ எனில்

$f(x) = 1$; $x = 0$ எனில்

எனும் வரையறை உடைய சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது அன்று என நிறுவுக.

13. $x \neq 0$ எனில் $f(x) = x \log \sin x$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 0$.

என்ற சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையதா ?

$(f\, x) = \dfrac{3x + 4 \tan x}{x}$ என்ற சார்பலன்

$x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது அன்று எனநிறுவுக; தொடர்ச்சி உடையதாக மாற்றி அமைக்க எவ்வாறு வரையறை கூற வேண்டும் ?

விடைகள் 2 (B)

1. (i) $-\frac{1}{4}$ (ii) 13 (iii) 0 (iv) $\frac{1}{2}$ (v) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (vi) $\frac{4}{5}$

(vii) 1 (viii) [illegible]/4 (ix) $\frac{1}{2}$.

2. (i) $4 \log a$ (ii) a/b (iii) 1 (iv) $\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}$ (v) $\frac{4}{3}$ (vi) $\dfrac{1}{x}$

7. தொடர்ச்சி உடையது.

8. அல்ல.

9. தொடர்ச்சி உடையது அல்ல.

10. அல்ல; $a = 1$ என்றால் மட்டுமே தொடர்ச்சி உடையது.

13. ஆம்.

14. $x \neq 0$ எனில் $f(x) = \dfrac{3x + 4 \tan x}{x}$

$$f(0) = 7.$$

3. வகையிடல்

§ 3-0. மாற்ற வீதம்

வடிவ கணிதத்தில் வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் தொடு கோடு காணல் குறித்த கணக்குகள் வகைநுண் கணிதம் ஒரு இயலாக வளர அடித்தளமாக அமைந்தன. ஆனால் வடிவ கணிதத் தொடர்போடு நின்று விடாது, ஒரு கணத்தில் திசை வேகம், முடுக்கம், ஒரு புள்ளியில் திண்மை போன்ற பல இயல் பியல் பிரச்னைகளுக்கும் பயனாகும் வகையில் வகைநுண் கணிதம் உருவம் எடுத்துள்ளது.

சராசரி மாற்ற விகிதங்களைச் சாதாரண முறைகளில் கண்டு பிடித்து விடலாம். ஆனால் பொதுவாக, மாற்ற விகிதங்களை ஒரு குறிப்பிட்ட கணத்தில் அல்லது குறிப்பிட்ட நிலையில் ஆராய வேண்டிய தேவை எழும் போதெல்லாம் வகைநுண் கணித முறைகள் துணை புரிகின்றன.

y என்பது x-ன் ஒரு சார்பலன் என்க. அதனை $y = f(x)$ எனக் குறிப்பிடுக. ஒரு மதிப்பிலிருந்து மற்றொரு மதிப்புக்கு இடைப்பட்ட எல்லா மதிப்புகள் வழியாகவும் x அதிகரிக்கிறது என்க. x-ன் மாற்றத்துக்கு ஏற்ப y-ம் தொடர்ச்சியாக சில வேளை களில் அதிகரித்தும் சில வேளைகளில் குறைந்தும், சில இடங்களில் மிக அதிகமாகவும், சில இடங்களில் மிக வேகமாகவும், தொடர்ச்சியற்ற புள்ளிகளில் ஒரு மதிப்பிலிருந்து மற்றொரு மதிப் பிற்கு திடீர் மாற்றமும் பெற்று, மாறுதல்கள் பெறுகிறது. y அதிகரிப்புக்கும், x அதிகரிப்புக்கும் உள்ள விகிதத்தை நுணுக்க மாக ஆராய்வதற்குப் பின்வரும் பகுதிகளில் கண்டவாறு வகை நுண் கணிதத்தின் துவக்கமாக வகைக்கெழு (derivative) என்ப தன் வரையறை கூறுவோம்.

வகைநுண் கணிதம் தோற்றமெடுக்க மூல காரணமானவர்கள் நியூட்டனும் (Newton), லெபனிட்ஸ்சும் (Leibnitz) ஆவர்.

§ 3·1·0. வகைக்கெழுவின் வரையறை

முதலில் கூடுந்தொகை என்றால் என்ன என்பதை விளக்குவோம். ஒரு மாறியின் இறுதி மதிப்பிலிருந்து துவக்க மதிப்பைக் கழித்தால் கிடைப்பதே மாறியின் கூடுந்தொகை(increment) எனப்படும். இக் கூடுந்தொகை, மிகையாகவோ, குறையாகவோ இருக்கலாம். x-ன் கூடுந்தொகைகளைப் பொதுவாக Δx, δx, h போன்ற குறியீடுகளாலும், y-ன் கூடுந்தொகையை Δy, δy, k போன்ற குறியீடுகளாலும் வழங்குவோம்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன் $a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் வரையறை செய்யப்பட்டது என்க. c என்பது இவ்விடைவெயின் உள் உள்ள ஒரு புள்ளி என்க. $f(c)$ என்பது c-க்கு இயைந்த சார்பலன் மதிப்பு.

$c + h$ என்பது c-க்கு அண்மையில் மேற்குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் உள்ள புள்ளி என்க. h மிகையாகவோ அல்லது குறைவாகவோ இருப்பதைப் பொறுத்து $c+h$, c-க்கு வலமாகவோ அல்லது இடமாகவோ இருக்கும்

h என்பது தனித்த மாறியான x-ன் கூடுந்தொகை. அதற்கியைந்து $f(x)$ என்ற சார்ந்த மாறியில் கூடுந்தொகை $f(c+h) - f(c)$.

c என்பது மாறிலியாதலால் $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ என்ற இரு மாறிகளின் கூடுந்தொகைகளின் விகிதம் ($h \neq 0$ எனில்) h-ன் ஒரு சார்பலனாக இருக்கும். தனித்த மாறி x, c-யிலிருந்து $c + h$-க்கு மாற, $f(x)$ என்ற சார்ந்த மாறி பெறும் சராசரி மாற்றமே இவ்விகிதத்தினால் குறிக்கப்படுகிறது.

h பூச்சியத்திற்கு அணுகும் எல்லையில் மேற்குறிப்பிட்ட விகிதம். ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பை எல்லையில் அணுகலாம். இத்தகைய எல்லை உளதாயின் அந்த எல்லையை $x = c$-ல் $f(x)$-ன் வகைக்கெழு (derivative) எனக் கூறி, இவ்வெல்லையை $f'(c)$ எனக் குறிப்பிடுகிறோம். மேலும் $f(x)$ எனும் சார்பலன் c-ல் வகையிடத் தக்கது (derivable) என்கிறோம்.

வரையறை :

$$\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

உளதாயின் $x = c$-ல் $f(x)$ வகையிடத்தக்கது என்போம்.

இந்த எல்லையை c-ல் $f(x)$-ன் வகைக்கெழு (derivative) என்போம்; $f'(c)$ எனக் குறிப்போம்.

குறிப்பு : h மிகை மதிப்புக்கள் வழியாக பூச்சியத்தை அணுகினாலும், அல்லது குறை மதிப்புக்கள் வழியாக பூச்சியத்தை அணுகினாலும் கிடைக்கும் எல்லை மதிப்புக்கள் வெவ்வேறானவையாக சமமின்றி இருக்கக் கூடாது; அவ்வாறு வேறுபட்டிருப்பின் சார்பலன் வகையிடத் தக்கது அல்ல.

§ 3-1·1. சார்பலன்களின் வகைக்கெழு

முன் பகுதியில் சார்பலனுக்குத் தனித்த மாறியின் ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியில் வகைக்கெழு கண்டோம். குறிப்பிட்ட மதிப்புகளுக்கல்லாது பொதுவாகக் கூறுவதானால், $h \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் $\mathrm{L}t \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ காணவும். (இவ்வாறு எல்லை காணும் போது x மாறியாகக் கருதப்படும்). சார்பலனின் அரங்கத்தில் x-க்கு எம்மதிப்பைத் தந்தாலும் இத்தகைய எல்லை உளது எனக் கொள்க.

இந்த எல்லையானது x-ன் ஒரு சார்பலனாக இருக்கும். இதனை $f(x)$-ன் வகைக் கெழு எனக் கூறி, $f^1(x)$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.

குறிப்பு : $f'(x)$ என்ற சார்பலனுக்கு $x = c$-ல் மதிப்பு $f'(c)$ ஆகும்.

§ 3-1·2. வகைக்கெழுவும், வகையீடும்

$y = f(x)$ என்ற வகையிடத்தக்க சார்பலனைக் கருதுக. x என்பது சார்பலன் வரையறை செய்யப்படும் அரங்கத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியெனில் $f^1(x)$ என்பது வகைக்கெழுவைக் குறிக்கும்.

Δx என்பது தனித்த மாறியில் கூடுந்தொகை என்க. $f^1(x)$ Δx என்பதைச் சார்ந்த மாறியின் வகையீடு (differential) எனக் கூறி dy என்ற குறியீட்டால் வழங்குகிறோம். அதாவது $dy = f^1(x)\,\Delta x$.

இனி தனித்த மாறியான x-க்கு வகையீடு என்பதற்குப் பொருள் தருவோம். இதற்காக x ஐ y ஆக ஒன்றித்து $y = x$ என எழுதுவோம். அதாவது $\phi(x)$ $\phi(x) = x = x$ எனுமாறு $\phi(x)$ என்ற சார்பலனைக் கருதினால் $dx = dy = \phi'(x)\,\Delta x = 1.\Delta x$ எனவே, $dx = \Delta x$.

அதாவது, x என்ற தனித்த மாறியின் வகையீடான dx, Δx என்ற கூடுந் தொகைக்கும் சமம். எனவே,

$$dy = f'(x)\ \Delta x = f'(x)\, dx.$$

அதாவது $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$

எனவே $f'(x)$ என்ற வகைக்கெழுவை dy. dx என்ற வகையீடுகளின் விகிதமாகக் குறிப்பிடலாம்.

Δx என்ற x-ன் கூடுந்தொகைக் கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை Δy என்க.

$$y = f(x)$$

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

எனவே $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

ஆகவே $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

ஆகவே $\underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

அதாவது $f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

அதாவது $\boxed{\dfrac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$

குறிப்பு 1 : இந்தக் குறியீட்டில் $x = c$-ல் y-ன் வகைக்கெழு $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x = c}$ எனக் குறிப்பிடப்படும்.

குறிப்பு 2 : $f'(x)$ என்ற வகைக்கெழுவும், $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதும் ஒன்றே ஆதலால் வகைக்கெழுவை வகையீட்டுக்கெழு (differential coefficient) எனக் கூறுகிறோம். ஏனெனில் $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதை இருவகையீடுகளின் விகிதமாகக் கருதுவது, $dy = f'(x)\, dx$ என்று நாம் முன்பு கூறிய சமன்பாட்டால் சாத்தியமாகிறது.

§ 3-1·3. தேற்றம் : ஒரு சார்பலனுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளியில் வகைக்கெழு உளதாயின், அது அப்புள்ளியில் தொடர்ச்சி உடையதாகும்.

நிறுவல் : $x = c$-ல் $f(x)$ வகையிடத்தக்கது என்க.

எனவே,

$$\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c)$$

ஆகவே, $f(c+h) - f(c) = \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h} \times h$

$$\therefore \quad \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \left\{ f(c+h) - f(c) \right\} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \times \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}}\, h$$

[இரு எல்லைகளும் உள்ளதால்]

$$= f'(c) \times \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}}\, h = 0$$

ஆகையால்,

$$\underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} f(c+h) = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} f(c) = f(c)$$

(அ·து) $\underset{x \to c}{\mathrm{Lt}} f(x) = f(c)$

(அ·து) $f(x)$, $x = c$-ல் தொடர்ச்சி உடையது.

குறிப்பு : மறுதலை உண்மையல்ல.

§ 3-1·4. வகையிடத்தக்க சார்புக்கு ஒரு வரையறை :

$f(x)$ என்ற சார்பலன் (a, b)-ல் வரையறை செய்யப்பட்டுள்ளது. (a, b)-ல் x ஒரு புள்ளி என்க.

(i) $f(x)$ ஆனது x-ல் வகையிடத்தக்கது என்றால் $f'(x)$ உளதாகும் என்பதை நினைவு கூர்க.

வேறு வகையாகவும் வகையிடத்தக்க சார்பலனை வரையறை செய்யலாம்.

(ii) $f(x)$ ஆனது x-ல் வகையிடத்தக்கது எனில்

$$\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$$
$$= A\triangle x + \epsilon \triangle x$$

இங்கே A ஆனது $\triangle x$ சாராமலும்; ϵ ஆனது $\triangle x$ சார்ந்து, $\triangle x \longrightarrow 0$ ஆகும்போது, பூச்சியத்தை அணுகும் வண்ணமும் அமைந்து இருக்கும்.

(ii) வரையறை, வகையீடைப் பயன்படுத்தி அமைந்துள்ளது. இது (i) வரையறைக்குச் சமமென நிறுவுவோம்; (ii) வரையறையிலிருந்து

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = A + \epsilon$$

ஆனால் $\triangle x \longrightarrow 0$ எனில்

$$f'(x) = A$$

அதாவது $f'(x)$ உளதாகும்; அதன் மதிப்பு A எனவே $f(x)$ ஆனது வரையறை (i)-ஐ நிறைவு செய்யும்.

இவ்வாறே (i) வரையறையிலிருந்தும், (ii) வரையறையைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$x = 1$-ல் x^3 வரையிடத்தக்கது என நிறுவி, $x = 1$-ல் x^3-ன் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

$f(x) = x^3$ ஆதலால் $f(1) = 1$.

எனவே x ஆனது 1 லிருந்து $1 + h$ மாற சார்பலனில் மாற்றம் காண்போம்.

$$f(1 + h) - f(1) = (1 + h)^3 - 1 = 3h + 3h^2 + h^3.$$

(அது) $$\frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \frac{3h + 3h^2 + h^3}{h}$$
$$= 3 + 3h + h^2. \ (h \neq 0 \text{ ஆதலால்})$$

எனவே $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = 3.$

அது $f'(1) = 3.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x = 0$ எனில் $f(x) = 0$

$x \neq 0$ எனில் $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$.

என வரையறை செய்யப்பட்டுள்ள சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என்றாலும் வகையிடத்தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

தீர்வு : முதலில் $x = 0$-ல் சார்பலனின் தொடர்ச்சி பற்றி ஆராய்வோம்.

$$f(x) - f(0) = x \sin \frac{1}{x} - 0 = x \sin \frac{1}{x}.$$

எனவே $|f(x) - f(0)| = |x \sin \dfrac{1}{x}|$

$$= |x| \, |\sin \frac{1}{x}| \leq |x|$$

ϵ என்ற மிகை எண் தரப்பட்டால்

$|x - 0| \leq \epsilon$ எனில் $|f(x) - f(0)| < \epsilon$

எனவே $x = 0$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

ஆனால் $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \dfrac{1}{x}$

$x \to 0$ எனும் போது Lt $\sin \dfrac{1}{x}$ இல்லை.

எனவே $x = 0$-ல் $f(x)$ வகையிடத் தக்கது அல்ல.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$f(x) = |x|$ என்ற சார்பலனுக்கு $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி பற்றியும் வகையிடத் தக்கதா என்பது பற்றியும் ஆராய்க.

தீர்வு :

$x = 0$-ல் தொடர்ச்சிபற்றி முதலில் ஆராய்வோம்.

ϵ என்பது மிகை எண்; இது முன் கூட்டியே தரப்பட்டால் $|x - 0| < \epsilon$ எனில் $|f(x) - f(0)| = |x| - 0| = |x| < \epsilon$ அதாவது ϵ தரப்பட்டால், $\delta = \epsilon$ ஒன்று பின் வருமாறு காண முடிகிறது. $|x-0| < \delta$ எனில் $|f(x) - f(0)| < \epsilon$ எனவே $x = 0$-ல் $f(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

$x = 0$-ல் வகையிடத்தக்கதா எனக் காண்போம்.

$$\underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{|x| - 0}{x - 0}$$

$$= \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{|x|}{x} = \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{-x}{x} = -1$$

ஆனால் $\underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \underset{x \to 0+0}{\mathrm{Lt}} \frac{|x|}{x}$

$$= \underset{x \to 0-0}{\mathrm{Lt}} \frac{x}{x} = 1.$$

இவை இரண்டும் வேறுபட்டன ஆதலால்

$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x) - f(0)}{x \to 0}$ உளதாகவில்லை.

எனவே $x = 0$-ல் $f(x)$ வகையிடத்தக்கது அல்ல.

பயிற்சிகள் 3 (A)

1. $x = 1$-ல் x^2 வகையிடத்தக்கது என நிறுவி வகைக்கெழு 2 என நிறுவுக.

2. பின்வரும் சார்பலன்களுக்கு குறிப்பிடப்பட்ட புள்ளி களில் தொடர்ச்சி பற்றியும் வகையிடத்தக்கதா என்பது பற்றியும் ஆய்வு செய்யவும்.

(a) $f(x) = (x-a) \sin\frac{1}{x-a}$ $\quad x \neq a$ எனில்;

$= 0$ $\quad x = a$ எனில்.

$x = a$ என்ற புள்ளி

(b) $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ $\quad x \neq 0$ எனில்;

$= 0$ $\quad x = 0$ எனில்.

$x = 0$ என்ற புள்ளி

(c) $f(x) = 1 + x$ $\quad x \leq 2$ எனில்;

$= 5 - x$ $\quad x \geq 2$ எனில்.

$x = 2$ என்ற புள்ளி.

3. $x = 0$-ல் $f(x) = 0$ எனவும், $x \neq 0$ எனில் $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ எனவும் வரையறை உள்ள சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது என்றும், வகையிடத்தக்கது என்றும் நிறுவுக. ஆனல் சார்பலனின் வகையீடு அப்புள்ளியில் தொடர்ச்சியற்றது என்றும் நிறுவுக.

4. f என்ற சார்பலன் பின் வருமாறு வரையறை செய்யப் பட்டுள்ளது.

$f(x) = |x + 1| + |x|$ $\quad$ எல்லா $x \in R$.

இச்சார்பலன் $x = -1$, 0-ல் தொடர்ச்சி உடையது எனினும் வகையிடத் தக்கது அன்று என நிறுவுக.

5. $x \neq 0$ எனில் $f(x) = x\{1 + \frac{1}{3}\sin(\log x^2)\}$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 0$.

என்ற வரையறை உடைய சார்பலன் $x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையது எனினும் வகையிடத் தக்கது அல்ல என நிறுவுக.

6. $x \neq 0$ எனில் $f(x) = x^m \sin \frac{1}{x}$ $\quad (m > 0)$

$x = 0$ எனில் $f(x) = 0$

எனும் வரையறை உடைய சார்பலனுக்கு $x = a$-ல் வகையிடத் தக்க அமைப்பு உண்டா என ஆராய்க. ஆதியில் $f'(x)$ தொடர்ச்சி உடையதாக இருக்குமாறு m காண்க.

7. $x \leq 0$ எனில் $f(x) = -x^2$

$0 \leq x \leq 1$ எனில் $f(x) = 5x - 4$

$1 < x < 2$ எனில் $f(x) = 4x^2 - 3x$

$x \geqslant 2$ எனில் $f(x) = 3x + 4$

என வரையறை உள்ள சார்பலன்.

$x = 0$-ல் தொடர்ச்சி உடையதல்ல; வகையிடத்தக்கது அல்ல என்றும்

$x = 1$-ல் வகையிடத்தக்கது தொடர்ச்சி உடையது என்றும்

$x = 2$-ல் தொடர்ச்சி உடையதெனினும் வகையிடத்தக்கது அல்ல என்றும் நிறுவுக.

விடைகள் 3 (A)

2. (a), (b), (c) தொடர்ச்சி உண்டு: வகையிடத்தக்கது அல்ல.

6. m இரட்டைப்படையாக, > 2 ஆக இருப்பின்.

§ 3-2·0. வகைக்கெழு காண செயல் முறை விதி

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன் தரப்பட்டுள்ளது. வகைக்கெழு காணும் முறையே நினைவு கூர்வோம்.

(1) x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ என்க. அதற்கு இயைந்த y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$.

(2) $\triangle y = f(x + \triangle x) - f(x)$

(3) $\dfrac{\triangle y}{\triangle x} = \dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}$

(4) $\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்,

$$\underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\mathrm{L}t} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \text{ காண்க;}$$

இதுவே $\dfrac{dy}{dx}$ ஆகும்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனுக்கு வரையறையைப் பயன்படுத்தி (மேற்கண்ட செயல் முறையைக் கையாண்டு) வகைக்கெழு காணும் முறை அடுத்து வரும் பகுதிகளில் காண்க.

§ 3-2·11. மாறிலியின் வகைக்கெழு

$y = c$ (1) எனத் தரப்பட்டுள்ளது; இங்கே c மாறிலி

c மாறிலியாதலால்

$y + \triangle y = c$ (2)

எனவே $\triangle y = 0$ (2) — (1)

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = 0$$

$\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் $\frac{dv}{dx} = 0$

அதாவது மாறிலியின் வகைக்கெழு

பூச்சியமாம் $\boxed{\frac{d}{dx}(c) = 0.}$

§ 3-2·12. x^n-ன் வகைக்கெழு ; n மெய் எண், மாறிலி

$$y = x^n \qquad (2)$$

என எடுத்துக் கொள்க.

$\triangle x$ என்ற x-ன் கூடுந்தொகைக்கு ஏற்ப $\triangle y$ என்பது y-ன் கூடுந்தொகை என்க.

$$\therefore y + \triangle y = (x + \triangle x)^n \qquad (1)$$

$$(2) - (1); \quad \triangle y = (x + \triangle x)^n - x^n$$

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^n - x^n}{\triangle x} = \frac{(x + \triangle x)^n - x^n}{(x + \triangle x) - x}$$

எனவே $\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(x + \triangle x)^n - x^n}{(x + \triangle x)^n - x}$$

$$= \underset{x + \triangle x \longrightarrow x}{\mathrm{Lt}} \frac{(x + \triangle x)^n - x^n}{(x + \triangle x) - x}$$

$$= n\, x^{n-1}$$

எனவே n மெய் எண்ணுக (மிகையாகவோ குறையாகவோ, விகித முறு எண்ணுகவோ விகிதமுரு எண்ணுகவோ) இருக்கையில்

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$\sqrt{x}$-ன் வகைக் கெழுவைக் காண்க. $x = 0$-ல் அதன் மதிப் பென்ன ?

தீர்வு : $f(x) = \sqrt{x}$ என்க.

$$f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}]\,[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}{h \cdot [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{x + h - x}{h\,[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad (h \neq 0 \text{ எனில்})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

இதிலிருந்து $f'(0)$ காண முயன்றால் $\frac{1}{0}$ என்ற பொருளற்ற முடிவு கிடைக்கும். எனவே இதனைத் தனியாகக் காணவேண்டும்.

$$f'(0) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{h} - 0}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{h}}$$

ஆனால் $\underset{h \to 0+0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty$; $\underset{h \to 0-0}{\text{Lt}} \frac{1}{\sqrt{h}}$

உளதாகவில்லை; ஏனெனில் $h < 0$ எனில் $\sqrt{h}$ வரையறை செய்யப் படவில்லை.

எனவே $f'(0)$ உளதாகவில்லை.

§ 3-2·13. e^x-ன் வகைக்கெழு

$$y = e^x \qquad \dots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை Δx எனில் அதற்கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை Δy என்க.

$$\therefore \quad y + \Delta y = e^{x + \Delta x} \qquad \dots (2)$$

$$(2) - (1); \quad \Delta y = e^{x + \Delta x} - e^x$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x}$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^x (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\Delta e^x \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= e^x . \log_e e = e^x . 1 = e^x .$$

எனவே $\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$

§ 3-2·14. a^x-ன் வகைக்கெழு

முன்பகுதி போல் வழி முறையினல்

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$= a^x . \underset{\Delta x \to 0}{Lt} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$= a^x . \log_e a$$

எனவே $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a}$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$e^{\sqrt{x}}$-ன் வகைக்கெழுவை காண்க.

தீர்வு : $y = e^{\sqrt{x}}$ . ... (1)

x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$-க்கு ஏற்ப y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$y + \triangle y = e^{\sqrt{x + \triangle x}} . \qquad \ldots (2)$$

$$\triangle y = e^{\sqrt{x + \triangle x}} - e^{\sqrt{x}}$$

$$= e^{\sqrt{x}}\left[e^{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} - 1\right]$$

$$= e^{\sqrt{x}} \frac{\left[e^{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} - 1\right]}{[\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}]} \frac{[\triangle x]}{[\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x}]}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{e^{\sqrt{x}}\left[e^{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} - 1\right]}{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x}}$$

$\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}$$

$$e^{\sqrt{x}} \longrightarrow e^{\sqrt{x}}$$

$$\frac{e^{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} - 1}{\sqrt{x + \triangle x} - \sqrt{x}} \longrightarrow \log e = 1$$

(ஏனெனில் $\underset{x \longrightarrow 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{a^x - 1}{x} = \log a \; ; \quad a > 0)$

$$\frac{1}{\sqrt{x + \triangle x} + \sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

எனவே

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$$

§ 3-2·15. $\log_e x$ -ன் வகைக் கெழு :

$$y = \log_e x \qquad \dots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில் அதற்கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$\therefore \quad y + \triangle y = \log_e (x + \triangle x) \qquad \dots (2)$$

$(2) - (1) \qquad \triangle y = \log_e (x + \triangle x) - \log_e x$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log_e (x + \triangle x) - \log_e x}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log\left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)}{\triangle x}$$

$\frac{\triangle x}{x}$ h-க்கு பதிலாக h-ஐ பிரதியிட,

$\triangle x \to 0$ (அது) $h \to 0$ என்ற எல்லையில்

$$\frac{dy}{dx} = \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log(1 + h)}{xh}$$

$$= \frac{1}{x} \underset{h \to 0}{\mathrm{Lt}} \log_e (1 + h)^{1/h}$$

$$= \frac{1}{x} \log_e e = \frac{1}{x}.$$

எனவே,

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$y = \log_a x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ என்ன ?

தீர்வு : $y = \log_a x$ ... *(1)*

x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$-க்கு ஏற்ப, y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$y + \triangle y = \log_a x = \triangle x) \qquad \ldots (2)$$

$$(2) - (1) ; \quad \triangle y = \log_a (x + \triangle x) - \log_e x$$

$$\therefore \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\triangle x} \cdot \left[\log_a \left(\frac{x + \triangle x}{x}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\triangle x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{x/\triangle x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

$$= \frac{1}{x} \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \log_a \left(1 + \frac{\triangle x}{x}\right)^{x/\triangle x}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_a e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\log_a x\right) = \frac{1}{x}\log_a e.$$

§ 3·2·21. $\sin x$-ன் வகைக்கெழு

$$y = \sin x \qquad \ldots\ldots (1)$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில் அதற்கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$\therefore y + \triangle y = \sin (x + \triangle x) \qquad \ldots\ldots(2)$$

$$(2) - (1) : \quad \triangle y = \sin (x + \triangle x) + \sin x$$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\sin (x + \triangle x) - \sin x}{\triangle x .}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin \frac{\triangle x}{2} \cdot \cos \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \cdot \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \cos\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$$

$= 1 \cdot \cos x$ (ஆரையனில் x அளக்கப் பட்டால்)

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x .}$$

§ 3-2·22. $\cos x$-ன் வகைக்கெழு

$y = \cos x$ ... (1)

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில் அதற் கேற்ப y-ல் கூடுந்தொகை Δy என்க.

$\therefore y + \Delta y = \cos(x + \triangle x)$ ... (2)

(2) — (1) ; $\Delta y = \cos(x + \triangle x) - \cos x.$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\cos(x + \triangle x) - \cos x}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{2 \sin \frac{\triangle x}{2} \cdot \sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\triangle x}$$

$$= - \underset{x \to 0}{Lt} \frac{\sin \frac{\triangle x}{2}}{\frac{\triangle x}{2}} \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \sin\left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)$$

$= - 1 \times \sin x$, (x, ஆரையன் அளவில் இருந்தால்)

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = - \sin x}$$

§ 3-2·23. tan x-ன் வகைக் கெழு

$$y = \tan x \qquad \ldots(1)$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில் அதற்கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$y + \triangle y = \tan(x + \triangle x) \qquad \ldots(2)$$

$(2) - (1):\quad \triangle y = \tan(x + \triangle x) - \tan x$

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\tan(x + \triangle x) - \tan x}{\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin(x+\triangle x)\cos x - \sin x.\cos(x+\triangle x)}{\cos(x+\triangle x)\cos x.\triangle x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin x}{\triangle x}.\frac{1}{\cos(x+\triangle x)}.\frac{1}{\cos x}$$

$$= \underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{\sin \triangle x}{\triangle x}.\underset{\triangle x \to 0}{Lt} \frac{1}{\cos(x+\triangle x)}.\frac{1}{\cos x}$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x}.\frac{1}{\cos x}$$

$= \sec^e x.$ (x ஆரையனில் அளக்கப்பட்டால்)

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$$

குறிப்பு : மேற்கண்டவாறே வகை எழுதி

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

என நிறுவலாம்.

§ 3-2.24 sec x-ன் வகைக்கெழு

$$y = \sec x \qquad \ldots\ldots(1)$$

எனத் தரப்பட்டுள்ளது. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில் அதற்கேற்ப y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$y + \triangle y = \sec (x + \triangle x) \quad \ldots (2)$$

(2) − (1) : $\triangle y = \sec (x + \triangle x) - \sec x$

$$= \frac{1}{\cos (x + \triangle x)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos (x + \triangle x)}{\cos x . \cos (x + \triangle x)}$$

$$= \frac{2 \sin \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right) . \sin \frac{\triangle x}{2}}{\cos (x + \triangle x) . \cos x}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sin \left(x + \frac{\triangle x}{2}\right)}{\cos (x + \triangle x) \cos x} \cdot \frac{\sin \left(\frac{\triangle x}{2}\right)}{\frac{\triangle x}{2}}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x .$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx} (\sec x) = \sec x \tan x .}$$

குறிப்பு : மேற்கண்டவாறே

$$\frac{d}{dx} (\operatorname{cosec} x) = - \operatorname{cosec} x \cot x$$

என நிறுவலாம்.

§ 3-2·25. $\sin^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$$y = \sin^{-1} x \quad \ldots (1)$$

என்க. [$-\pi/2, \pi/2$ இடையே sine மதிப்பு x ஆக இருக்குமாறு உள்ள எண்ணே $\sin^{-1} x$ என வரையறை செய்க]

$$x = \sin y \quad \ldots (2)$$

y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$, x-ன் கூடுந்தொகையான $\triangle x$-க்கு இயைந்தது.

$\therefore \quad x + \triangle x = \sin(y + \triangle y)$ ... (3)

(3) − (2) $\triangle x = \sin(y + \triangle y) - \sin y$

$$= 2\cos\left(y + \frac{\triangle y}{2}\right)\sin\frac{\triangle y}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle y}{2\cos\left(y + \frac{\triangle y}{2}\right)\sin\frac{\triangle y}{2}}$$

$$\underset{\triangle x \to 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{\triangle y \to 0}{\mathrm{L}t}\ \frac{1}{\cos\left(y + \frac{\triangle y}{2}\right)}\ \frac{1}{\frac{\sin\frac{\triangle y}{2}}{\frac{\triangle y}{2}}}$$

$$= \frac{1}{\cos y} \cdot 1$$

எனவே $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \pm \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

cos y-ன் குறியீட்டுக்கு ஏற்ப + அல்லது − குறியீடு தீர்மான மாக வேண்டும்.

$y = \sin^{-1} x$ என்பது $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ இடை அமைவது; அதாவது $-\frac{\pi}{2} \leq \sin^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ $\therefore -\frac{\pi}{2} \leq : \leq \frac{\pi}{2}$ அதாவது $\cos y \geqslant 0$ எனவே வர்க்க மூலம்

மிகைக் குறியுடன் எடுக்கப்படலாம்.

$$\frac{dx}{ay} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

குறிப்பு :

பின்வரும் முடிவுகளையும் இதே போன்ற முறையினுல் நிறுவலாம். நிறுவல் மாணவர்க்கு பயிற்சியாக விடப்படுகிறது.

$$\frac{d}{dx}\left(\cos^{-1}x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{\lambda}\left(\tan^{-1}x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right) = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\text{cosec}^{-1}x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$\sin x^2$-ன் வகைக்கெழுவை வரையறைபடிக் காண்க.

தீர்வு : $y = \sin x^2$ ......(1)

என்க. x-ன் கூடுந்தொகை Δx க்கு ஏற்ப y-ன் கூடுந்தொகை Δy என்றல்

$y + \Delta y = \sin (x + \Delta x)^2$ ... (2)

(2)—(1) : $\Delta y = \sin (x + \Delta x)^2 - \sin x^2$

$$= 2\cos\left\{\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right\}\sin\left\{\frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{2}\right\}$$

$$= 2\cos\left\{\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right\}\sin\left\{\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{2}\right\}$$

எனவே

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\cdot 2\cos\left[\frac{(x+\Delta x)^2 + x^2}{2}\right]\sin\left[\frac{2x\Delta x + (\Delta)^2}{2}\right]$$

$$\left[\frac{2x\Delta x + (\Delta x)}{2}\right]$$

$$\times\left[\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{2}\right]$$

எனவே $\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்

$$2\cos\left[\frac{(x+\triangle x)^2+x^2}{2}\right] \longrightarrow 2\cos x^2$$

$$\frac{\sin\left[\frac{(2x\,\triangle x+(\triangle x)^2}{2}\right]}{\left[\frac{2x\,\triangle x+(\triangle x)^2}{2}\right]} \longrightarrow 1$$

$$\frac{2x\,\triangle x+(\triangle x)^2}{2\,\triangle x} \longrightarrow x; \quad \text{எனவே } \frac{dy}{dx} = 2x\cos x^2$$

பயிற்சிகள் 3 (B)

வரையறையைப் பயன்படுத்தி வகையீடு காண்க.

1. (a) $\frac{x+3}{x^2+3}$ (b) $1/2\sqrt{x}$ (c) $a\sqrt{x}$ (d) $\sqrt{1+x^2}$

2. (a) $x\sin x$ (b) $\sqrt{\sin x}$ (c) $\sin 3x$

3. (a) $e^{\tan x}$ (b) $e^{\sin x}$ (c) e^{mx}

4. (a) 10^x (b) $(1+b)^x$

விடைகள் 3 (B)

1. (a) $\frac{3-4x-x^2}{x^2+3}$ (b) $-\frac{1}{4x^{3/2}}$ (c) $\frac{a}{2\sqrt{x}}$

   (d) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   (a) $\sin x + x\cos x$ (b) $\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$

   (c) $3\cos 3x$

3. (a) $\sec^2 x\, e^{\tan x}$ (b) $\cos x\, e^{\sin x}$ (c) $m\, e^{mx}$

4. (a) $10^x \log_e 10$ (b) $(1+b)^x \log_e(1+b)$

§ 3.2·30 கூட்டுப்பலனின் வகைக்கெழு

u, v என்பன x-ன் சார்பலன்களாக $y = u + v$ ... (1)
என்க.

x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ என்க. அதற்கேற்ப u, v-ல் கூடுந்தொகை $\triangle u$, $\triangle v$ என்க; இதன் பயனாக y-ல் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க.

$$y + \triangle y = (u + \triangle u) + (v + \triangle v). \quad \ldots (2)$$

$$(2)-(1);\ \triangle y = \triangle u + \triangle v$$

$$\therefore\ \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{\triangle u}{\triangle x} + \frac{\triangle v}{\triangle x}$$

$\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dy}{dx};\quad \frac{\triangle u}{\triangle x} \longrightarrow \frac{du}{dx};\quad \frac{\triangle v}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dv}{dx}$$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}}$$

எனவே, கூட்டுப்பலனின் வகைக்கெழு. **வகைக்கெழுக்களின் கூட்டுப்பலனாகும்.**

கிளை 1. $y = u - v$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx}$$

கிளை 2. $y = u_1 \neq u_2 \neq \ldots \neq u_n$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} \pm \frac{du_2}{du} \pm \cdots \pm \frac{du_n}{dx}.$$

எடுத்துக்காட்டாக

(i) $\frac{d}{dx}(x^2 + x^5)$

$$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x^5)$$

$$= 2x + 5x^4$$

(ii) $\frac{d}{dx}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{d}{dx}(x^2) - \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x + \frac{2}{x^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 8:

$$y = (1 + b)^x + x^{1+b}$$

எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு: $y = (1 + b)^x + x^{1+b}$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[(1 + b)^x] + \frac{d}{dx}[x^{1+b}]$$

$$= (1 + b)^x . \log (1 + b)$$

$$+ (1 + b)\, x^b.$$

பயிற்சிகள் 3 C

$\frac{dy}{dx}$ காண்க.

1. $3x^2 - 8x - 4$
2. $x^{1/2} + 2x + 3x^{3/2} + 4x^2 + 5x^{5/2}$
3. $px^2 + qx + r$
4. $9x^{-2/3} + 3x^{1/2} + 7$
5. $(4x - 5)^2$
6. $mx^n + nx^m$
7. $e^{1+x} + \log_e x - 6 \tan x + 7 \sec x$
8. $(x^2 - 4)(x^4 + 3)$.

9. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

10. $\log_a x + a \log x$.

விடைகள் 3 (C)

1. $6x - 8$

2. $\frac{1}{2} x^{-1/2} + 2 + \frac{9}{2} x^{1/2} + 8x + \frac{25}{2} x^{3/2}$

3. $2px + q$

4. $-6x^{-5/3} + \frac{3}{2} x^{-1/2}$

5. $32x - 40$

6. $mn(x^{n-1} + x^{m-1})$

7. $e^{1+x} + \frac{1}{x} \log_a e - 6 \sec^2 x + 7 \sec x \tan x$

8. $2x(3x^4 - 8x^2 + 3)$

9. $\dfrac{4x - 6}{x^3}$

10. $\frac{1}{x} \log_a e + \frac{a}{x}$

§ 3-2·31 பெருக்கத்தின் வகைக்கெழு

u, v என்பன x-ன் சார்புகளாக இருக்கும்போது

$$y = u \cdot v. \qquad \ldots\ldots (1)$$

x-ன் கூடுந்தொகை Δx ஆக u-ல் Δu கூடுந்தொகையும் v-ல் Δv என்க. கூடுந்தொகையும் அதனால் y-ல் Δy கூடுந்தொகையும் நேர்கிறது என்க. அவ்விதமாயின்

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) \cdot (v + \Delta v)$$

$$= uv + u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v \qquad (2)$$

(2)—(1) : $\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta v\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$\Delta x \longrightarrow 0$ எல்லையில்

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \longrightarrow \frac{dv}{dx}, \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \longrightarrow \frac{du}{dx}, \quad \Delta v \longrightarrow 0$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$$

கிளை 1 : $x = u, v, w$ எனில் $\frac{dy}{dx} = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$

$y = cu$ (c மாறிலி) எனில்

கிளை 2 : $\frac{dy}{dx} = c\frac{du}{dx} + u\frac{dc}{dx} = c\frac{du}{dx} + u \cdot 0 = c\frac{du}{dx}$

$y = uv$ எனில்

கிளை 3 : $\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$

எனும் முடிவை

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} + \frac{1}{v}\frac{dv}{dx}$$

என எழுதலாம்.

பொதுவாக $y = u_1 u_2 \ldots\ldots u_n$ எனில்

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u_1}\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{u_2}\frac{du_2}{dx} + \ldots + \frac{1}{u_n}\frac{du_n}{dx}$$

என நிறுவலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$y = x^2 \log x$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

தீர்வு : $\frac{d}{dx}[x^2 \log x]$

$$= x^2\frac{d}{dx}(\log x) + \log x\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= x^2 \frac{1}{x} + (\log x)(2x)$$

$$= x + 2x \log x$$

பயிற்சிகள் 3 (D)

x ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழுக்கள் காண்க.

1. $x \cos x$
2. $x^2 (\cos x + \sin x)$
3. $\sin x \cos x$
4. $e^x x^2$
5. $e^x \sin x$
6. $(\tan^{-1} x)/(1 + x^2)$
7. $\sqrt{x} \cos x$
8. $7x^2 \sin x$
9. $x^2 \operatorname{cosec} x$
10. $a^x \sin x$
11. $a^x \log x$
12. $a^x \log_a x$
13. $x (x + 3) (x^2 + 7)$
14. $x e^x \sin x$
15. $\sin x/x$
16. $\cos x/x^2$

விடைகள் 3 (D)

1. $-x \sin x + \cos x$
2. $x^2 (\cos x - \sin x) + 2x (\sin x + \cos x)$
3. $\cos 2 x$
4. $e^x (x^2 + 2x)$
5. $e^x (\sin x + \cos x)$
6. $\dfrac{1 - 2x \tan^{-1} x}{(1+x^2)^2}$
7. $\dfrac{\cos x - 2 x \sin x}{\sqrt{2x}}$
8. $14 \sin x + 7x^2 \cos x$
9. $-x^2 \operatorname{cosec} x \cot x + 2 x \operatorname{cosec} x$
10. $a^x \cos x + a^x \sin x \log a$
11. $a^x \log a \log x + a^x/x$
12. $a^x \left[\log_a^x \log_a a + \dfrac{\log_a x}{x}\right]$
13. $4x^3 + 9x^2 + 14x + 21$
14. $e^x (\sin x + x \sin x + x \cos x)$
15. $\dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
16. $-\dfrac{x \sin x + 2 \cos x}{x^3}$.

§ 3-2·32. ஈவின் வகைக்கெழு

u, v என்பன *x*-ன் சார்புகளாக

$$y = \frac{u}{x} \qquad \dots \quad (1)$$

என்க, *x*-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$; இதனால், முறையே *u, v, y*-ன் கூடுந்தொகைகள் $\triangle u$, $\triangle v$, $\triangle y$ என்க.

$$\therefore \quad y + \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} \qquad \dots \quad (2)$$

$$(2) - (1). \quad \triangle y = \frac{u + \triangle u}{v + \triangle v} - \frac{u}{v}$$

$$= \frac{vu + v\triangle u - vv - u\triangle v}{v(+\triangle v)}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{v\left(\frac{\triangle u}{\triangle x}\right) - u\left(\frac{\triangle v}{\triangle y}\right)}{v(v + \triangle v)}$$

$\triangle \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்

$\triangle v \longrightarrow 0$ அதனால் $v + \triangle v \longrightarrow v$

மற்றும்

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}; \quad \frac{\triangle u}{\triangle x} \longrightarrow \frac{du}{dx}; \quad \frac{\triangle v}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dv}{dx}.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}}$$

இதனையே வேறுவிதமாகவும் கூறலாம் :

$y = \frac{Nr.}{Dr.}$ எனில் $\frac{dy}{dx}$

$= \dfrac{Dr.\,[Nr.\text{-ன் வகைக்கெழு}] - Nr.\,[Dr.\text{-ன் வகைக்கெழு}]}{[Dr^2]}$

எடுத்துக்காட்டாக $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{\log x}\right)$

$$= \frac{\log x \frac{d}{dx}(x^2) - x^2 \frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2} = \frac{2x \log x - x}{(\log x)^2}$$

குறிப்பு : (i) tan x-ன் வகைக்கெழு

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \sec^2 x.$$

$$\therefore \boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x.}$$

(ii) cot x-ன் வகைக்கெழு :

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{x}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \times (-\sin x) - \cos x \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= -\operatorname{cosec}^2 x.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$$

(iii) sec x-ன் வகைக்கெழு :

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(1) - 1 \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos . x \times 0 - 1(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \tan x . \sec x.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x}$$

(iv) cosec x-ன் வகைக்கெழு :

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(1) - 1 \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\sin x \times 0 - 1 \times \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= -\cot x . \operatorname{cosec} x.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\cot x \ \operatorname{cosec} x .}$$

குறிப்பு 2: அதிபரவளைவுச் சார்புகளின் (hyperbolic functions) வகையீட்டுக்கெழு காண முயல்வோம்.

அதிபரவளைவுச் சார்புகள் பற்றி பின்வரும் வாய்ப்பாடுகளை நினைவு கூர்க.

$$\sin h\, x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$$\cos h\, x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$$\tan h\, x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

இம் மூன்றின் தலைகீழ் பின்னங்கள் முறையே cosec h x, sec h x, cot h x, ஆகும் மேலும்,

$$\cos h^{2} x - \sin h^{2} x = 1.$$

இனி வகைக்கெழுக்கள் காண்போம்.

(i) sin h x-ன் வகைக்கெழு :

$$y = \sinh x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^{x} - e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(e^{x} + e^{-x})$$

$$= \cos h\, x.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x}$$

(ii) cosh x-ன் வகைக்கெழு :

$$y = \cosh x.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dy}\left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(e^{x} - e^{x})$$

$$= \sinh x.$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x$$

(iii) tanh x-ன் வகைக்கெழு :

$y = \tan hx$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin hx}{\cos hx}\right)$$

$$= \frac{\cos h\, x \cdot \frac{d}{dx}(\sin h\, x) - \sin h\, x \cdot \frac{d}{dx}(\cos h\, x}{\cos h^2\, x}$$

$$= \frac{\cos h\, x \cdot \cos h\, x - \sin h\, x \cdot \sin h\, x.}{\cos h^2\, x}$$

$$= \frac{\cos h^2\, x - \sin h^2\, x}{\cos h^2\, x}$$

$= \sec h^2\, x.$

எனவே $\frac{a}{dx}(\tan h^2 x) = \sec h^2\, x.$

இவ்வாறாகவே,

$\frac{d}{dx}(\cot h\, x) = -\operatorname{cosec} h^2\, x$ எனவும்,

$\frac{d}{dx}(\sec h\, x = -\frac{\sin h\, x}{\cos h^2 x}$ எனவும்,

$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} h) = -\frac{\cosh\, x}{\sin h^2\, x}$ எனவே,

நிறுவலாம்.

பயிற்சிகள் 3 (E)

x-ஐப் பொறுத்து வகையிடல் செய்க :

1. $\frac{x^2}{\log x}$

2. $\frac{x^n}{\sin x}$

3. $\frac{8x}{x^2 + 1}$

4. $\frac{x}{1 + \sqrt{x}}$

5. $\frac{a + bx}{\cos x}$

6. $\frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$

7. $\frac{1 + \sin x}{\cos x}$

8. $\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}$

9. $\frac{3 + 4 \sin x}{4 + 3 \cos x}$

10. $\frac{e^x + \sec x}{\operatorname{cosec} x}$

11. $\frac{\operatorname{cosec} x}{\log x}$

12. $\frac{x}{1 + y}$

13. $\frac{1 + x}{y}$

14. $\frac{(x - 1)(x - 2)}{(x + 1)(x + 2)}$

விடைகள் 3 (E)

1. $\frac{2x \log x - x}{(\log x)^2}$

2. $\frac{n x^{n-1} \sin x - x^n \cos x}{\sin^2 x}$

3. $\frac{8(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

4. $\frac{2 + \sqrt{x}}{2(1 + \sqrt{x})^2}$

5. $\frac{b \cos x + (a + bx) \sin x}{\cos^2 x}$

6. $\frac{2}{1 - \sin 2x}$

7. $\frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

8. $\dfrac{\frac{1}{2}x^{-1/2}\cdot(a^{1/2}-x^{1/2})+(a^{1/2}+x^{1/2})+(\frac{1}{2}x^{-1/2})}{(a^{1/2}-x^{1/2})^2}$

9. $\dfrac{7\cos x}{(4+3\sin x)^2}$

10. $\dfrac{\operatorname{cosec} x\,.\,(e^x+\sec x\tan x)+\operatorname{cosec} x\cot x\,(e^x+\sec x)}{\operatorname{cosec}^2 x}$

11. $\dfrac{-\log x\operatorname{cosec} x\cot x+\frac{1}{x}\operatorname{cosec} x}{(\log x)^2}$

12. $\dfrac{(1+y)-x\frac{dy}{dx}}{(1+y)^2}$

13. $\dfrac{y-(1+x)\frac{dy}{dx}}{y^2}$

14. $\dfrac{6(x^2-2)}{(x+1)^2(x+2)^2}$

§ 3-2·33. சார்பின் சார்புக்கு வகைக்கெழு (சங்கிலி விதி)

$u=\phi(u)$ ஆக அமைய, $y=f(u)$ என்க. x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ எனில், u-ன் கூடுந்தொகை $\triangle u$ என்க. அதனால் y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க. இயற்கணிதத்தால்,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}=\frac{\triangle y}{\triangle u}\cdot\frac{\triangle u}{\triangle x}$$

எல்லையில் $\triangle x\longrightarrow 0$, $\triangle u\longrightarrow 0$ அதனால்,

$$\frac{\triangle y}{\triangle x}\longrightarrow\frac{dy}{dx};\quad\frac{\triangle y}{\triangle u}\longrightarrow\frac{dy}{du};\quad\frac{\triangle u}{\triangle x}\longrightarrow\frac{du}{dx}$$

$$\therefore\quad\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}}$$

கிளை 1 : x-ன் சார்பு v; v-ன் சார்பு u; u-ன் சார்பு y எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

எடுத்துக்காட்டாக, $y = \sin 3x^2$ எனில் $\frac{dy}{dx}$ காண்போம்.

$$y = \sin u \text{ ; இங்கே } u = 3v,\ v = x^2$$

$$\frac{dy}{du} = \cos u = \cos 3v = \cos 3x^2$$

$$\frac{du}{dv} = 3$$

$$\frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

$$= 6x \cos 3x^2.$$

கிளை 2 :

$$\boxed{\frac{d}{dx}(e^{mx}) = m \cdot e^{mx}}$$

நிறுவல் : $y = e^t$ இங்கே $t = mx$

$$\frac{dy}{dt} = e^t\ ; \quad \frac{dt}{dx} = m$$

எனவே $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = m\,e^t = m\,e^{mx}$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$\log\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right] + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}\right)\text{-ன்}$$

வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு :

$$u = \log\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right],$$

$$v = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{1 - x^2}\right)$$

என்றால் $y = u + v$.

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \cdot \left[\frac{(x^2-x+1)(2x+1) - (x^2+x+1)(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2}\right]$$

$$= \frac{[-2x^2 + 2]}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{1 + \frac{3x^2}{(1 - x^2)}} \times \frac{(1-x^2)\sqrt{3} - x\sqrt{3}(2-x)}{(1 - x^2)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}\,(1 + x^2)}{1 + x^2 + x^4} = \frac{2\,(1 + x^2)}{(1 + x^2 + x^4)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$= \frac{-2x^2 + 2}{x^4 + x^2 + 1} + \frac{2\,(1 + x^2)}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x^4 + x^4 + 1}$$

எ. கா. 11 $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = \tan\left[\log \tan^{-1} \sqrt{x}\right]$$

தீர்வு :

$$\left.\begin{aligned} y &= \tan u \\ u &= \log v \\ v &= \tan w \end{aligned}\right\} \text{ என்க}$$

$$w = \sqrt{x}$$

$$y = \tan u$$

u-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழுகாண

$$\frac{dy}{du} = \sec^2 u$$

அதே போல $\frac{du}{dv} = \frac{1}{v}$

$$\frac{dv}{dw} = \frac{1}{1 + w^2}$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dw} \cdot \frac{dw}{dx}$$

$$= \frac{\sec^2 u}{v\,(1 + w^2)\, 2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sec^2 [\log \tan^{-1}\sqrt{x}]}{\tan^{-1}\sqrt{x}.\,(1 + x).\, 2\sqrt{x}}.$$

§ *3-2·34.* நேர்மாறு சார்பலனுக்கு (inverse function வகைக்கெழு

$y = f(x)$ என்பது கொடுக்கப்பட்ட இடை வெளியில் வகையிடத்தக்க சார்பலன் என்க. இதனை y-ன் சார்பலனாக $x = \phi(y)$ என நேர்மாறு சார்பலனாக அமைக்க முடியும் என்க. $f'(x)$க்கும், $\phi'(y)$க்கும் தொடர்பு படுத்த முயல்வோம்.

x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x$ என்க. அதற்கேற்ப $y = f(x)$ மூலம் கிட்டும். y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y$ என்க. $\triangle y$ என்ற y கூடுந்தொகைக்கேற்ப x கூடுந்தொகையை $x = \phi(y)$ மூலம் கண்டால் அது $\triangle x$ ஆக இருக்கும்

$$1 = \frac{\triangle y}{\triangle x} \cdot \frac{\triangle x}{\triangle y}$$

$$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{1}{\frac{\triangle x}{\triangle y}}$$

$\triangle x \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் $\triangle y \longrightarrow 0$;

எனவே $\frac{\triangle y}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}$; $\frac{\triangle x}{\triangle y} = \frac{dx}{dy}$.

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}}$$

எனவே $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dx}{dy}$ என்பன நேர்மாறு பின்னங்களாகும்.

எடுத்துக்காட்டாக

$$y = x^2 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = 2x$$

$y = x^2$ என்பதை $x = y^{1/2}$ என எழுத

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \cdot y^{-1/2} = \frac{1}{2y^{1/2}} = \frac{1}{2x}$$

$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy}$ என்பது உண்மை.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\sin y = \sin x\,(a + y)$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$

என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$x = \frac{\sin y}{\sin (a+y)}$$

y ஐப் பொறுத்து வகை கெழு காண

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin (a + y) \cos y - \sin y \cos (a + y)}{\sin^2 (a + y)}$$

$$= \frac{\sin (a + y - y)}{\sin^2 (a + y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 (a + y)}{\sin a}$$

§ **3-2·35. கோணகணித நேர்மாறு சார்புகளுக்கு வகைக்கெழுக்கள்**

(i) $\sin^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு :

$\sin^{-1}x = y$ என்க.

எனவே $x = \sin y$.

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$= \sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \quad \left[\because \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right.$$

(ii) $\cos^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$\cos^{-1} x = y$ என்க.

எனவே, $x = \cos y$.

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y.$$

$$= -\sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \boxed{= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}}$$

(iii) $\tan^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$\tan^{-1} x = y$ என்க.

எனவே $x = \tan y$.

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \boxed{\frac{1}{1 + x^2}}$$

(iv) $\sec^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$\sec^{-1} x = y$ என்க.

எனவே $x = \sec y$.

இருபுறமும் y-ஐப் பொருத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \sec y \,.\, \tan y$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \,.\tan y}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}}$$

இவ்வாறாகவே,

(v) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}}$$

எனவும்,

(vi) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$$

எனவும் நிறுவலாம்.

§ 3-2·36 நேர்மாறு அதிபர வளைவுச் சார்புகளுக்கு வகைக்கெழுக்கள்.

(i) $\sin h^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$y = \sin h^{-1} x$ என்க.

$\therefore x = \sin h\, y$

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{1 + \sin h^2 y}$$

$$= \sqrt{1 + x^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}}$$

(ii) $\cosh^{-1} x$-ன் வகைக் கெழு :

$\cosh^{-1} x = y$ என்க

$\therefore x = \cosh y.$

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \sinh y$$

$$= \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}}$$

(iii) $\tanh^{-1} x$-ன் வகைக்கெழு

$\tanh^{-1} x = y$ என்க.

$\therefore x = \tanh y.$

இருபுறமும் y-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dx}{dy} = \text{sech}^2 y.$$

$$= 1 - x^2$$

$$\therefore \boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - x^2}}$$

இவ்வாறாகவே,

(iv) $$\boxed{\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = -\frac{1}{x^2 - 1}}$$

என நிறுவலாம்.

மற்றும்,

$$\frac{d}{dx}(\text{sech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

என்றும்,

$$\frac{d}{dx}(\text{cosech}^{-1} x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

என்றும் நிறுவலாம்.

பயிற்சிகள் 3 (F)

$\frac{dy}{dx}$ காண்க :

1. $y = \sin^3 x$
2. $y = (x^2 - 4)^8$
3. $y = \frac{1}{(1 + x^2)^3}$
4. $y = \sin x^2$
5. $y = \tan \frac{1}{x}$
6. $y = \tan 3x$
7. $y = (a - x)^5$
8. $y = \sec^5 x$
9. $y = (3 + 4x)^n$
10. $y = (1 + \sin x)^m$
11. $y = \tan^n x$
12. $y = \sqrt{a-x}$
13. $y = \sqrt{a^2 x^2 + b^2}$
14. $y = \sqrt{\sin x}$
15. $y = \frac{1}{a + bx}$
16. $y = \frac{1}{1-2x+3x^2}$
17. $y = e^{4x}$
18. $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$
19. $y = \sin^3 2x$
20. $y = \sqrt[4]{\sin x}$
21. $y = \sqrt{\tan x}$
22. $y = \frac{(b-x)^3}{(a-x)^2}$
23. $y = \sin 2x \cos x$
24. $y = 5 \sin x^2 + \log (\sin x + 6)$
25. $y = \cos^4 x . \cos x^4$
26. $y = \cos x \log \sin x$
27. $y = \sqrt{\frac{p-x}{p+x}}$

28. $y = \sqrt{\dfrac{x}{a-x}}$

29. $y = \log\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)$

30. $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

31. $y = \sin^2 3x . \cos^3 2x$

32. $y = \sqrt{\text{cosec}\, 2x}$

33. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2-1}}$

34. $x = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$

35. $y = e^{-ax} . \cos bx$

36. $y = \cos(\log x)$

37. $y = \log(\sec x)$

38. $y = \sin(\log x)$

39. $y = \log(\tan^{-1} x)$

40. $y = \sin^{-1}(\sqrt{1-x^2})$

41. $y = \cot(\cos^{-1} x)$

42. $y = e^{\tan^{-1} x}$.

43. $y = \tan^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

44. $y = \log \sin^{-1} x^2$

45. $y = \log \sec^{-1} x^2$

46. $y = \log \tan^{-1} x^2$

47. $y = (\sin^{-1} x)^{-1}$

48. $y = \text{cosec}^3 x^2$

49. $y = x \sec^{-1} x - \log (x + \sqrt{x^2-1})$

50. $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \sin^{-1}\dfrac{x}{a}$

51. $y = \tan^{-1}(\sin e^x)$

52. $y = \sin(\cosh x)$

53. $y = c^{ax} \cdot \cos(b \tan^{-1} x)$

54. $y = \log[\sqrt{1+\log x} - \sin x]$

55. $y = \log(e^{ax} \cos bx)$

56. $y = \log\left[\dfrac{(\sqrt{x+1}-1)}{(\sqrt{x+1}+1)}\right]$

57. $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{x \sin \lambda}{1 - x\cos\lambda}\right]$

58. $y = x\, \text{cosec}^{-1} x + \log \frac{1}{2} [x + \sqrt{x^2-1}]$

59. $y = \sec^{-1}\dfrac{x+1}{x-1} + \sin^{-1}\dfrac{x-1}{x+1}$

விடைகள் 3 (F)

1. $3 \sin^2 x \cos x$.

2. $8(x^2-4)^7$

3. $6x(1-x^2)^{-4}$

4. $2x \cos(x)^2$

5. $-\dfrac{1}{x^2} \sec^2 \dfrac{1}{x}$

6. $3 \sec^2 . 3x$.

7. $5(a-x)^4(-1)$

8. $5\sec^5 x . \tan x.$

9. $4n(3+4x)^{n-1}$

10. $m\cos x(1+\sin x)^{m-1}$

11. $n\tan^{n-1} x\sec^2 x.$

12. $-\frac{1}{2}(a-x)^{-1/2}$

13. $\frac{a^2 x}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}$

14. $\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

15. $\frac{-b}{(a+bx)^2}$

16. $\frac{2-6x}{(1-2x+3x^2)^2}$

17. $4e^{4x}$

18. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

19. $6\sin^2 2x\cos 2x$

20. $\frac{\frac{1}{3}\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}$

21. $\frac{\frac{1}{2}\sec^2 x}{\sqrt{\tan x}}.$

22. $\frac{-(b-x)^3(3a-2b-x)}{(a-x)^3}$

23. $2\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x.$

24. $10x\cos x^2+\frac{a\cos x}{a\sin x+b}$

25. $-4\cos^3 x\sin x\cos x^4-\cos^4 x.4x^3\sin x^4.$

26. $\cos x\cot x-\sin x\log\sin x.$

27. $\frac{-p}{\sqrt{\{(p-x)(p+x)^3\}}}$

28. $\frac{a}{2\sqrt{x}\sqrt{(a-x)^3}}$

29. $\frac{a}{ax+b}-\frac{c}{cx+d}$

30. $\frac{(e^x-e^{-x})^2(e^x+e^{-x})^2}{(e^x-e^{-x})^2}$

31. $6\sin 3x-\cos^3 2x\sin 5x$

32. $-\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin^3 2x}}.$

33. $\frac{x^4-2x^2+4}{(x^2-1)^{3/2}.(x^2-4)^{1/2}}$

34. $\frac{\cos\sqrt{5}}{4\sqrt{x}.\sqrt{\sin(\sqrt{x})}}$

35. $-e^{-ax}(a\cos bx+b\sin bx)$

36. $-x^{-1}.\sin(\log x)$

37. $\tan x$

38. $\frac{1}{x}\cos\log(x)$

39. $\frac{1}{1+x^2}\tan^{-1}x.$

40. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

41. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{cosec}^2(\cos^{-1}x)$

42. $\frac{e^{\tan^{-1}x}}{1+x^2}$

43. $\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{1+x^2}} \cdot \dfrac{\{\sqrt{(1+x^2)} - x(1+x^2)^{-1/2}\, x\}}{1+x^2}$

44. $\dfrac{1}{\sin^{-1} x^2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^4}} \cdot 2x$

45. $\dfrac{1}{\sec^{-} x^2} \cdot \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^4-1}} \cdot 2x.$

46. $\dfrac{1}{\tan^{-1} x^2}\ \dfrac{1}{1+x^4} \cdot 2x$

47. $(-1)\,(\sin^{-1} x)^{-2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

48. $3\,\mathrm{cosec}^2 x^2\,(-\mathrm{cosec}\, x^2 .\ \cot x^2) \cdot 2x.$

49. $\sec^{-1} x.$

50. $\dfrac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

51. $\dfrac{e^x .\ \cos(e^x)}{(1+\sin^2 e^x)}$

52. $\cos(\cosh x) \cdot \sin hx.$

53. $\dfrac{e^{ax}}{1+x^2}\left[1+x^2\cos(b\tan^{-1}x) - b\sin(b\tan^{-1}x)\right]$

54. $\dfrac{1}{\sqrt{1+\log x} - \sin x}\left[\dfrac{1}{2x\sqrt{1+\log x}} - \cos x\right]$

55. $a - b\tan b\,x.$

56. $\dfrac{1}{\sqrt{x1+x}}.$

57. $\dfrac{\sin \alpha}{1+x^2-2x\cos\alpha}.$

58. $\mathrm{cosec}^{-1} x.$

59. $\dfrac{1}{\sqrt{x(x+1)}}\left\{1 - \dfrac{1}{(x-1)^2}\right\}$

§ 3-3. கோணகணித உருவமாற்றங்கள் (Transformations)

தகுந்த கோணகணித வாய்ப்பாடுகளைக் கையாண்டு கொடுக்கப்பட்டுள்ள சார்பினை உருவமாற்றம் செய்வது சிலவேளைகளில் எளிதாக வகைக்கெழு காண பெருந்துணையாய் இருக்கும்.

பின்வரும் வாய்ப்பாடுகளை நினைவு கூர்க.

(i) $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$

(ii) $\cos 3x = 4 \cos^2 x - 3 \sin x$

(iii) $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$; $1 + \cos = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$;

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2} ; \quad \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} = \cot^2 \frac{x}{2}$$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2} ; \quad \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \cot \frac{x}{2}$$

(iv) $\tan 3x = \dfrac{3 \tan x - \tan^3 x}{1 - 3 \tan^2 x}$

(v) $\sin^{-1} (\sin \theta) = \theta$; $\cos^{-1} \cos \theta) = \theta$

(vi) $\tan^{-1} (\tan \theta) = \theta$;

$$\tan^{-1} a - \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a - b}{1 + ab} ;$$

$$\tan^{-1} a + \tan^{-1} b = \tan^{-1} \frac{a + b}{1 - ab} .$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 13: $\sin^{-1} (3x - 4x^3$,-ன் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு : $y = \sin^{-1} (3x - 4x^3)$

$x = \sin \theta$ எனப்பிரதியிட $3x - 4x^3 = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$
$= \sin 3\theta$.

$$\therefore \quad y = \sin^{-1}(\sin 3\theta) = 3\theta.$$

$$\frac{dy}{dx} = 3\,\frac{d(\theta)}{dx} = 3\,\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x)$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1 - x^2}}$$

பயிற்சிகள் 3 (G)

பின்வருவனவற்றுக்கு வகைக்கெழுக்கள் காண்க.

1. $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$
2. $\tan^{-1}\left(\dfrac{2x}{1-x^2}\right)$
3. $\cos^{-1}(4x^3 - 3x)$
4. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$
5. $\cos^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x}}{2}\right)$
6. $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\right)$
7. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$
8. $\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$
9. $\tan^{-1}\left(\dfrac{\cos x}{1 + \sin x}\right)$
10. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$
11. $\sin^{-1}\left[x\sqrt{1 - x} - \sqrt{x}\sqrt{1 - x^2}\right]$
12. $\tan^{-1}\left(\dfrac{a - x}{1 + ax}\right)$
13. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3x - x^3}{1 - 3x^2}\right)$
14. $\tan^{-1}\left(\dfrac{3a^2x - x^3}{a(a^2 - 3x^2)}\right)$
15. $\tan^{-1}\left(\dfrac{x^{1/3} + a^{1/3}}{1 - x^{1/3}a^{1/3}}\right)$
16. $\tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}\right]$
17. $\dfrac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a}.$

விடைகள் 3 (G)

1. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 2. $\dfrac{2}{1+x^2}$ 3. $\dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$

4. $(a^2 - x^2)^{-1/2}$ 5. $-1/2\sqrt{1-x^2}$ 6. $-1/x\sqrt{x^2-1}$

7. $-\frac{1}{2}$ 8. $\frac{1}{2}$ 9. $-\frac{1}{2}$

10. $\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ 11. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$ 12. $-\dfrac{1}{1+x^2}$

13. $\dfrac{3}{1+x^2}$ 14. $\dfrac{3a}{a^2+x^2}$ 15. $\dfrac{1}{3x^{2/3}(1+x^{2/3})}$

16. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ 17. $\sqrt{a^2 - x^2}$

§ 3-4. துணையலகுகளில் அமைந்த சார்பலனுக்கு வகைக்கெழு

$x = f(t)$, $y = g(t)$ என வகையிடத்தக்க இரு t-ன் சார்பலன்கள் தரப்பட்டுள்ளன என்க.

$x = f(t)$ என்பது $t = \chi(x)$ என நேர்மாறு சார்பலனைத் தரும் எனக் கொண்டால்

$$y = g[\chi(x)]$$

எனவே y, x-ன் சார்பலன். எனவே சங்கிலி விதியைப் பயன் படுத்தி

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

ஆனால் $\frac{dt}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dt}$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt} = \frac{f'(t)}{g'(t)}}$$

குறிப்பு: t என்பது துணையலகு (parameter) எனக் கூறப் படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக $x = at^2$, $y = 2at$

எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$

$$= \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 14

$\frac{dy}{dx}$ — காண்க.

$$x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

$$y = a \sin t.$$

தீர்வு :

$$y = a \sin t$$

t-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண்

$$\frac{dy}{dt} = a \cos t$$

$$x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right)$$

t-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண்போம்.

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t + \frac{1}{\tan t/_2} \cdot \sec^2 t/_2 \cdot \tfrac{1}{2}\right]$$

$$(\text{அது}) \quad \frac{dx}{dt} = a\left[-\sin t + \frac{1}{2 \sin t/_2 \cos t/_2}\right]$$

$$= a\left[-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right]$$

$$= a\left[-\frac{\sin^2 t + 1}{\sin t}\right] = \frac{a \cos^2 t}{\sin t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{a \cos t \times \sin t}{a \cos^2 t}$$

$$= \tan t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \tan t$$

எடுத்துக்காட்டு 15:

$$x = a(t - \sin t), \; y = a(1 - \cos t)$$

தீர்வு :

$$x = a(t = \sin t)$$

t-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண

$$\frac{dx}{dt} = a\,(1 - \cos t)$$

$$y = a\,(1 - \cos t)$$

$\therefore$ t-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழுகாண

$$\frac{dy}{dt} = a \sin t$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{a \sin t}{a\,(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{2 \sin t/2 \cos t/2}{2 \sin^2 t/2}$$

$$= \cot t/2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \cot t/2$$

எடுத்துக்காட்டு 16: $\frac{dy}{dx}$ - காண்க.

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - x^2}}{c + \sqrt{c^2 - x^2}}$$

தீர்வு :

$$y = \sqrt{c^2 - x^2} + \frac{c}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^9 - x^2}}{c + \sqrt{c^2 - x^2}}$$

$x = c \sin \theta$ என்க.

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = c \cos \theta.$$

$$y = c \cos \theta + \frac{c}{2} \log \frac{c - \sqrt{c^2 - c^2 \sin^2 \theta}}{c + \sqrt{c^2 - c^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= c\cos\theta + \frac{c}{2}\log\frac{c - c\cos\theta}{c + c\cos\theta}$$

$$= c\cos\theta + \frac{c}{2}\log\tan^2\theta/2$$

$$= c\cos\theta + \log\tan\theta/2.$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -c\cos\theta + c\cdot\frac{1}{\tan\theta/2}\cdot\sec^2\theta/2\cdot\tfrac{1}{2}$$

$$= -c\sin\theta + \frac{c}{2\sin\theta/2\cos\theta/2}$$

$$= -c\sin\theta + \frac{c}{\sin\theta}$$

$$= \frac{c\cos^9\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \div \frac{dx}{d\theta} = \frac{c\cos^2\theta}{\sin\theta} \times \frac{1}{c\cos\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \frac{\sqrt{1-\sin^2\theta}}{\sin\theta} = \frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{c^2}}}{\frac{x}{c}}$$

$$\sqrt{\frac{c^2 - x^2}{x}}$$

பயிற்சிகள் 3 (H)

$\frac{dy}{dx}$ — ஐக் காண்க;

1. $x = a\cos h\,\theta;\quad y = b\sin h\,\theta.$

2. $x = a\cos^8 t;\quad y = a\sin^3 t.$

3. $x = \frac{3at}{1+t^3}\,;\; y = \frac{3at^2}{1+t^3}$

4. $x = a\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}}$; $y = at\sqrt{\frac{t^2-1}{t^2+1}}$

5. $y = t^3 + t$; $x^2 + 2tx + 3t^4 = 0$,

6. $x^2 + y^2 = t^2 - \frac{1}{t}$; $x^4 + y^4 = t^2 + \frac{1}{t^2}$

7. $x = 2\cos t - \cos 2t$; $y = 2\sin t - \sin 2t$

எனில் $t = \frac{\pi}{2}$ -ல் $\frac{d^2y}{dx^2}$ - ன் மதிப்பு $-\frac{3}{2}$ என நிறுவுக.

விடைகள் 3 (H)

1. $\frac{b}{a}\coth\theta$.

2. $-\tan t$

3. $\frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$

4. $\frac{t^4+2t^2-1}{2t}$

5. $-\frac{(1+3t^2)(x+t)}{x+6t^3}$

6. $\frac{1}{x^3y}$

§ 3-5. ஒரு சார்பைப் பொறுத்து மற்றொரு சார்பின் வகைக்கெழு காணல்

$g(x)$ என்ற சார்பலனைப் பொறுத்து $f(x)$ என்ற சார்பலனின் வகைக்கெழு தேவை என்போம்.

$$\frac{df(x)}{dg(x)} = \frac{df(x)}{dz} \quad z = g(x) \text{ என்க.}$$

$$= \frac{df((x)}{dx} \cdot \frac{dx}{dz}$$

$$= \frac{d}{dx}(+(x)) \Big/ \frac{dz}{dx}$$

$$[= \frac{d}{dx}[+(x)] \Big/ \frac{d}{dx}[g(x)]$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 18 :

வகைக்கெழு காண்க.

$$\tan^{-1}\left(\frac{2}{1-x^2}\right); \quad \sin^{-1}\frac{2}{1+x^2}$$ ஐப் பொறுத்தது.

தீர்வு : $x = \tan\theta$ எனப் பிரதியிட

மேலேயுள்ள இரு கோணவைகளும் $2\theta = 2\tan^{-1} x$ என ஆகின்றன.

$\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\frac{2}{1-x^2}\right)$ ன் வகைக்கெழு 1 ஆகிறது.

ஏனெனில் 2θ ஐப் பொறுத்து 2θ-ன் வகைக்கெழு 1.

எடுத்துக்காட்டு 19 :

x^2 ஐப் பொறுத்து $\log_{10} x$-ன் வகைக்கெழு காண்க.

தீர்வு : $y = \log_{10} x$

$u = x^2$ என்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \log_{10} e$$

$$\frac{du}{dx} = 2x$$

எனவே

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy/dx}{du/dx} = \frac{\frac{1}{x}\log_{10} e}{2x} = \frac{\log_{10} e}{2x^2}$$

பயிற்சிகள் 3 (I)

பின்வருவனவற்றுக்கு வகைக்கெழுக்கள் காண்க.

1. $\sqrt{t}$ ஐப் பொறுத்து e^t

2. $\tan^{-1}(x)$ ஐப் பொறுத்து $e^{\tan x}$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$ ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

4. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{1-x^2}\right)$ ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$

5. $\sqrt{1-x^2}$ ஐப் பொறுத்து $\sec^{-1}\left(\frac{1}{2x^2-1}\right)$

6. $\tan^{-1} x$ ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$

7. $\sin x$ ஐப் பொறுத்து $e^{\tan x}$

8. $(\sin x)^x$ ஐப் பொறுத்து $x^{\sin x}$

9. $(\log x)^2$ ஐப் பொறுத்து $\sin^2 x$

10. $\sin^{-1} x$ ஐப் பொறுத்து $x \sin^{-1} x$

11. $\sin(m\cos^{-1} x)$ ஐப் பொறுத்து $(\log x)^{\tan x}$

விடைகள் 3 (I)

1. $2\sqrt{t}\; e\, t$ 2. $(1+x^2)\, e^{\tan x} \sec^3 x$

3. $\frac{1}{4}$ 4. 1 5. $2/x$ 6. $\frac{1}{2}$

7. $e^{\tan x} \sec^3 x$

8. $$\frac{x^{\sin x}\left[\frac{\sin x}{x} + (\log x)\cos x\right]}{(\sin x)^x\,[x\cot x + \log\sin x]}$$

9. $$\frac{x \sin x \cos x}{\log x}$$

10. $$x^{\sin^{-1} x}\left[\log x + \frac{\sqrt{1-x^2}\,\sin^{-1} x}{x}\right]$$

11. $$\frac{(\sqrt{1-x^2})\,(\log x)^{\tan x}\,[\tan x + x\log x \sec^2 \log(\log x)]}{-\,m\cos(m\cos^{-1} x).\; x\log x}$$

§ 3-6. லாகிருத முறையில் வகைக்கெழு காணல்

u, v என்பன x-ன் சார்பலன்களாக அமைய, u^v என்ற அமைப்பில் உள்ள சார்பலனை வகையீடு காண முதலில் லாகிருதம் எடுத்து பின் வகையீடு காணல் வேண்டும். இம்முறையை லாகிருத (முறை) வகைக்கெழு காணல் என்போம். பல காரணிகளின் பெருக்கற்பலனுக அமைந்த சார்பலன்களை எளிதாக வகைக்கெழு காணவும் இம்முறை பயனுகும்.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$y = (\tan x)^{\log r} + x^x$$

தீர்வு :

$$u = (\tan x)^{\log x}$$

$v = x^x$ என்றால் $y = u + v$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{av}{dx} \text{ என ஆகும்} \qquad \ldots (1)$$

$$u = (\tan x)^{\log x}$$

$$\log u = \log x \ \log \tan x$$

இருபுறமும் x-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{\log \tan x}{x} + \frac{\log x}{\tan x} \cdot \sec^2 x.$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = (\tan x)^{\log x}\left[\frac{\log \tan x}{x} + \frac{\log x}{\tan x}\sec^2 x\right]$$

$$v = x^x$$

$$\therefore \log v = x \log x$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{dv}{dx} = 1 + \log . x$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = x^x(1 + \log x)$$

$$\frac{dy}{dx} = (\tan x)^{\log x}\left[\frac{\log \tan x}{x} + \frac{\log x \sec^2 x}{\tan x}\right] + x^x(1 + \log x)$$

பயிற்சிகள் 3 (J)

$\frac{dy}{dx}$ காண்க :

1. $y = \frac{x^3 \sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}$

2. $y = (\sin x)^{\log x}$.

3. $y = x^x$.

4. $y = e^{x^x}$.

5. $y = (x^x)^x$.

6. $y = x^{\log \tan x}$

7. $y = x^{(\log x)^{\log(\log x)}}$

8. $y = [\tan^{-1}(x^2+1)]^{\cos x}$

9. $y = x^{\log \log x}$.

10. $y = x \log x \, e^{\sin x}$.

11. $y = x^{(x^x)}$

12. $y = x^x + x^{\sin x}$

13. $y = (\cot x)^{\cot x} + (\cosh x)^{\cosh x}$

14. $y = (\tan x)^{\cot x} + (\cot x)^{\tan x}$

விடைகள் 3(J)

1. $\left[\frac{3}{x} + \frac{3}{2(2+3x)} + \frac{x}{1-x} - \frac{1}{2+x}\right]$
$\left[\frac{x^3 \sqrt{2+3x}}{(2+x)(1-x)}\right]$

2. $(\sin x)^{\log x} \cdot (\log x \cdot \cot x + \frac{1}{x} \log \sin x)$

3. $x^x \log (e\, x)$

4. $x^x \log (e\, x)\; e^{x^x}$.

5. $x\,(x^x)^x\,(1 + 2 \log x)$

6. $(x)^{\log \tan x} \cdot \left\{ \frac{1}{x} \cdot \log \tan x + (\log x)(2 \operatorname{cosec} x) \right\}$

7. $\frac{1}{x} \cdot x^{(\log x)^{\log (\log x)}} \cdot (\log x)^{\log (\log x)}$

$\{ 1 + 2 \log (\log x) \}$

8. $[\tan^{-1} (x^2 + 1)]^{\cos x} \left[-\sin x \log \tan^{-1} (x^2 + 1) \right.$

$\left. + \frac{2x \cos x}{\tan^{-1} (x^2 + 1) \{x^4 + 2x^2 + 2\}} \right]$

9. $x^{\log \log x} \left[\frac{1 + \log \log x}{x} \right]$

10. $e^{\sin x} \left[1 + \log x + x \log x \cos x \right]$

11. $x^{x^x} [\, x^{x-1} + x^x \log x\,]\, (1 + \log x)$.

12. $x^x\,(1 + \log x) + x^{\sin x} \left[\frac{1}{x} \sin x + \cos x \log x \right]$

13. $(\cot x)^{\cot x} \operatorname{cosec}^2 x \cdot (1 + \log \cot x)$

$+ (\cosh x)^{\cosh x} [\, \sinh x\, (1 + \log \cosh x)\,]$

14. $(\tan x)^{\cot x} \cdot \{ \operatorname{cosec}^2 x - \operatorname{cosec}^2 x \log \tan x \}$

$+ (\cot x)^{\tan x} \{ -\sec^2 x \sec^2 x \log \cot x \}$

§ 3-7. உட்படு சார்புகளுக்கு வகைக்கெழு காணல்

இதுவரை நாம் வெளிப்படு சார்புகளுக்கு (explicit functions) வகைக்கெழுக்கள் காண வழிகள் கூறினோம். x, y என்ற மாறிகள் $f(x, y) = 0$ என்ற சார்பில் உட்படு சார்பாக (implicit function) அமைந்திருந்தால் வகைக்கெழு காணும் முறை பின்வருமாறு ;

(i) எளிதாக வெளிப்படு சார்பாக அமைத்துவிட முடியுமானல் அவ்விதமே செய்க.

(ii) வெளிப்படு சார்பாக அமைப்பது எளிதாக இல்லாத போது கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாட்டை ஒவ்வொரு உறுப்பாக நேராகவே வகையிடல் செய்க. $\frac{dy}{dx}$-ல் சமன்பாடு கிடைக்கும். $\frac{dy}{dx}$-ஐ தீர்வு காண்க.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 19 : $\frac{dy}{dx}$ காண்க.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

தீர்வு : கொடுத்த சமன்பாட்டை

x-ஐப் பொறுத்து வகையீட்டுக்கெழு காண

$$2ax + 2h\left[y + x\frac{dy}{dx}\right] + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

அல்லது

$$2\frac{dy}{dx} \times \left[hx + by + f\right] = 2(ax + hy + g)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(ax + hy + g)}{(hx + by + f)}$$

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$x^y = e^{x-y}$ எனில் $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$x^y = e^{x-y}$$

இருபுறமும் லாகிருதம் எடுக்க

$$y \log x = (x - y) \log e = x - y \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

இருபுறமும் x-ஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காண

$$\frac{dy}{dx}\log x + \frac{y}{x} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}(1 + \log x) = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{(x - y)}{x(1 + \log x)}$$

$$= \frac{y \log x}{x(1 + \log x)} \quad \ldots\ldots \text{(1)-ன் மூலம்}$$

$$\ldots\ldots \quad (2)$$

(1)-ன் மூலம் $y \log x = x - y$

$$\therefore \quad y(1 + \log x) = x$$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{1 + \log x}$$

இதை (2)-ல் பிரதியிட

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$$

கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$$y = x + \frac{1}{x+}\frac{1}{x+}\frac{1}{x+}\ldots\ldots \text{ to } \infty \text{ எனில்}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 -}\frac{x}{x +}\frac{1}{x +}\frac{1}{x +}\ldots\ldots \text{ to } \infty \text{ என நிறுவுக}$$

தீர்வு :

$$y = x + \frac{1}{y} \text{ என எழுதலாம்.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2 - \frac{x}{y}} = \frac{y}{2y - x} \text{ என நிறுவ வேண்டும்.}$$

$$y = x + \frac{1}{y}$$ என்பதை

$y^2 - xy - 1 = 0$ என எழுதலாம்.

வகைக்கெழு காண

$$2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

என கிடைக்கும்.

(அது) $$\frac{dy}{dx}(2y - x) = y$$

(அது) $$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x)}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{x}{x} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ldots \text{ to } \infty$$

என தேவைப்பட்ட அமைப்பில் கிடைக்கிறது.

பயிற்சிகள் 3(K)

$\frac{dy}{dx}$ காண்க ;

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$
2. $y^3 + 3y^2 = x + 1$
3. $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 = a^3$
4. $y = x^{yx}$
5. $y = \sin(x + y)^2$
6. $y = x \log \frac{y}{a + bx}$
7. $(\cos x)^y = (\sin y)^x$
8. $y = x^{y^x}$
9. $x = e^{\tan^{-1}(y - x^2 / x^2)}$

10. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

11. $x^y + y^x = b$

12. $x^p y^q = (x + y)^{p+q}$

13. $y = a^{xy}$

14. $y^x = x^{\sin y}$

15. $(\sin x)^{\cos y} + (\cos x)^{\sin y} = 1.$

16. $(\tan x)^y + (y)^{\cot x} = a$

17. $x\sqrt{1 + y} + y\sqrt{1 + x} = 0$

18. $x^y = y^x$

19. $\sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2} = a(x - y)$

20. $y = x^{x^{x^{\cdots \infty}}}$ எனில்

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1 - y \log x}$$

21. $y = x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x \ldots \infty}}}$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \cfrac{1}{2 - \cfrac{x}{x + \cfrac{1}{x + \cfrac{1}{x + \ldots \ldots \infty}}}}$$ என நிறுவுக.

22. $x = \cfrac{x}{a + \cfrac{x}{b + \cfrac{x}{a + \cfrac{x}{b + \cfrac{x}{a + \cfrac{x}{b + \ldots\ldots \infty}}}}}}$

எனில் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b}{2ay + ab}$ என நிறுவுக.

23. $y = \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x + \sqrt{\sin x - \sqrt{\cdots\cdots \infty}}}}$

எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{2y - 1}$$ என நிறுவுக.

24. $y = (\cos)^{(\cos x)^{(\cos x)^{\cdots\cdots \infty}}}$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \tan x}{y \log \cos x - 1}$$ என நிறுவுக.

25. $y = (\sin x)^{(\sin x)^{(\sin x)^{\cdots\cdots \infty}}}$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 \cot x}{1 - y \log \sin x}$$ என நிறுவுக.

26. $y = x^2 + \cfrac{1}{x^2 + \cfrac{1}{x^2 + \cdots\cdots \infty}}$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2y - x^2}$$ என நிறுவுக.

27. $y = b \tan^{-1}\left(\frac{x}{a} + \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$ எனில்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{a} - \frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{1}{b^2}\sec^2\frac{y}{b} - \frac{x}{x^2+y^2}}.$$ என நிறுவுக.

விடைகள் 3 (K)

1. $\frac{-(ax + hy)}{(hx + hy)}$.

2. $\frac{1}{3y\,(y+2)}$

3. $\frac{-3x^2 + 2xy + y^2}{3y^2 + 2xy + x^2}$

4. $\dfrac{y^2(1+\log x)}{1-\log x}$

5. $\dfrac{2(x+y)\cos(x+y)^2}{1-2(x+y)\cos(x+y)^2}$

6. $\dfrac{\{bx(x-y)-ay\}\,y}{x(a+bx)(x-y)}$

7. $\dfrac{\log\sin y + y\tan x}{\log\cos x - x\cot y}$.

8. $\dfrac{y\log y}{x\log x}\;\dfrac{1+\log x}{1-x}\;\dfrac{\log y}{\log y}$

9. $x(3+2\tan\log x+\tan^2\log x)$

10. $-(y/x)^{1/3}$.

11. $-\left\{\dfrac{yx^{y-1}+y^x\log y}{x^y\log x+xy^{x-1}}\right\}$

12. $\dfrac{y}{x}$

13. $\dfrac{y^2\log a}{(1-x^2)\log a}$

14. $\dfrac{y(\sin y - x\log y)}{x(x-y)\cos y\,.\,\log x}$.

15. $\dfrac{\{\sin y\tan x(\cos x)^{\sin y} - \cot x\cos y(\sin x)^{\cos y}\}}{\{(\cos x)^{\sin y}.\cos y.\log\cos x - (\sin x)^{\cos y}.\sin y\log\sin x\}}$

16. $\dfrac{\{y^{\cot x}.\operatorname{cosec}^2 x\cdot\log y - y\sec x\cdot\operatorname{cosec} x(\tan x)^y\}}{\{(\tan x)^y.\log\tan x + y^{\cot x-1}\cot x\}}$

17. $-(1+x)^{-2}$

18. $\dfrac{y(y-x\log x)}{x(x-y\log x)}$

19. $\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$

பயிற்சிகள் 3 (L)

(பல்வகை)

1. $\sin x^3$-ன் வகையீட்டுக் கெழுவை அடிப்படை முறைகளினால் காண்க.

2. $e^{\tan^{-1} x}$-ன் வகையீட்டுக் கெழுவை அடிப்படை முறைகளினால் காண்க.

3. $\log \sec x$-ன் வகையீட்டுக்கெழுவை அடிப்படை முறைகளினால் காண்க.

வகையீட்டுக்கெழு காண்க :

4. $y = \dfrac{x \cos^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}}$

5. $y = \sin^p x^q$

6. $y = \{ (\sin^{-1} x)^2 - (\cos^{-1} x)^2 \}$

7. $y = \cot^{-1} (\operatorname{cosec} x)$

8. $y = \tan^{-1} (\tanh x)$

9. $y = \tan^{-1} \dfrac{\sqrt{x} - x}{1 + x^{\frac{3}{2}}}$

10. $y = (\sin^{-1} x)^p (\cos^{-1} x)^q$

11. $y = \log \dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

12. $y = \sin^{-1} \dfrac{a + b \cos x}{b + a \cos x}$

13. $y = e^{\tan^{-1} x} \log (\sec^2 x^3)$

14. $y = e^{ax} \cos (b \tan^{-1} x)$

15. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x \sin 4x.$

16. $y = \sqrt{\dfrac{1 - \tan x}{1 + \tan x}}$

17. $y = 9^{4x} \dfrac{1}{\log_{10} 7x}$

18. $e^x \sin x$-க்கு $x = 0$-ல் வகைக்கெழு 1 என நிறுவுக

வகையீடல் செய்க :

19. $\sqrt{x+1}$; x^2-ஐப் பொறுத்து.

20. $a^{\sin x}$; $\cos x$-ஐப் பொறுத்து.

21. $\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} + (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}} - (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\sqrt{1-x^2}$ ஐப் பொறுத்து

வகைக்கெழு காண்க.

22. $y = a \cot^{-1} \{ m \tan^{-} (bx) \}$

23. $y = \sqrt{t} + \cot^{-1} \sqrt{t}$; இங்கே $t = \sqrt{x^2+1}$

24. $x = e^{\tan^{-1}\left(\frac{y-x^2}{x^2}\right)}$ எனில் x-ன் சார்பலனுக

$\dfrac{dy}{dx}$ காண்க.

25. $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-b^2}} \cos^{-1} \left(\dfrac{a \cos x + b)}{a + b \cos x}\right)$ என்ற சார்பல

னுக்கும் $\dfrac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \tan^{-1} \left\{ \left(\dfrac{a-b}{a+b}\right)^{\frac{1}{2}} \tan \dfrac{x}{2}\right.$

என்ற சார்பலனுக்கும் $\dfrac{1}{a + b \cos x}$ என்பதே வகையீட்டுக்

கெழு என நிறுவுக.

வகைக்கெழு காண்க :

26. $y = \log \left((\cos e^{x^n}\right)$

27. $y = \log \dfrac{\sqrt{x+a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x-b} - \sqrt{x-c}}$

28. $y = (\cos x)^{\cot 2x}$

29. $y = (\cot^{-1} x)^{1/x}$

30. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x + x^{\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$

31. $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{4\sqrt{2}} \log\left(\frac{x^2 + \sqrt{2}\,x + 1}{x^2 - \sqrt{2}\,x + 1}\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \tan^{-1} \frac{x\sqrt{2}}{1-x}\right]$

$= \frac{1}{x^4+1}$ என நிறுவுக.

32. $= y \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x^2}{2^2} \sin \frac{x^3}{2^3} \ldots\ldots \sin \frac{x^n}{2^n}$

எனில் $\frac{dy}{dx} = y\left[\frac{1}{2} \cot \frac{x}{2} + \frac{x}{2} \cot \frac{x^2}{2^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{nx^{n-1}}{2^n} \cot \frac{x^n}{2^n}\right]$

என நிறுவுக.

33. $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 . \cos^{-1} \frac{x}{a}\right] = \sqrt{x^2 - a^2}$

என நிறுவுக.

34. $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \log \frac{(b + a)^{1/2} + (b-a)^{1/2} \tan \frac{x}{2}}{(b + a)^{1/2} - (b-a)^{1/2} \tan \frac{x}{2}}\right]$

$+ \frac{1}{a+b \cos x}$ என நிறுவுக.

விடைகள் 3 (L)

1. $3x^2 \cos x^3$

2. $\frac{1}{1 + x2} e \tan^{-1} x.$

3. $\tan x$

4. $\frac{\cos^{-1} x - x\sqrt{1 - x^2}}{(1 - x^2)^{3/2}}$

5. $pq\, x^{q-1} \cos x^q \sin^{p-1} x^q$

6. $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \{ \sin^{-1} x + \cos^{-1} x \}$

7. $\frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$.

8. $\sec h\ 2x$.

9. $\frac{x^2 - 2x^{3/2} - 2x^{1/2} + 1}{2x^{1/2} \cdot (1 + x)(1 + x^2)}$

10. $\frac{(\sin^{-1} x)^{p-1}\ (\cos^{-1} x)^{-2}1}{\sqrt{1 - x^2}} [p \cos^{-1} x - q \sin^{-1} x]$

11. $\frac{2(1 - x^2)}{1 + x^2 + x^4}$

12. $\frac{-\sqrt{b^2 - a^2}}{b + a \cos x}$.

13. $2 e^{\tan^{-1} x} \left\{ \frac{\log \sec x^3}{1 + x^2} + 3x^2 \tan x^3 \right\}$

14. $e^{ax} \frac{[a(1 + x^2) \cos (b \tan^{-1} x) - b \sin (b \tan^{-1} x)]}{1 + x^2}$

15. $\sin x . \sin 2x . \sin 3x . \sin 4x \ \{ \cot x + 2\cot 2x + 3\cot 3x + 4 \cot 4x \}$

16. $\frac{-\sec^2 x}{(1 + \tan x)^{3/2} \cdot \sqrt{1 - \tan x}}$

17. $\frac{9^{4x} \left[4 \log_{10} 7x \cdot \log_e 9 - \left(\frac{1}{x}\right) \cdot \log_{10} e \right]}{(\log_{10} 7x)^2}$

19. $\frac{1}{4x \sqrt{x + 1}}$

20. $-\cot x\ a^{\sin x} \log_e a$

21. $\frac{1}{x^4} \left[\frac{(1 + x^2)^{1/2} + (1 - x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{1/2} - (1 - x^2)^{1/2}} \right]$

22. $\frac{amb}{1 + \{ m \tan^{-1} (bx) \}^2} \cdot \frac{1}{1 + b^2 x^2)}$

23. $\dfrac{x}{2\,(1 + t\sqrt{t}}$

24. $2x\,[1 + \tan(\log x)\,.\,] + x\sec^2(\log x)$

26. $-n\,x^{n-1}.\; e^{x^n}.\tan(e^{x^n})$

27. $\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{(x-b)\,(x-c)}}\right\}$

28. $-y\cot x.\,(1 + 2\,\mathrm{cosec}^2 x\log\cos x)$

29. $-y\left\{\dfrac{\log\cot^{-1} x}{x^2} + \dfrac{1}{x\,(1 + x^2)\cot^{-1} x}\right\}$

30. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{x}.\;\left\{\log\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right\} + x^{\left(\frac{1}{x} - 1\right)}(x + 1 - \log)$

4. வகைக்கெழுவின் பயன்கள்

§ 4-0. வகைக் கெழுவை மாறுவீத அளவி (rate measurer) ஆகக் கருதுதல்

தனித்த மாறியில் ஓரலகு மாற்றத்துக்கு இயைந்து சார்பலன் மாறுவீதத்தை அளப்பதற்கு வகைக்கெழு மிகவும் பயனுடையது.

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன் தரப்பட்டுள்ளதாகக் கருதுவோம்; x-க்கு x_1 என்ற நிலையான மதிப்பைக் கருதுக. y-க்கு இயைந்த மதிப்பு $y_1 = f(x_1)$ என்க.

x-க்கு x_2 என்ற வேறொரு மதிப்பைக் கருத y-ன் இயைந்த மதிப்பு $y_2 = f(x_2)$ என்க.

x-ன் கூடுந்தொகை $\triangle x = x_2 - x_1$

y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$
கூடுந்தொகை வீதமான

$$\frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

என்பது (x_1, x_2) இடைவெளியில் x-க்கு ஏற்ற y மாற்றத்தின் சராசரி வீதம் எனப்படும்.

(x_1, x_2) இடைவெளி குறையுமாறும் இறுதியாக $\triangle x \longrightarrow 0$ ஆகுமாறும் x மதிப்புகளை தேர்ந்து கொண்டு போனால் வகைக்கெழு வரையறையடி

$$\underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \underset{x_2 \longrightarrow x_1}{\text{Lt}} \frac{f(x_2)-(x_1)}{x_2 - x_4} = f'(x) = \left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$x = x_1$ கிடைக்கும்.

இந்த எல்லை மதிப்பை $x = x_1$-ல் x-ஐப் பொறுத்து y-ன் (நேரடி) மாறு வீதம் எனப்படும். அதாவது $x = x_1$-ல் $\frac{dy}{dx}$ ஆனது, $x = x_1$-ல் x-ஐப் பொறுத்து y-ன் மாறு வீத அளவியாக விளங்குகிறது. இந்த கருத்தை பின்வரும் பகுதிகளில் பயன்படுத்துவோம்.

§ 4-1. திசைவேகமும் முடுக்கமும்

ஒரு புள்ளி ஒரு நேர்கோட்டு வழியே நகர்கிறது. குறிப்பிட்ட கணத்திலிருந்து t விநாடிகளில் 0 என்ற நிலைப் புள்ளியிலிருந்து s அலகு தூரம் கடந்து, P-என்னும் புள்ளியிலும், $t + \triangle$ நேரத்தில் 0-விலிருந்து $s + \triangle s$ அலகு தூரத்தைக் கடந்து Q என்னும் புள்ளியிலும் இருப்பதாகக் கொள்க. எனவே $\triangle t$ விநாடியில் $\triangle s$ அலகு தூரம் அப்புள்ளி நகர்ந்திருக்கிறது. எனவே இந்தக் கால இடைவெளியில் அப்புள்ளியின் சராசரி திசை வேகம் ஒரு விநாடியில் $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ அலகு. $\triangle t \longrightarrow 0$ எனில் $\triangle s \longrightarrow 0$. அப்போது $\frac{\triangle s}{\triangle t}$ எனும் விகிதம் $\frac{ds}{dt}$ என்னும் நிலையை நெருங்குகிறது. இதனை t என்ற நேரத்தில் திசைவேகம் (ஒரு விநாடியில் v அலகு) என வரையறை செய்கிறோம்.

அதாவது,

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad \dots (1)$$

இதேபோன்று P-யில் திசை வேகம் v, Q-வில் திசை வேகம் $v + \triangle v$ எனில் இக்கால இடைவெளியில் $\frac{\triangle v}{\triangle t}$ என்பது சராசரி முடுக்கம். t எனும் கணத்தில் முடுக்கம் (a)

$$= \operatorname*{Lt}_{\triangle t \longrightarrow 0} \frac{\triangle v}{\triangle t} = \frac{dv}{dt}$$ என வரையறை செய்யப்படுறது.

அதாவது,

$$a = \frac{dv}{dt}$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் குறிப்பிட்ட கணத்தில் திசைவேகம், முடுக்கம் காண உதவும்.

முடுக்கத்தை வேறு ஒரு சமன்பாடாகவும் அமைக்கலாம்.

$$= \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{ds} \cdot v$$

ஆகவே $$\boxed{a = v \frac{dv}{ds}} \qquad \ldots\ldots(2)$$

v என்னும் திசைவேகம் s-ன் சார்பலனாக இருந்தால் முடுக்கம் காண (3) உதவும். மற்றும்,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}$$

ஆகவே $$\boxed{a = \frac{d^2s}{dt^2}} \qquad \ldots \quad (4)$$

என்பதை அறிக.

எடுத்துக்காட்டு 1

n மிகை முழு எண். $s = t^n$ எனில்,

(i) $t = 10$ வினாடிகளில் துகளின் திசை வேகமானது $t = 5$ வினாடிகளில் திசை வேகத்தைப்போல் இரு மடங்கு என்றால் n-ன் மதிப்பு காண்க.

(ii) 10 வினாடிகளின் முடிவில் திசைவேகமும் முடுக்கமும் எண் மதிப்பில் சமம் எனில் n-ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$s = t^n \qquad \ldots (1)$$

திசைவேகம் $v = \frac{ds}{dt} = nt^{n-1} \qquad \ldots (2)$

முடுக்கம் $a = \frac{dv}{dt} = n(n-1)\,t^{n-2} \qquad \ldots (3)$

(i) $t = 5$ எனில் திசைவேகம் $v_1 = n \,.\, 5^{n-1}$

$t = 10$ எனில் திசைவேகம் $v_2 = n \,.\, 10^{n-1}$

$v_2 = 2\,v_1$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$n \,.\, 10^{n-1} = 2\,n \,.\, 5^{n-1}$

(அது) $(2 \,.\, 5)^{n-1} = 2 \cdot 5^{n-1}$

(அது) $2^{n-1} \,.\, 5^{n-1} = 2 \,.\, 5^{n-1}$

(அது) $2^{n-1} = 2$

(அது) $n - 1 = 1 \quad \therefore \quad n = 2.$

(ii) $t = 10$ எனில் முடுக்கம்

$a = n(n-1)\,10^{n-2}$

$v_2 = a$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$\therefore \quad n \,.\, 10^{n-1} = n(n-1)\,10^{n-2}$

(அது) $10 = n - 1$

$\therefore \quad n = 11.$

§ 4.2. தொடர்புடைய மாறு வீதங்கள்

t (நேரம்)-ல் சார்பலனாக அமைந்த இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகள் வரும் கணக்குகளும் உண்டு. அத்தகைய கணக்குகளில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிபந்தனை மனதில் கொண்டு சார்பலன்களை தொடர்பு படுத்துக. t-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய மாறுவீதங்களில் தொடர்பு கிடைக்கும்.

அடுத்து வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இத்தகைய கணக்குகளைச் செய்யும் முறையை விளக்குவன.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 2 : விஞுடிக்கு 10 கன அங்குல காற்றைச் செலுத்தி, கோள வடிவில் உள்ள பலூன் ஊதப்படுகிறது. அதன் ஆரை 15'' ஆக இருக்கையில் ஆரையின் வளர்ச்சி வீதமென்ன ?

தீர்வு : பலூனின் ஆரை r அங்.; கன அளவு v கன அங்.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

t-ஐப் பொறுத்து வகையிடல் செய்ய

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi}{3} . 3r^2 \frac{dr}{dt}$$

$\frac{dv}{dt} = 10$ என்றும், $r = 15$ என்றும் தரப்பட்டுள்ளது.

$$10 = 4\pi \ (15)^2 . \frac{dr}{dt}$$

ஆரையின் வளர்ச்சி வீதம்

$$\frac{dr}{dt} \text{ அங். /விஞுடி} = \frac{10}{4 . \pi . 225} \text{ அங்./விஞுடி}$$

$$= \frac{1}{90\pi} \text{ அங்./விஞுடி}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 : 2'' ஆரையும், வடிவ 2'' ஆழமும் உள்ள கூம்பு புனலில் திரப்பி வைக்கப்பட்ட திரவம், நிமிடத்திற்கு 1 கன அங். வீதத்தில் வடிகிறது. திரவப் பரப்பு, புனலின் மேற்பரப்பி லிருந்து 1'' இருக்கும்போது என்ன வீதத்தில் கீழ் இறங்குகிறது ?

தீர்வு ; t என்ற கணத்தில் கூம்பின் பருமம் $= V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

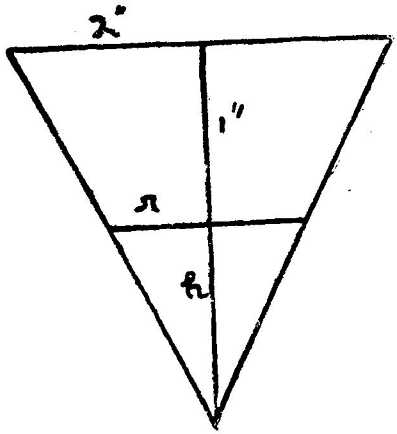
$r = h$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = \frac{1}{3}\pi . 3h^2 \frac{dh}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$\frac{dv}{dt} = 1$ என்றும், $h = 1$ என்றும் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே $1 = \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{dh}{dt}$.



படம் 4·1.

$$\therefore \frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}. \quad \therefore \text{ இறங்கும் வேகம் } = \frac{1}{\pi} \text{ அங்/நிமிடம்}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

30′ நீளமுடைய ஏணி செங்குத்தான சுவற்றின் மீது சாத்தி வைக்கப்பட்டிருக்கிறது. தரைமீது படிந்துள்ள கீழ்முனை வழுக்கி சுவற்றிலிருந்து அம்முனை எத்தொலைவில் உள்ளதோ அதற்கு இரு மடங்கு வீதத்தில் (வினடி) சுவற்றிலிருந்து விலகிச் செல்கிறது. கீழ்முனை சுவற்றில் இருந்து 10′ தொலைவில் உள்ளபோது மேல் முனை கீழ்நோக்கி என்ன வீதத்தில் இறங்குகிறது? கீழ்முனையும் மேல்முனையும் சமவீதத்தில் நகரும்போது கீழ்முனை சுவற்றிலிருந்து என்ன தூரத்தில் இருக்கும்.

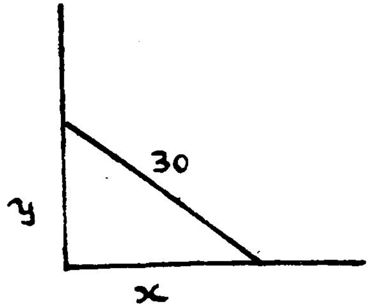
தீர்வு : (i) t என்ற கணத்தில் ஏணியில் கீழ்முனை சுவற்றிலிருந்து x தூரத்திலும் தரையிலிருந்து y தூரத்திலும் அமைகிறது என்க.

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = 900$$

t-ஐப் பொறுத்து வகையிடல் செய்ய

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \quad (\text{அது}) \; x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0$$

$\frac{dx}{dt} = 2x$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது



படம் 4·2.

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{2x^2}{y} = \frac{-2x^2}{\sqrt{900-x^2}}$$

$x = 10$ எனில் $\frac{dy}{dt} = -5\sqrt{2}$.

குறைக் குறியீடு, t வளர, y குறைவதைச் சுட்டுகிறது. எனவே மேல்முனை வினாடிக்கு $5\sqrt{2}$ அடி வீதம் இறங்குகிறது.

(ii) $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ (மட்டுமதிப்பில்) எனில்

$x = y$ (மட்டுமதிப்பில்)

(அது) $x^2 + x^2 = 300$

$\therefore$ $x = 15\sqrt{2}$ என்பது கேட்டுள்ள தூரம்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

20' உயரமுள்ள விளக்குக் கம்பத்திலிருந்து விலகி 6' அடி உயரமுள்ள மனிதன் மணிக்கு 4 மைல் வேகத்தில் நேர்கோட்டில் நடந்து செல்கிறுன். அவன் நிழலின் நீளம் எவ்வீதத்தில் அதிகரிக்கும் ?

தீர்வு : படத்தில் PQ விளக்குக் கம்பம்; t வினாடியில் மனிதன் நிலை AB. QB-ன் நீட்சி, PA-ன் நீட்சியை O ல் சந்திக்கிறது.

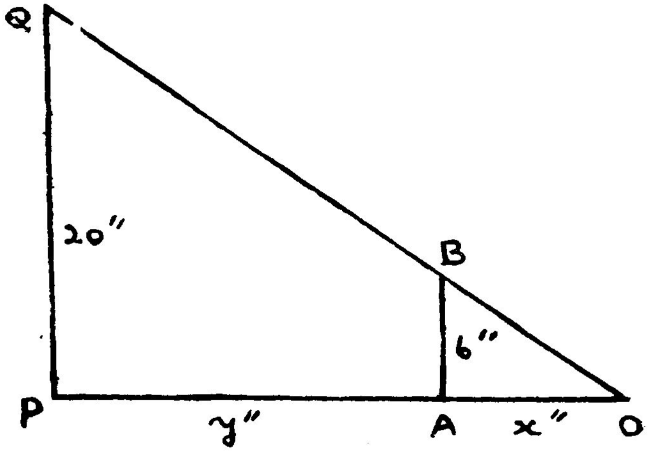
$\therefore$ AO = மனிதன் நிழல் = x என்க.

PA = y என்க

$\therefore$ PA மாற்ற வீதம் $\frac{dy}{dt}$

4 M.P.H. = $\frac{88}{15}$ அடி/விநாடி

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{88}{15}$



படம் 4·3.

△ OAB, △ OPQ வடிவொத்தன

$$\therefore \frac{OA}{OP} = \frac{AB}{PQ} = \frac{6}{20}$$

(அது) $\frac{x}{x+y} = \frac{3}{10}$

(அது) $7x = 3y$

t ஐப் பொறுத்து வகையிட $7\frac{dx}{dt} = 3\frac{dy}{dt}$

எனவே நிழல் வளர்ச்சி வீதம் $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{7}\frac{dy}{dt} = \frac{3}{7} \times \frac{88}{15}$

$\therefore$ இவ்வீதம் = $\frac{88}{35}$ அடி/விநாடி

பயிற்சிகள் 4 (A)

1. t விநாடிகளில் இடப்பெயர்ச்சி x ஆனது $x = 160\,t - 16\,t^2$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. $t = 1, t = 9$ எனும்போது திசைவேகங்கள் மதிப்பில் சமமாகவும் குறியீட்டில் எதிராகவும் இருக்கும் என நிறுவுக. இடப்பெயர்ச்சி 400 ஆக இருக்கும்போது திசைவேகம் பூச்சியம் என நிறுவுக.

2. திசைவேகமும் முடுக்கமும் கணக்கிடுக :

(i) $s = t^3 - 6t + 1$

(ii) $s = ut + \frac{1}{2}\,at^2$

(iii) $s = (2t + 3)^3$; $t = 2$ விநாடி எனில்

துகள் ஒன்று நேர்கோடு வழியே நகர்கிறது. நேர்கோட்டில் 0 என்ற நிலை 1 புள்ளியிலிருந்து t விநாடிகளில் அது கடந்து தூரம் $\frac{2}{3}\,t^2\,(3 - t)$.

(i) 0-லிருந்து எவ்வளவு நேரம் அது விலகிச் செல்லும்?

(ii) அதன் திசைவேகம் பூச்சியமாகும்போது 0-லிருந்து எவ்வளவு தூரத்தில் இருக்கும் ?

(iii) 0-க்கு திரும்பும்போது அதன் திசைவேகம் என்ன ?

4. t விநாடிகளில் ஒரு துகள் நேர்கோட்டில் பெற்ற இடப்பெயர்ச்சி x என்பது

$$x = at^2 + bt + c$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது. மேலும்

(i) ஒரு விநாடியில் அதன் இடப்பெயர்ச்சி 11 அடி

(ii) 2 விநாடிகளில் அதன் திசைவேகம் 16 அடி/விநாடி

(iii) முடுக்கம் 6 அடி/(விநாடி)^2

எனில் a, b, c காண்க.

5. t விநாடிகளில் ஒரு துகள் நேர்கோட்டில் கடந்த தூரம் $s = ae^t + be^{-t}$ என்பதால் அறியப்பட்டால் எப்போதும் முடுக்கமானது கடந்த தூரத்திற்கு சமமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

6. 64 அடி உயரமுள்ள ஒரு கோபுர உச்சியில் இருந்து மேல்நோக்கி எறியப்பட்ட கல் t விநாடிகளில் s அடி கடக்கிறது. $s = 48t - 16t^2$ என்றால்

(i) 1 விநாடி, 2 விநாடி, கிளம்பிய கணம் ஆகிய சமயங்களில் மேல்நோக்கிய திசைவேகம்

(ii) நிலையாக நிற்கும் நொடியில் நேரம் ; தரையிலிருந்து அடையப்படும் உச்ச உயரம்

(iii) தரையில் விழும்போது அதன் திசைவேகம் ஆகியன காண்க.

7. ஒரே புள்ளியில் கிளம்பி, நேர்கோட்டில் இரு துகள்கள் நகர்கின்றன. t நேரத்தில் அவை கடந்த தூரங்கள் முறையே பின்வருமாறு

$s_1 = 9 - t^2$, $s_2 = t^2 - 3t$ எப்போது இரு துகள்களும் ஒரே வேகம் பெற்றிருக்கும் ? எப்போது அவை மீண்டும் சந்திக்கும் ?

8. t என்னும் நேரத்தில் நேர்கோட்டில் நகரும் துகள் x தூரம் கடக்கும்.

$t = \sqrt{2ax - x^2} + 2a\cos^{-1}\sqrt{x/2a}$ எனில் திசைவேகத்தையும் முடுக்கத்தையும் x-ன் சார்பலன்களாகக் காண்.

9. செங்குத்து அச்சுக்களில் இருந்து ஒரு புள்ளியானது t விநாடிகளின் முடிவில் நகர்ந்த தூரங்கள் $x = a + e\cos t$, $y = b + e\sin t$ என்பனவற்றால் அறியப்படுகிறது. விளைவு (resultant) திசை வேகமும், முடுக்கமும் எண் மதிப்பில் மாறிலிகள் எனக் காட்டுக. புள்ளி நகரும் பாதையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

10. ஆதியிலிருந்து x தொலைவில் இருக்கும்போது நேர்கோட்டில் நகரும் புள்ளியின் திசை வேகமான v என்பது $a + bv^2 = x^2$ என்பதால் பெறப்படுகிறது எனில் முடுக்கம் $\frac{x}{b}$ என நிறுவுக.

11. 4 அடி விட்டமுள்ள நேர்வட்ட உருளைக்குள் தண்ணீர் விநாடிக்கு 10 கன அடி வீதம் பாய்கிறது. நீர் மட்டம் எந்த வீதத்தில் உயரும் ?

12. 20 அடி நீளமுள்ள ஏணி ஒரு முனை தரையிலும் ஒரு குத்தான சுவரிலும் படிய சார்த்தி வைக்கப்பட்டது. கீழ் முனை

தரை வழியே வழுக்கிச் செல்லுகிறது. கீழ் முனை சுவற்றிலிருந்து 16 அடி தொலைவில் இருக்கும்போது கீழ் முனை நகரும் வீதத்தைப் போல் 4/3 மடங்கு மேல் முனை நகரும் என நிறுவுக.

13. கோள வடிவத்தில் அமைந்த சோப் நுரையின் ஆரை r. அதன் ஆரை வளரும் வேகத்தைப்போல் $4\pi r^2$ மடங்கு வேகமாக பருமம் வளரும் என நிறுவுக.

14. கவிழ்த்து வைக்கப்பட்ட கூம்பின் அடி ஆரை 8''; ஆழம் 16''. நிமிடத்துக்கு 2·5 கன அங். வீதம் அதில் நீர் ஊற்றப்படுகிறது. நீர் ஆழம் 7'' ஆக இருக்கையில் நீர் மட்டம் உயரும் வீதம் $10/49\pi$ அங்/நிமிடம் என நிறுவுக.

15. அமைதியான ஏரியில் வீழ்ந்த கல் வட்டமான அலைகளை உண்டாக்குகிறது. வெளிவட்டத்தின் ஆரை விநாடிக்கு c அடி வீதம் வளர கல் விழுந்து t விநாடி கழித்து பரப்பு என்ன வீதத்தில் வளரும் ?

16. பரவளையத்தின் மேல் மையங்கொண்டு அதன் அச்சைத் தொடுமாறு வட்டங்கள் வரையப்படுகின்றன. பரவளையத்தின் உச்சியிலிருந்து வட்டம் அச்சைத் தொடும் புள்ளி மாறாத திசை வேகத்துடன் விலகிச் சென்றால் வட்டப் பரப்பின் வளர்ச்சி வீதமும் மாறிலி என நிறுவுக.

17. விளக்குக் கம்பத்திலிருந்து விலகி நேர்கோட்டில் b அடி உயரமுள்ள சிறுவன் நிமிடத்துக்கு c அடி வீதம் விலகிச் சென்றால் அவனது நிழலின் வளர்ச்சிவீதம் $\dfrac{bc}{a-b}$ அடி/விநாடி என நிறுவுக.

18. ஆகாய விமானத்தில் அமர்ந்துள்ள ராணுவப் பார்வையாளர் மணிக்கு a மைல் வீதத்தில் மேலே செல்கிறார். பூமியின் ஆரை r மைல்கள் எனில் பூமியினின்று புறப்பட்ட t நிமிடங்களுக்குப் பின்னர் அவர் கண்ணுக்கு புலனாகும் பூமிப் பரப்பு நிமிடத்துக்கு எத்தனை சதுர மைல் வீதத்தில் அதிகரிக்கிறது ?

விடைகள் 4 (A)

2. (i) $3t^2-6$; $6t$ (ii) $u+at$; a (iii) 147, 42

3. (i) 2 விநாடி (ii) 8/3 (iii) −6

4. $a=3$; $b=c=4$

6. (i) 16 அடி/விஞடி; -16 அடி/விஞடி; 48 அடி/விஞடி

(ii) $t = 1{\cdot}5$ விஞடி, $s = 100$ அடி (iii) 80 அடி (விஞடி$)^2$

7. $\frac{3}{4}$; 3

8. $-\sqrt{\dfrac{2a-x}{x}}$; $-\dfrac{a}{x^2}$

9. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$

11. $5/2\pi$ அடி/விஞடி

12. $2\pi c^2 t$ ச.அடி/விஞடி

18. $\dfrac{120\ \pi\ ar^3}{(60r+at)^2}$ சதுர மைல்/விஞடி

§ 4-3. வளைகோட்டின் சாய்வு வீதம்

ஒரு வளைகோட்டுக்கு அதன் புள்ளியொன்றில் சாய்வு வீதம் (slope) என்பது அப்புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் என வரையறை செய்வோம். இனி தொடுகோடு என்பதன் வரையறை கூறுமுனைவோம். வளைகோட்டில் $P(x_1, y_1)$, $Q(x_1+h, y_1+k)$ என்பன இரு அணித்தான புள்ளிகள் என்க. Q வளைகோட்டிலேயே அமைய, $Q \longrightarrow P$ என்ற எல்லையில் PQ என்ற கோட்டின் எல்லை நிலைதான் P-ல் தொடுகோடு ஆகும்; $y = f(x)$ என்பது வளைகோடெனில்

$$P\,Q\text{-ன் சாய்வு வீதம் } \frac{(y_1+k)-y_1}{(x_1+h)-x_1}$$

$$= \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

எனவே $Q \longrightarrow P$ எனில் $x_1 + h \longrightarrow x_1$ அது $h \longrightarrow 0$

$$\text{அப்போது } \underset{h \longrightarrow 0}{Lt} \frac{f(x_1+h) - f(x)}{h} = f'(x_1)$$

எனவே, $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டுடைய சாய்வு வீதம், x_1 என்ற புள்ளியில் $f(x)$-ன் வகைக் கெழுவான $f'(x_1)$

ஆகவே : (x_1, y_1)-ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

இங்கே $m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

குறிப்பு : இக்கருத்து தொடுகோடு, வரைச் செங்கோடு பற்றிய அத்தியாயத்தில் (8) மேலும் விரித்துரைக்கப்படும்.

§ 4-4. வகைக்கெழுவின் குறியீட்டுக் கருத்துப் பொருள்

$y = f(x)$ என்ற சார்பலனைக் கருதுக. $x = a$-ல் அதன் மதிப்பு $f(a)$. x-க்கு சிறிய மிகைக் கூடுந்தொகை ஒன்று தர $f(x)$ ஆனது $f(a)$-ஐ விடப் பெரிதாகவோ அல்லது சிறிதாகவோ இருக்கலாம். $f(x) > f(a)$ எனில், $x = a$-ல், $f(x)$ ஆனது x உடன் வளர்கிறது (increases) என்போம். இங்கே கூடுந்தொகை சிறியது என்பதை வலியுறுத்துகிறோம். இன்னும் நுணுக்கமாகக் கூறுவதானால், $x = a$-ல் $f(x)$ ஆனது x உடன் வளர்கிறது என்பதன் பொருள் $0 < h < h_1$ எனில் $f(a + h) > f(a)$ ஆக இருக்குமாறு h_1 என்ற மிகை எண் உளதாகிறது என்பதாகும். அதாவது போதிய அளவு சிறிய (மிகை) h மதிப்புகளுக்கு $f(a + h) > f(a)$

தேற்றம் : (i) $x = a$-ல், $y = f(x)$-ன் வகைக்கெழு $\frac{dy}{dx}$ மிகையெனில், $x = a$-ல் y ஆனது x உடன் வளர்கிறது.

(ii) $x = a$-ல், $\frac{dy}{dx}$ குறையெனில் x வரை y குறைகிறது.

நிறுவல் :

(i) $x = a$-ல் $\frac{dy}{dx}$ மிகையெனில்

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

ஆனது போதிய அளவு சிறு h-க்கு மிகையாகும். (அது) $|h|$ போதிய அளவு சிறிதாக இருப்பின்

h மிகையெனில் $f(a + h) - f(a)$ மிகை;

h குறையெனில் $f(a + h) - f(a)$ குறை.

(அது) $x = a$-ல் x உடன் $f(x)$ வளர்கிறது.

(ii) முன் கூறியதை ஒத்து

$x = a$-ல் $\frac{dy}{dx}$ குறையெனில்

x வரை, $f(x)$ குறையும் என நிறுவலாம்.

குறிப்பு :

$x = a$-ல் $\frac{dy}{dx} = 0$ எனில்

$f(x)$ வளரவுமில்லை. குறையவுமில்லை. அப்போது $f(x)$ அங்கே நிலை பெறுவதாக (stationary) கூறுவோம். அத்தகைய புள்ளிகள் பற்றி பெருமம், சிறுமம் அத்தியாயத்தில் (12) விளக்கம் கூறுவோம்.

குறிப்பு 2 : $a \leq x \leq b$ எனில் $f'(x) > 0$ எனில் இந்த இடைவெளியில் $f(x)$ வளரும் சார்பலன் என்போம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 6 : $f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$ என்ற சார்பலன் x-உடன் வளர்வதற்கு x மதிப்புகளின் அரங்கு காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 36x + 7$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 36$$

$$= 3(x - 6)(x + 2)$$

$f'(x) > 0$ எனில்

(i) $x - 6 > 0$ அத்தோடு $x + 2 > 0$

(அது) $x > 6$, அத்தோடு $x > -2$.

அல்லது

(ii) $x - 6 < 0$ அத்தோடு $x + 2 < 0$

(அது) $x < 6$, அத்தோடு $x < -2$

எனவே $x > 6$ அல்லது $x < -2$ எனில் x உடன், $f(x)$ வளரும்.

§ 4-5. சமன்பாட்டில் மீண்டும் வரும் மூலங்களைத் தீர்வு காணும் முறை

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots\dots + a_2$ என்ற n படி பல்லுறுப்புக் கோவையைக் கருதுக.

$f(x) = 0$-ன்

மூலங்கள் $\alpha_1, \alpha_2, \dots\dots \alpha_n$ என்க.

அப்போது $f(x) = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots\dots (x - \alpha n)$

இம்மூலங்களில் இரண்டு $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ என்க.

அப்போது $f(x) = (x - \alpha)^2 f(x)$ ...... (1

என ஆகும்; இங்கே $g(x)$ ஆனது $n-2$ படியில் பல்லுறுப்புக் கோவை.

(i) ஐ வகையிட

$$f'(x) = 2(x - \alpha) g(x) + (x - \alpha)^2 g'(x)$$
$$= (x - \alpha) [2g(x) + (x - \alpha) g'(x)]$$

எனவே $x = \alpha$ என்பது $f'(x) = 0$-ன் மூலம் எனத் தெரிகிறது.

அதாவது $f(x) = 0$-ல் இருமுறை வரும் மூலம் $f'(x) = 0$-ல் ஒரு முறை வரும் மூலம். இன்னும் பொதுவாகக் கூறுவதானால் $f'(x) = 0$-ல் m முறை வரும் மூலம் $f'(x) = 0$ ல் $(m - 1)$ முறை வரும் மூலம்.

எனவே $f(x), f'(x)$ என்பனவற்றின் உத்தமப் பொது மடங்கைக் காண்பதன் மூலம் இத்தகைய மூலங்களைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x^3 + x^2 - 16x + 20 = 0$-ல் மீண்டும் வரும் மூலங்கள் உள்ளன எனில் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x^3 + x^2 - 16x + 20$$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 16$$

$f(x), f'(x)$-ன் உ. பொ. ம. $(x - 2)$

எனவே $(x - 2)^2$ என்பது $f'(x)$-ன் காரணி; வகுத்தல் மூலம் எஞ்சிய காரணி $x + 5$ $\therefore$ $f(x) = 0$-ன் மூலங்கள் 2, 2, —5.

பயிற்சிகள் 4 (B)

1. தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதத்தைப் பயன்படுத்தி x ஐ பொருத்த y-ன் வளர்ச்சி பற்றிய விளக்கம் தருக.

(i) $\frac{dy}{dx} > 0$

(ii) $\frac{dy}{dt} < 0$

(iii) $\frac{dy}{dx} = 0$.

2. $y = x^3$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் கண்டு சமன்பாடும் காண்க.

3. $y = x^3 - 2x + 1$ என்ற வளைகோட்டில் $(2, 5)$ என்ற புள்ளியில் x ஐப் போல 12 மடங்கு அதிகமாக சாய்வு வீதம் வளர்கிறது என நிறுவுக.

4. $2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ என்ற சார்பலன் வளர்கிற, குறைகிற இடைவெளிகளை பிரித்துக் காட்டி வரை படம் மூலம் சரிபார்க்க.

5. $x = -\infty$ லிருந்து $x = +\infty$ வரை x^3 வளருமென்றும், $x = -\infty$ லிருந்து, $x = 0$ வரை x^4 குறையும் என்றும் பின் வளருமென்றும் நிறுவுக.

6. a, b, c, d என்பன மாறிலிகளாக எல்லா x மதிப்புகளுக்குமே

x வரை $\frac{a \sin x + b \cos x}{c \sin x + d \cos x}$ வளரும் அல்லது குறையும் என நிறுவுக.

7. $0 < x < \frac{\pi}{2}$ எனில் நிறுவுக.

(i) x தொடர்ந்து வளர, $\frac{\sin x}{x}$ தொடர்ந்து குறையும்

(ii) $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$

(iii) $1-\dfrac{x^2}{2!} < \cos x < 1-\dfrac{x^3}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}$

8. $x > 0$ எனில்

$$x > \log(1+x) > x - \tfrac{1}{2}x^2$$

என நிறுவுக.

9. $x^4 - x^3 - x + 1 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு இரு முறை வரும் மூலம் உண்டெனில் சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்க.

10. மீண்டும் வரும் மூலங்களைக் கொண்ட பின்வரும் சமன் பாடுகளைத் தீர்வு காண்க.

(i) $x^5 - 10x^2 + 15x - 6 = 0$

(ii) $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 7x + 6 = 0$

(iii) $8x^4 - 20x^3 + 18x^2 - 7x + 1 = 0$

11. $x^3 + x^2 + ax + b = 0$ என்ற சமன்பாடு இருமுறை வரும் மூலத்தைக் கொண்டிருக்க a, b இடையே என்ன தொடர்பு?

விடைகள் 4 (B)

1. தொடுகோடு x அச்சுடன் உண்டாக்கும் கோணம்

(i) குறுங்கோணம், (ii) விரிகோணம்

(iii) $0°$ (அது) தொடுகோடும் x அச்சும் இணை.

2. 1; $4y - 4x + 1 = 0$

9. $1, 1, -\frac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - \dfrac{i\sqrt{3}}{2}$

10. (i) $1, 1, 1, (-3 \pm \sqrt{-15})^2/2$

(ii) $1, 1, -3, 2$

(iii) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1.$

11. $4(3a-1)(3b-a^2) = (a-9b)^2$

§ 4·60 தோராயமான கணிப்புகள்

$y = f(x)$ என்ற சார்பலனில் முன்பு கூறிய வரையறைகளை நினைவு கூர்க.

x-ல் கூடுந்தொகை $= \triangle x$

y-ல் கூடுந்தொகை $= \triangle y$

x-ல் வகையீடு $= dx = \triangle x$

y-ல் வகையீடு $= dy = f'(x) \triangle x = f'(x) dx$

மேலும்

$f'(x)$ க்கு வரையறையாக

$$\underset{\triangle x \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x)$$

எனக் கூறினோம். எனவே

$$\frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = f'(x) + \epsilon$$

என எழுதலாம்; இங்கே $\triangle x \longrightarrow 0$ எனில், $\epsilon \longrightarrow 0$

$$\therefore \quad \triangle y = f(x + \triangle x) - f(x) = f'(x) \triangle x + \epsilon \triangle x$$

$\triangle x$ ஐப் போதிய அளவு சிறியதாக எடுக்க, ϵ. $\triangle x$ மிகச் சிறிதாக ஆகுமாதலால்

$\triangle y$ க்கு தோராய மதிப்பாக $f'(x) \triangle x = dy$ ஐக் கருதலாம்.

அதாவது தனித்த மாறியான x-ல் கூடுந்தொகை சிறியதாயின் தோராயமாக

சார்பின் கூடுந்தொகை = சார்பின் வகையீடு.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$y = \frac{x^2}{2} + 3x, x = 2, \triangle x = \cdot 5$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$dx, \triangle y, dy, \triangle y - dy$ கணக்கிடுக.

தீர்வு : $dx = \triangle x = .5$

$x = 2, \triangle x = \cdot 5$ எனில் $\triangle y = \frac{(x + \triangle x)^2}{2} + 3(x + \triangle x)$

$$= -\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)$$

$$= \frac{(2 \cdot 5)^2}{2} + 3\,(2 \cdot 5)$$

$$= -\left(\frac{2^2}{2} + 3\,.\,2\right)$$

$$= 2\,.\,625$$

$$dy = \frac{dy}{dx}\,.\,dx$$

$$= (x + 3)\,dx$$

$$= (2 + 3)\,(.\,5) = 2\,.\,5$$

$$\triangle y - dy = 2 \cdot 625 - 2 \cdot 5 = 0 \cdot 125$$

எடுத்துக்காட்டு 9 : 12 செ.மீ. வெளிவிட்டமும் $\frac{1}{16}$ செ. மீ. கனமும் உடைய கோளக்கூட்டின் தோராய பருமம் கணக்கிடுக.

தீர்வு : பருமம் $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (r ஆரை) சரியான பரும மதிப்பு

$\triangle V = 6$ செ. மீ. ஆரைக்கோளபருமம்

$- 5\frac{15}{16}$ செ.மீ. ஆரைக்கோளபருமம்

$\triangle V$-ன் தோராயமதிப்பு dV

$$dV = \frac{dV}{dr}\,.\,dr = \left(\frac{4}{3}\,\pi\,.\,3r^2\right)\,.\,dr$$

$r = 6,\ dr = -\frac{1}{16}$ எனப் பிரதியிட

$$dV = 4\pi\,.\,6^2\left(-\frac{1}{16}\right)$$

$$= -9\pi$$

$$= -9 \times \frac{22}{7} = -\frac{198}{7} = -28 \cdot 3$$

$\therefore$ தோராயமான பருமம் $28 \cdot 3$ கன செமீ

§ 4-6·1. பிழைகள் (Errors)

தனித்த மாறியில் ஏற்படும் சிறு பிழைகளை கூடுந்தொகைகளாகக் கருதலாம். தனித்தமாறியில் ஏற்படும் சிறு பிழையினால் சார்பிலும் பிழைகள் நேரும். இத்தகைய சிறு பிழைகளைக் கணிக்க முற்படும்போது சிறு பிழைகளுக்கு தோராயமாக வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

வரையறை

x-ல் ஏற்படும் பிழை dx எனில்

dx என்பது தனிப்பிழை (absolute error)

$\frac{dx}{x}$ என்பது சார்பிழை (relative error)

$\frac{dx}{x} \times 100$ என்பது சதவீதப் பிழை (percentage error)

எடுத்துக்காட்டாக 10″ நீளத்தை அளக்கையில்

·03″ என்ற பிழை ஏற்பட்டால்

·03″ என்பது தனிப்பிழை

.003 என்பது சார்பிழை

.3% என்பது சதவீதப் பிழை

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ என்ற வாய்ப்பாட்டில், g மாறிலி. l-ன் மதிப்பில் 2% பிழை ஏற்பட, T ல் ஏற்படும் பிழை என்ன?

தீர்வு : $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

என்பதை மடக்கை எடுத்து வகையீடு காண

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{2}\,\frac{dl}{l}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{100} = \frac{1}{100}$$

எனவே T-ல் சதவீதப்பிழை $\frac{dT}{T} \times 100 = 1\%$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$\log_{10} e = .4343$ எனில்

$\log 10 \cdot 01$ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு : $d(\log_{10} x) = d(\log_e x \times \log_{10} e)$

$$= \frac{1}{x} \cdot \log_{10} e \cdot dx$$

$x = 10, \ \log_{10} e = \cdot 4343, \ dx = \cdot 01$ என்பதால்

$$d(\log_{10} x) = \frac{\cdot 4343 \times \cdot 01}{10}$$

$$= \cdot 000\,4343$$

$$\therefore \log_{10}(10\cdot 01) = \log_{10} 10 + \cdot 000\,4343$$

$$= 1 \cdot 000\,4343$$

எடுத்துக்காட்டு 12 ;

வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி

$\sin 60^\circ\ 1'$ ன் தோராயமதிப்பு காண்க.

தீர்வு : $60^\circ = \frac{\pi}{3}$ ஆரையன் ; $1' = \cdot 0003$ ஆரையன்.

$\therefore x = \frac{\pi}{3} \quad dx = \cdot 0003.$

$$y = \sin x = \sin \frac{\pi}{3} = \cdot 86603$$

$$dy = \cos x \, dx$$

$$= (\cdot 5)(\cdot 000\,3) = \cdot 00015$$

$$\therefore \sin 60^\circ\ 1' = \sin 60^\circ + \cdot 000\,15$$

$$= \cdot 86603 + \cdot 000\,15$$

$= 86618$ (தோராயமா

§ 4·6·2. நியூட்டன் முறை மூலம் சமன்பாடுகளுக்கு மூலங்களுக்குத் தோராயமாகக் காணல்

$f(x) = 0$-க்கு உள்ள ஒரு மூலம் α என்று தோராயமாகத் தெரிந்தால் அதனைப் பின்னும் திருத்தமாகக் காணும் முறை பின் வருமாறு :

α என்பது $f(x) = 0$-ன் தீர்வுக்கு தோராய மதிப்பென்றால் $\alpha + h$ என்பது செம்மையான மதிப்பு என்க.

(அது) $f(\alpha + h) = 0$

h சிறிதாதலாலும், α-ன் கூடுந்தொகையாதலாலும்

$$d(f(x)) = f'(x) \cdot h \text{ (தோராயமாக)}$$

(அது) $f(\alpha + h) - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot h$

$f(\alpha + h) = 0$ ஆதலால்

$$h = -\frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

இதிலிருந்து h தோராயமாக தீர்மானமாகும்

இதனை α உடன் சேர்க்க $\alpha + h$ என்ற மதிப்பு மூலமாக கிடைக்கிறது.

$\alpha + h$ என்பது α-ஐ விட மூலத்துக்கு திருந்திய மதிப்பு.

$(\alpha + h)$-க்கு h' சேர்த்து $(\alpha + h) + h'$ என்பது செம்மையான தீர்வு எனக்கொண்டு முன்புபோலவே h' கணக்கிடலாம்

$(\alpha + h) + h'$, $(\alpha + h)$ ஐ விடத்திருந்திய மதிப்பு. இவ்வாறே வேண்டிய அளவுக்கு திருத்தமாக மூலத்தை தோராயமாகக் கணிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$x^4 - 12x + 7 = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தோரயமாக 2 என்ற மதிப்புடைய மூலம் உள்ளது எனில் அதனைக் காண்க.

தீர்வு : மூலத்தை $2 + h$ என எடுத்துக் கொண்டால் h என்பது திருத்தம்

$$h = -\frac{f(2)}{f'(2)}$$

$$f(x) = x^4 - 12x + 7 \quad \therefore f(2) = -1$$

$$f'(x) = 4x^3 - 12 \qquad \therefore f'(2) = 20$$

எனவே $h = -\frac{(-1)}{20} = \frac{1}{20} = \cdot 05$

$\therefore$ மூலம் தோராயமாக $2 \cdot 05$

[இன்னும் திருத்தம் வேண்டுமெனில் இதே முறையை மீண்டும் மீண்டும் கையாளுக.]

பயிற்சிகள் 4 (C)

1. பின் வரும் சார்பலன்களுக்கு

$d f(x)$ கணக்கிடுக

(i) $f(x) = x^4 + \log x + \sin^2 \pi x$

(ii) $f(x) = 8\, e^{-x/2} \tan^{-1} 2x$

(iii) $f(x) = x \sin^{-1} 3x$

2. $y = 2x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ எனவும் $x = 2$, $\triangle x = .1$ என்றும் தரப்பட்டால் $\triangle y$, dy காண்க.

3. ஒரு எண்ணில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையைப் போல $\frac{1}{n}$ மடங்கு சதவீதப் பிழை அந்த எண்ணின் n படி மூலத்தில் ஏற்படும் என நிறுவுக.

4. ஒரு கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் மாறாது இருக்க, உயரம் a சதவீதம் வளர்கிறது. a சிறிதெனக் கொண்டு

(i) மொத்தப் பரப்பிலும்

(ii) பருமத்திலும்

ஏற்படும் சதவீத வளர்ச்சியை தோராயமாகக் காண்க.

5. $\sin \phi = \mu \sin \psi$ என்ற வாய்ப்பாடில் μ மாறிலி. ϕ ஆனது $60°$-லிருந்து $59° 50'$ ஆக மாற, ψ-ன் மதிப்பு $45°$-லிருந்து எதுவாக மாறும் ?

6. செவ்வகக் கோணமானி A B C D-ல் AB = 6″ ; BC = 2″ AB-ன் மையப்புள்ளி 0. ∠ BOP என்ற கோணம் CD என்ற பக்கத்தில் P என்ற புள்ளியால் குறிப்பிடப்படுகிறது. θ என்ற கோணத்தைக் குறிக்கும்போது சரியான இடத்திலிருந்து புள்ளி CD பக்கத்தில் $\frac{1''}{100}$ விலகி விட்டதால் கோணத்தில் ஏற்படும் பிழை $\frac{9 \sin^2 \theta}{10 \pi}$ பாகை (தோராயமாக) என நிறுவுக.

7. r ஆரை உள்ள கோளம் காற்றில் w_1 நிறையும் தண்ணீரில் w_2 நிறையும் உள்ளது. இந்த நிறைகளில் உள்ள சிறு பிழைகள் காரணமாக சார்பிழை

$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta w_1 - \Delta w_2}{3 (w_1 - w_2)}$ என்ற சமன்பாடால் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

8. $\log_e 4 = 1 \cdot 3863$ எனில் $\log_e 4 \cdot 01 = 1 \cdot 3888$ என நிறுவுக.

9. $\log_{10} 4 = 0 \cdot 6021$, $\log_{10} x = 0 \cdot 4343 \log_e x$ எனத் தரப் பட்டால் $\log_{10} 404$-ன் தோராய மதிப்பு என்ன ?

10. வகையீடுகளைப் பயன்படுத்தி தோராய மதிப்புகள் காண்க.

(i) $5\sqrt{33}$ (ii) $3\sqrt{101}$

(iii) $\log_e 10 \cdot 1$ ($\log_e 10 = 2 \cdot 303$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது)

(iv) $\sin 62°$ ($\sin 60° = \cdot 86603$)

(v) $\cos 61°$ ($\cos 60° = \cdot 5$)

(vi) $\sin 59°$ $1° = \cdot 01745$ ஆரையன்

(vii) $\cos 58°$

11. $x^4 - 12x^2 - 12x - 0$-ன் மூலமொன்று தோராயமாக 4 எனில் அதனைக் காண்க.

12. $x^3 - 5x - 5 = 0$-ன் மூலமொன்று தோராயமாக 3 என்றால் அதனை 2·7 என்றும் மேலும் செம்மைப் படுத்தி 2·63 என்றும் நிறுவுக.

13. $x^4 + 10x - 100 = 0$-ன் மூலமொன்று தோராயமாக 3 என்றால் இரண்டு தசமஸ்தானத்துக்கு திருத்தமாக அதனைக் கணக்கிடுக.

14. $\sin x = a x$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x = \pi$ என்பது தோராய மூல மதிப்பு என்று துவங்கி செம்மைப் படுத்திய தோராய மதிப்பு $x = (1 - a + a^2)\pi$ என நிறுவுக.

விடைகள் 4 (C)

1. (i) $\left(4x^3 + \frac{1}{x} + 3\pi \sin^2 \pi x \cos \pi x\right) dx$

   (ii) $\left(-4 e^{-x/2} + \frac{2}{1 + 4x^2}\right) dx$

   (iii) $\left(\sin^{-1} 3x + \frac{3x}{\sqrt{1 - 9x^2}}\right) dx$

2. 2·002; 1·9.

4. $2a$, $3a$

5. 5′ 46″ குறையும்

9. 0·6064

10. (i) 2·01235
    (ii) 4·6570
    (iii) 2 313
    (iv) ·8835
    (v) ·4849
    (vi) .8573
    (vii) ·5302

11. 3·91

13. 2·90

5. தொடர் வகைக்கெழு

§ 5-0 வரையறைகள்

y என்பது x-ன் வகையிடத்தக்க சார்பலன் என்க. $\frac{dy}{dx}$ என்ற அதன் வகைக் கெழுவும் x-ன் சார்பலனே. இதற்கு வகைக்கெழு உண்டெனக் கொண்டால், $\frac{dy}{dx}$-ஐ வகையிடல் செய்து பெறு வதை இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழு (second derivative or second differential coefficient) என்போம்.

இதனை $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ என்றோ அல்லது சுருக்கமாக $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்றோ குறிப்பிடுவோம். $y = f(x)$ எனில் இரண்டாம் வகைக்கெழுவை

y'', y_2, $f''(x)$, D^2y

என்ற குறியீடுகளாலும் குறிப்பிடுவது உண்டு.

மறுபடியும் இரண்டாம் வகைக் கெழுவை வகையிடல் செய்ய முடியுமானால் மூன்றாம் வகைக்கெழு கிடைக்கும். இதனை

$\frac{d^3y}{dx^3}$, y''', y_3, $f'''(x)$, D^3y

என்ற குறியீடுகளால் குறிப்பிடுகிறோம்.

இவ்வாறே மேல்வரிசை வகைக்கெழுக்களை தொடர் வகையிடல் (successive differentiation) மூலம் வரையறை செய்யலாம்.

n வரிசை வகைக் கெழுவை

$\frac{d^ny}{dy_n}$, $y^{(n)}$, y_n, $f^{(n)}(x)$; D^ny

போன்ற குறியீடுகளால் குறிப்போம்.

§ 5-1. *n* வரிசை வகைக் கெழுக்கள் சில

(i) $D^n (ax + b)^m$

$$y = (ax + b)^m$$
$$y_1 = ma\,(ax + b)^{m-1}$$
$$y_2 = m(m-1)\,a^2\,(ax + b)^{m-2}$$
$$y_3 = m(m-1)(m-2)\,a^3\,(ax + b)^{m-3}$$
$$\vdots$$
$$y_n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)\,a^n(ax + b)^{m-n}$$

m மிகை முழு எண்ணாக இருக்கும்போது y_n கீழ்கண்டவாறு எழுதப் படலாம்.

$$\frac{m!}{(m-n)!}\,a^n\,(ax + b)^{m-n}$$

இங்கே $(ax + b)^m$-ன் *m* வரிசை வகைபீட்டுக்கெழு மாறிலியான $m!\,a^m$, $(m+1)$ வரிசை வகைக்கெழு, அதன் பிற மேல் வரிசை வகைக் கெழுக்கள் எல்லாம் பூச்சியமாகும்.

கிளை 1 : $m = -1$ எனப் பிரதியிட

$$y_n = (-1)(-2)\ldots\ldots(-n)\,a^n\,(ax + b)^{-1-n}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{1}{ax + b}\right) = \frac{(-1)^n\,(n!)\,a^n}{(ax + b)^{n+1}}$$

கிளை 2 : $y = \log(ax + b)$ எனக் கொள்க.

$$y_1 = \frac{a}{ax + b}$$

$$y_n = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\;a^n}{(ax + b)^n}$$

எனவே,

$$\frac{d^n\{\log(ax + b)\}}{dx^n} = \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,a^n}{(ax + b)^n}$$

(ii) $D^n a^{mx}$.

$$y = a^{mx}$$
$$y_1 = m a^{mx} \log a$$
$$y_2 = m^2 a^{mx} (\log a)^2$$

$$y_n = m^n a^{mx} (\log a)^n$$

இனி : a க்கு பதிலாக e ஐப் பிரதியிட,

$$\frac{d^n (e^{mx})}{dx^n} = m^n e^{mx}$$

(iii) $D^n \sin(ax + b)$

$$y = \sin(ax + b)$$
$$y_1 = a \cos(ax + b) = a \sin(ax + b + \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$y_2 = a^2 \cos(ax + b + \tfrac{1}{2}\pi) = a^2 \sin(ax + b + \tfrac{2}{2}\pi)$$
$$y_3 = a^3 \cos(ax + b + \tfrac{2}{2}\pi) = a^3 \sin(ax + b + \tfrac{3}{2}\pi)$$

எனவே

$$\frac{d^n \sin(ax + b)}{dx^n} = a^n \sin\left[ax + b + \frac{n\pi}{2}\right]$$

(iv) இவ்வாறே,

$$\frac{d^n \cos(ax + b)}{dx^n} = a^n \cos\left[ax + b + \frac{n\pi}{2}\right]$$

குறிப்பு : sin, cos பெருக்கல்களாகவும், படிகளாகவும், $\sin mx$, $\cos nx$, $\sin^2 mx$ போன்ற அமைப்புக்களிலிருக்கும் சார்பலன்களை வகையீடு செய்ய பின்வருவன போன்ற ஏற்ற கோண கணித வாய்பாடுகளைப் பயன்படுத்துக.

$$\sin mx \cos nx = \tfrac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

$$\sin mx \,.\, \sin nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\cos mx \,.\, \cos nx = \tfrac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

$$\sin mx \,.\, \cos mx = \tfrac{1}{2}\sin 2mx.$$

$$\sin^2 mx = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2mx)$$

$$\cos^2 mx = \tfrac{1}{2}(1+\cos 2mx)$$

$$\sin^3 mx = \tfrac{1}{4}(3\sin mx - \sin 3mx)$$

$$\cos^3 mx = \tfrac{1}{4}(3\cos mx + \cos 3mx)$$

இவ்வாறு கோண கணித வாய்ப்பாடுகளைப் பயன்படுத்தி எளிமையான அமைப்பில் எழுதிய பின் n வரிசை வகையீடு காணலாம். எடுத்துக்காட்டாக,

$$y = \sin 5x \cos 3x \text{ எனில்,}$$

$$y = \tfrac{1}{2}\{\sin 8x + \sin 2x\}$$

$$\therefore y_1 = \tfrac{1}{2}\left\{8\sin\left(\frac{\pi}{2} + 8x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right\}$$

$$y_2 = \tfrac{1}{2}\left\{8^2\sin\left(2\,\frac{\pi}{2} + 8x\right) + 2^2\sin\left(2\,\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right\}$$

$$\vdots$$

$$y_n = \tfrac{1}{2}\left\{8^n\sin\left(n\,\frac{\pi}{2} + 8x\right) + 2^n\sin\left(n\,\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right\}$$

(v) $D^n e^{ax}\sin(bx+c)$

$$y = e^{ax}\sin(bx+c)$$

$$y_1 = a\,e^{ax}\sin(bx+c) + e^{ax}\,b\cos(bx+c)$$

$$= e^{ax}[a\sin(bx+c) + b\cos(bx+c)]$$

y ஐத் தேவைப்பட்டவாறு பொதுமைப்படுத்த நாம் r, ϕ என்ற இரண்டு மாறிலிகளை $a = r\cos\phi$, $b = r\sin\phi$ என்றிருக்குமாறு கண்டுபிடிக்கிறோம்.

எனவே,

$$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}\ ; \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

எனவே $y_1 = r\, e^{ax} \sin\ (b\,x + c + \phi)$

இவ்வாறு y-ஐ r என்ற மாறிலியினுல் பெருக்கி, கோணத்தை ϕ என்ற மாறிலியைக் கூட்டுவதன் மூலம் அதிகரித்து y-ஐப் பெறலாம்.

இவ்வாறே

$$y_2 = r^2\, e^{ax} \sin\,(bx + c + 2\phi)$$

இவ்வாறே

$$\frac{d^n\,[e^{ax}\,\sin\,(bx + c)]}{dx^n} = r^n\, e^{ax}\,\sin\,(bx + c + n)$$

இங்கே $r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$; $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$

(iv) இவ்வாறே,

$$\frac{d^n\,[e^{ax}\,\cos\,(bx + c)]}{dx^n} = (a^2 + b^2)^{1/2\ n}\, e^{ax} \times \cos\,(bx + c + n\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

§ 5-2. பகுதிப் பின்னங்களைப் பயன்படுத்தி n வரிசை வகையீடு காணுதல்

பல எளிய பின்னங்களின் கூடுதல் தொகையாக ஒரே பின்னத்தைத் தீர்மானம் செய்வது எவ்வாறென நாம் அறிவோம்.

இதற்கு மறுதலையாக,

விகிதமுறு இயற்கணித சார்பலன் ஒன்று தரப்பட்டால் அதனை முதலில் பகுதி பின்னங்களாகப் (partial fractions) பிரிக்கலாம் (இயற்கணித நூல்கள் பார்க்கவும்).

எனவே விகிதமுறு இயற்கணித சார்பலன் ஒன்றின் n வரிசை வகைக்கெழு காணவேண்டுமாயின் அதனை முதலில் பகுதி பின்னங்

களாகப் பிரித்துக் கொண்டு பின், ஒவ்வொரு உறுப்புக்கும் n வரிசை வகையீடு காணவேண்டும்.

குறிப்பு ; சில சமயங்களில் கொடுக்கப்பட்ட இயற்கணித பின்னத்தின் பின்னக் கீழ் பகுதியை மெய்யான ஒரு படிக் காரணிகளாகப் பிரிக்க முடியாமல் போகலாம். அச் சமயங்களில் டிமோவியர் தேற்றத்தைப் (De-Moivre's theorem) பயன் படுத்தி அப்பின்னக் கீழ்பகுதியைக் கற்பனைக் காரணிகளாகப் பிரித்துக் கொள்வது பொருத்தமாக இருக்கும்.
டிமோவியர் தேற்றமாவது,

n-ன் எல்லா விகிதமுறு மதிப்புகளுக்கும் (மிகை, குறை)

$$(\cos \theta \pm i \sin \theta)^n = \cos n\theta \pm i \sin n\theta.$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ எனில்}$$

$2y_1 \; y_3 = 3y_2^2$ எனவும் $a + d = 0$ ஆக இருக்கும்போது $(y - x)\, y_2 = 2y_1\,(1 + y_1)$ எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு : $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ என்பதை சாதாரண வகுத்தல் மூலம்

$$y = \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cx + d} \text{ என எழுதுக.}$$

$b - \dfrac{ad}{c} = k \; (1)$ எனக் கொண்டால்

$$y = \frac{a}{c} + k\,(cx + d)^{-1}$$

$$y_1 = -k\,(cx + d)^{-2}.\; c = -kc\,(cx + d)^{-2}$$

$$y_2 = -kc\,(-2)\,(cx + d)^{-3}.\, c = 2\,kc^2\,(cx + d)^{-3}$$

$$y_3 = 2\,kc^2\,(-3)\,(cx + d)^{-4} \cdot c = -6\,kc^3\,(cx + d)^{-4}$$

$$\therefore 2\,y_1\,y_3 = 12\,k^2\,c^4\,(cx + d)^{-6} = 3y_2^2$$

மேலும் $2y_1(1+y_1) = \frac{-2kc}{(cx+d)^4}\left[1-\frac{kc}{(cx+d)^2}\right]$

$$= -\frac{2kc}{(cx+d)^4}[c^2x^2+d^2+2cxd-bc-d^2]$$

($\because a+d=0$ ஆதலால் $a=-d$ எனப் பிரதியிடுக.

(1) ஐப் பயன்படுத்துக,

$$= \frac{-2kc^2}{(cx+d)^4}[cx^2+2xd-b]$$

$$(y-x)y_2 = \left[\frac{ax+b}{cx+d}-x\right]\left[\frac{2kc^2}{(cx+d)^3}\right]$$

$$= \frac{2kc^2}{(cx+d)^4}[ax+b-cx^2-dx] = \frac{2kc^2}{(cx+d)^4}$$

$$[-dx+b-cx^2-dx]$$

($a=-d$ ஆதலால் $ax=-dx$ எனப் பிரதியிடுக).

$$= -\frac{2kc^2}{(cx+d)^4}[cx^2+2xd-b] = 2y_1(1+y_1)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x=0$-ல் $\frac{x^3}{x^2-1}$-ன் n வரிசை வகைக்கெழுவின் மதிப்பு, n இரட்டைப் படையாக இருக்கும்போது பூச்சியம் எனவும், n ஒற்றைப்படையாக இருக்கும்போது $-n!$ எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y = \frac{x^3}{x^2-1}$$

$$= x+\frac{x}{x^2-1}$$

$$= x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\therefore\ y_n = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$(y_n)_0 = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(-1)^{n+1}}+\frac{1}{(1)^{n+1}}\right]$$

n இரட்டைப்படையெனில்

$n+1$ ஒற்றைப்படை $\therefore (y_n)_0 = 0$

n ஒற்றைப்படையெனில்

$n+1$ இரட்டைப்படை $\therefore (y_n)_0 = -n!$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$y = \cos^2 x \cdot \sin^3 x$ எனில் y_n ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$z = \cos x + i \sin x$ என்க. அப்போது

$1/z = \cos x - i \sin x$

எனவே, $z + \frac{1}{z} = 2\cos x;\quad z - \frac{1}{z} = 2i\sin x.$

மற்றும் $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos nx;\quad z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin nx$

$$\therefore (2^3 i^3 \sin^3 x)(2^2 \cos^2 x = \left(z - \frac{1}{z}\right)^3 \left(z + \frac{1}{z}\right)^2$$

(அது) $$-2^5 i \sin^3 x \cos^2 x = z^5 - z^3 - 2z + \frac{2}{z} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^5}$$

$$= \left(z^5 - \frac{1}{z^5}\right) - \left(z^3 - \frac{1}{z^3}\right) - 2\left(z - \frac{1}{z}\right)$$

$$= 2i\sin 5x - 2i\sin 3x - 2(2i\sin x)$$

$$\therefore \sin^3 x \cos^2 x = -\frac{1}{2^4}\left[\sin 5x - \sin 3x - 2\sin x\right]$$

$$\therefore D^n(\sin^3 x \cos^2 x)$$

$$= -\frac{1}{2^4}\left[D^n(\sin 5x) - D^n(\sin 3x) - 2D^n(\sin x)\right]$$

$$= -\frac{1}{16}\left[5^n \sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right) - 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 2\sin\left(x + \frac{r\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\left[2\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3^n \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) - 5^n \sin\left(5x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$y = e^{ax}\cos^2 x \cdot \sin x$ எனில் y_n ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$y = e^{ax}\cos^2 x \cdot \sin x$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது

$1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$ ஆதலால்

$$y = \tfrac{1}{2} e^{ax} [1 + \cos 2x] \sin x$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{ax} [\sin x + \tfrac{1}{2}(2\cos 2x \sin x)]$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{ax} [\sin x + \tfrac{1}{2}(\sin 3x - \sin x)]$$

$$= \tfrac{1}{2} e^{ax} \sin x + \tfrac{1}{4} e^{ax} \sin 3x$$

$$- \tfrac{1}{4} e^{ax} \sin x$$

$$\therefore \quad y = \tfrac{1}{4} e^{ax} \sin x + \tfrac{1}{4} e^{ax} \sin 3x$$

எனவே,

$$yn = \tfrac{1}{4} D^n (e^{ax} \sin x) + \tfrac{1}{4} D^n (e^{ax} \sin 3x)$$

$$= \tfrac{1}{4} R^n e^{ax} \sin (x + n\phi)$$

$$+ \tfrac{1}{4} r^n e^{ax} \sin (3x + n\theta)$$

இங்கே $R = \sqrt{a^2 + 1}; \quad \phi = \tan^{-1} 1/a$

$r = \sqrt{a^2 + 9}; \quad \theta = \tan^{-1} 3/a$ ·

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$\tan^{-1} x$-ன் n வரிசை வகைக்கெழுவைக் கண்டுபிடிக்கவும். எனவே $x = 0$ என்ற புள்ளியில் n ஆனது $2p, 4p + 1, 4p + 3$ என்ற அமைப்புகளில் இருப்பதைப் பொறுத்து $D^n (\tan^{-1} x)$ ஆனது $0, (n - 1)!, -(n - 1)!$ மதிப்புகள் பெறும் என நிறுவுக.

தீர்வு : $y = \tan^{-1} x$ ...... (1)

எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore y_1 = \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{(x + i)(x - i)}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x - i} - \frac{1}{x + i}\right]$$

$$\therefore \frac{d^n y}{dx_n} = \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(y_1)$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+i)^n}\right] \quad \dots (2)$$

$x = r\cos\theta,\ 1 = r\sin\theta$ எனில்

$$r = \frac{1}{\sin\theta}\ ;\ \theta = \tan^{-1}\frac{1}{x}$$

இதனை (2) ல் பிரதியிட

$$y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}[r^{-n}(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n}$$

$$-r^{-n}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\sin^n\theta\,[\cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$-\cos n\theta + i\sin n\theta]$$

$\therefore\ y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\theta\ \sin n\theta$; இங்கே $\cot\theta = x$.

இனி $(y_n)_0$ காண $x = 0\ \therefore\ \tan\theta = \infty\ ;\ \theta = \frac{\pi}{2}$

$$(\sin\theta)^n = \left(\sin\frac{\pi}{2}\right)^n = 1$$

$$\therefore (y_n)_0 = (-1)^{n-1}(n-1)!\ \sin n\frac{\pi}{2}$$

$n = 2p$ எனில், $(y_n)_0 = (-1)^{2p-1}(2p-1)!\sin p\pi = 0$

$n = 4p+1$ எனில், $(y_n)_0 = (-1)^{4p}(4p)!\ \sin\left(2p\pi + \frac{\pi}{2}\right)$

$$= (-1)^{4p}(4p)! = (n-1)!$$

$n = 4p+3$ எனில், $(y_n)_0 = (-1)^{4p+2}(4p+2)!\sin\left(2p\pi + \frac{3\pi}{2}\right)$

$$= (-1)^{4p+2}(4p+2)!\,(-1) = -(n-1)!$$

பயிற்சிகள் 5 (A)

1. $y = e^{-x}\cos x$ எனில் $y_4 + 4y = 0$ என நிறுவுக.

2. $y = e^{x/\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$ எனில்

$$\frac{d^3y}{dx^3} = e^{x/\sqrt{2}}\cos\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\pi}{4}\right)$$ என நிறுவுக.

3. $y = x^4 \log x$ எனில்

$$\frac{d^6y}{dx^6} + \frac{24}{x^2} = 0$$ என நிறுவுக.

4. $y = \frac{\log x}{x}$ எனில்

$$y_2 = \frac{2\log x - 3}{x^3}$$ என நிறுவுக.

5. $x = 2\cos t - \cos 2t,\ y = 2\sin t - \sin 2t$ எனில்

$t = \frac{\pi}{2}$-ல் $\frac{d^2y}{dx^2}$-ன் மதிப்பு $\frac{-3}{2}$ என நிறுவுக.

6. $x = f(t),\ y = \phi(t)$ எனில்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$ என நிறுவுக.

7. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$;

$\triangle = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$ என்றால்

$D^2y = \triangle (hx + by + f)^{-3}$ என நிறுவுக.

8. $y\sqrt{x^2-1} = \log(x + \sqrt{x^2-1})$ எனில்

$(x^2-1)y_1 + xy - 1 = 0$ என நிறுவுக.

9. $y = \sin(\sin x)$ எனில் $y_2 + y_1 \tan x + y\cos^2 x = 0$ என நிறுவுக.

10. $p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ எனில்

$$p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}$$ என நிறுவுக.

11. $y^3 - 3ax^2 + x^3 = 0$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2a^2x^2}{y^5} = 0$ என நிறுவுக.

12. $x^3 + y^3 = 3axy$ எனில் $y_2 = \frac{2a^3xy}{(ax - y^2)^3}$ என நிறுவுக.

13. n வரிசை வகைக்கெழு கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $\dfrac{1}{1 - 5x + 6x^2}$ (b) $\dfrac{1}{a^2 - x^2}$

(c) $\dfrac{x^4}{(x - 1)(x - 2)}$ (d) $\dfrac{x^3}{(x - a)(x - b)(x - c)}$

14. n வரிசை வகைக்கெழு காண்க.

(a) $y = e^{3x}$ (b) $y = e^{p-qx}$

(c) e^{ax+b}

15. $\log (ax + b)(cx + d)$-ன் n வரிசை வகைக் கெழு என்ன ?

16. $y = \log (b - ax)^p$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

17. $y = \log \left(\dfrac{x}{a + bx}\right)$ எனில்

$x^3 y_2 = (y - xy_1)^2$ என நிறுவுக.

18. பின் வருவனவற்றுக்கு n வரிசை வகையீட்டுக் கெழு காண்க :

(a) $y = \cos x \cos 2x \cos 3x$

(b) $y = \cos x \cos 2x$

(c) $y = \cos^3 x \sin^5 x$

(d) $y = \sin 2x \sin 3x$

(e) $y = \sin^2 x \sin 2x$

19. $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 3} + \sin^3 x$ எனில்

y_n காண்க.

20. $y = \dfrac{1}{x^2 + 5x + 6} + \sin 2x \sin 3x$ எனில்

y_n-ஐக் காண்க :

21. $y = \sin mx + \cos mx$ எனில்

$y_n = m^n [1 + (-1)^n \sin 2mx]^{1/2}$ என நிறுவுக.

22. y_n-ஐக் காண்க :

(i) $y = e^{ax} \cos x \sin x$

(ii) $y = e^{x} \sin x \sin 2x$

23. $y = \dfrac{1}{x^2+a^2}$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

24. $y = \dfrac{x}{x^2+a^2}$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

25. y_n-ஐக் காண்க.

(a) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{a}\right)$

(b) $y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

(c) $y = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$

(d) $y = \tan^{-1}\left[\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}\right]$

விடைகள் 5 (A)

13. (a) $(-1)^n n!\left[2^{n+1}(2x-1)^{-n-1} - 3^{n+1}(3x-1)^{-n-1}\right]$

(b) $\dfrac{n!}{2a}\left[(a-x)^{-n-1} + (-1)^n(a+x)^{-n-1}\right]$

(c) $(-1)^n n!\left[16(x-2)^{-n-1} - (x-1)^{-n-1}\right]$

(d) $(-1)^n n! \sum \dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)^{n+1}}$

14. (a) $3^n e^{3x}$ (b) $e^{p-qx}(-q)^n$ (c) $a^n e^{ax+b}$

15. $\left[(-1)^n (n-1)! \dfrac{a^n}{(ax+b)^n}\right] + \left[(-1)^n (n-1)! \dfrac{c^n}{(cx+d)^n}\right]$

16. $\left[\dfrac{-p\, a^n (n-1)!}{(b-ax)^n}\right]$

18. (a) $2^{n-2}\left[3^n \cos\left(6x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+2^n\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right.$

$$\left.+\cos\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

(b) $\dfrac{1}{2}\left[3^n \cos\left(3x+\dfrac{n\pi}{2}\right)+\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$

(c) $\dfrac{1}{128}\left[8^n \sin\left(8x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-2.6^n\sin\left(6x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right.$

$$\left.-2.4^n \sin\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right)+6.2^n\sin\left(2x+\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

(d) $\dfrac{1}{2}\left[\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-5^n\cos\left(5x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$

(e) $\dfrac{1}{4}\left[2^{n+1}\sin\left(2x+\dfrac{n\pi}{2}\right)-4^n\sin\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right]$

19. $\frac{1}{2}(-1)^n n!\,\{(x+1)^{-n-1}-(x+3)^{-n-1}\}$

$$+\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

20. $\dfrac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}-\dfrac{(-1)^n n!}{(x+3)^{n+1}}+\dfrac{1}{2}\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$$-\frac{1}{2}\,5^n\cos\left(5x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

22. (i) $\frac{1}{2}e^{ax}(a^2+4)^{n/2}\sin\left(2x+n\tan^{-1}\frac{2}{a}\right)$

(ii) $\dfrac{1}{2}e^x\left[(\sqrt{2})^n\cos\left(x+\dfrac{n\pi}{4}\right)-(\sqrt{10})^n\right.$

$$\left.\cos(3x+n\tan^{-1}3)\right]$$

23. $\dfrac{1}{a^{n+2}}(-1)^n\, n!\,\sin^{n+1}\theta.\sin(n+1)\theta$; இங்கே $\tan\theta=\dfrac{a}{x}$

24. $\dfrac{(-1)^n n!}{a^{n+1}} \sin^{n+1}\theta \cos(n+1)\theta$; இங்கே $\tan\theta = \dfrac{a}{x}$.

25. (a) $\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(n-1)!\ \sin^n\theta \sin n\theta$; இங்கே $\cot\theta = x$

(b) $(-1)^{n-1}(n-1)!\ \sin^n\theta \sin n\theta$; இங்கே $\cot\theta = x$

(c) $(-1)^{n-1}(n-1)!\ \sin^n\theta \sin n\theta$; இங்கே $\cot\theta = x$

(d) $\dfrac{(-1)^n (n-1)!\ \sin^n\theta \sin n\theta}{a^n}$; இங்கே $\cot\theta = \dfrac{x}{a}$

§ 5-3. லெபனிட்ஸ் தேற்றம் (Leibnitz Theorem)

u, v என்பன *n* வரிசை வகைக்கெழுக்கள் உள்ள சார்பலன்களாயின்,

$$y_n = (uv)_n = u_n v + {}^nc_1\, u_{n-1} v_1 + {}^nc_2\, u_{n-2} v_2 + \dots + {}^nc_r\, u_{n-r} v_r + \dots + {}^nc_n\, u v_n \cdots (1)$$

நிறுவல் :

இத்தேற்றத்தைக் கணித தொகுத்தறி முறையை (Mathematical Induction) கையாண்டு நிறுவுவோம்.

முதல்படி :

நேராக வகையீடு காண,

$$y_1 = u_1 v + u v_1$$

$$y_2 = (u_2 v + u_1 v_1) + (u_1 v_1 + u v_2)$$

$$= u_2 v + {}^2C_1 u_1 u_1 + {}^2C_2 u v_2$$

எனவே தேற்றம், $n = 1, 2$ எனில் உண்மை.

இரண்டாம்படி ; தேற்றமானது *n*-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு வரை உண்மை என எடுத்துக் கொள்க. அம்மதிப்பு m என்க.

எனவே,

$$(uv)_m = u_m v + {}^mC_1 u_{m-1} v_1 + {}^mC_2 u_{m-2} v_2 + \dots + {}^mC_{r-1} u_{m-r+1} v_{r-1} + {}^mC_r u_{m-r} v_r + \dots + {}^mC_m u v_m.$$

இருபுறமும் வகையீடு செய்ய,

$$
\begin{aligned}
(uv)_{m+1} &= \{u_{m+1} v + u_m v_1\} + {}^mC_1 \{u_m v_1 + u_{m-1} v_2\} \\
&+ {}^mC_2 \{u_{m-1} v_2 + u_{m-2} v_3\} + \cdots\cdots \\
&+ {}^mC_{r-1} \{u_{m-r+2} v_{r-1} + u_{m-r+1} v_r\} \\
&+ {}^mC_r \{u_{m-r+1} v_r + u_{m-r} v_{r+1}\} + \cdots\cdots \\
&+ {}^mC_m \{u_1 v_m + u v_{m+1}\} \\
&= u_{m+1} v + (1 + {}^mC_1) u_m v_1 \\
&+ ({}^mC_1 + {}^mC_2) u_{m-1} v_2 \\
&+ \cdots \cdots + ({}^mC_{r-1} + {}^mC_r) u_{m-r+1} v_r \\
&+ \cdots\cdots + {}^mC_m u v_{m+1}
\end{aligned}
$$

ஆனல் $1 + {}^mC_1 = 1 + m = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_1 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_2$

${}^mC_{r-1} + {}^mC_r = {}^{m+1}C_r$, ${}^mC_m = 1 = {}^{m+1}C_{m+1}$

எனவே,

$$
\begin{aligned}
(uv)_{m+1} &= u_{m+1} v + {}^{m+1}C_1 u_m v_1 + {}^{m+1}C_2 u_{m-1} v_2 \\
&+ \cdots\cdots + {}^{m+1}C_r u_{m+1-r} v_r + \cdots\cdots \\
&+ {}^{m+1}C_{m+1} u v_{m+1}
\end{aligned}
$$

எனவே தேற்றமானது m என்ற n-ன் மதிப்பிற்கு உண்மையாக இருந்தால் அதற்கு அடுத்த உயர்ந்த மதிப்பான $m + 1$-க்கும் உண்மை என்பதை அறிகிறோம்.

முடிவு :

முதல்படியில் தேற்றம் $n = 2$ எனில் உண்மை என நிறுவினேம். எனவே $n = 2 + 1$, அதாவது $n = 3$ என்றாலும், அதற்கடுத்தபடியாக $n = 3 + 1 = 4$ என்றாலும், இவ்வாறு n-ன் ஒவ்வொரு முழு எண் மதிப்பிற்கும் தேற்றம் உண்மையாக இருக்க வேண்டும்.

§ 5-4. $x = 0$-ல் சார்பலனின் n வரிசை வகைக்கெழு மதிப்பு தீர்மானித்தல்

சில சமயங்களில் கோவையின் n-வரிசை வகைக்கெழு கண்டு, அதற்கு $x = 0$-ல் மதிப்பு காணுவது எளிதாக இல்லாமல் இருக்கலாம். நேரடியாகவே சார்பலனுக்கு $x = 0$-ல் n-வரிசை வகைக்கெழுவின் மதிப்பு காணும் முறை, அடுத்து வரும் எடுத்துக்காட்டு 8-ல் விளக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$y = x^3 \log x$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

தீர்வு :

$\log x = u,\ x^3 = v$ என்க.

$$u = \log x$$

$$u_n = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^u}$$

$$u_{n-1} = (-1)^{n-2}\frac{(n-2)!}{x^{n-1}}$$

$$u_{n-2} = (-1)^{n-3}\frac{(n-3)!}{x^{n-2}}$$

$$u_{n-3} = (-1)^{n-4}\frac{(n-4)!}{x^{n-3}}$$

மற்றும் $v = x^3$

$$v_1 = 3x^2$$

$$v_2 = 6x$$

$$v_3 = 6$$

v_4, மற்றும் மேல்வரிசைக் கெழுக்கள் $= 0$

$y = uv$ ஆதலால் லெபனிட்ஸ் தேற்றத்தின்படி

$$y_n = u_n v + nC_1\, u_{n-1} v_1 + nC_2\, u_{n-2} v_2 + nC_3\, u_{n-3} v_3$$

+ பூச்சியமாகும் உறுப்புகள்

$$nC_1 = n;\quad nC_2 = \frac{n(n-1)}{2};\quad nC_3 = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

எனவே $y_n = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}\cdot x^3 + \dfrac{n(-1)^{n-2}(n-2)!}{x^{n-1}}(3x^2)$

$$+ \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{(-1)^{n-3}(n-3)!}{x^{n-2}}(6x)$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\,\frac{(-1)^{n-4}(n-4)!}{x^{n-3}}(6)$$

$$= 6(-1)^n (n-4)!\, x^{3-n}.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 : $y = (\tan^{-1}x)^2$ எனில் $(x^2+1)^2 y_2 + 2x(x^2+1)y_1 = 2$ என நிறுவுக.

இதன் மூலம்

$$(x^2+1)^2 y_{n+2} + (4x+2)\, x\,(x^2+1)\, y_{n+1} + 2n^2(3x^2+1)y_n$$
$$+ 2n(n-1)(2n-1)x\, y_{n-1} + n(n-1)^2(n-2)y_{n-2} = 0$$

என்பதையும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y = (\tan^{-1} x)^2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது இருபுறமும் x-ஐப் பொறுத்து வகையிடு காண

$$y_1 = 2 \tan^{-1} x \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

அது $(1+x^2)y_1 = 2 \tan^{-1} x$

வர்க்கமாக்க

$$(1+x^2)^2 y_1^2 = 4 (\tan^{-1} x)^2 = 4y$$

இருபுறமும் x-ஐப் பொறுத்து வகையிடு காண

$$(1+x^2)^2 (2y_1)(y_2) + y_1^2 \cdot 2(1+x^2)(2x) = 4y$$

இருபுறமும் $2y_1$ ஆல் வகுக்க

$$(x^2+1)_2\, y^2 + 2x(x^2+1)\, y_1 = 2$$

x-ஐப் பொறுத்து n வரிசை வகையிடுகாண

$$(x^2+1)^2 y_{n+2} + nC_1\, 2(x^2+1)(2x)y_{n+1}$$
$$+ nC_2\, (12x^2 + 4)y_n + nC_3\, (24x)y_{n-1}$$
$$+ nC_n\, (24)y_{n-2} + (2x^3 + 2x)y_{n+1}$$
$$+ nC_1\, (6x^2 + 2)y_n + nC_2\, (12x)\, y_{n-1}$$
$$+ nC_3\, (12)\, y_{n-2} = 0$$

சுருக்கி எழுத, $(x^2+1)^2 y_{n+2} + (4x+2)x(x^2+1)y_{n+1}$

$$+ 2n^2(3x^2+1)y^n + 2n(n-1)(2n-1)x\, y_{n-1}$$
$$+ n(n-1)^2(n-2)y_{n-2} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனில்

$(1-x^2)\, y_2 - xy_1 + m^2 y = 0$ எனவும்

$(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, xy_{n+1} - (n^2-m^2)\, y_n = 0$

எனவும் நிறுவுக ; $(y_n)_0$ காண்க.

தீர்வு : $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ ... (1)

எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad y_1 = \cos(m \sin^{-1} x) \cdot m \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(அது) $(\sqrt{1-x^2})\,(y_1) = m \cos(m \sin^{-1} x)$

வர்க்கமாக்க

$$(1-x^2)\, y_1^2 = m^2 \cos^2(m \sin^{-1} x)$$
$$= m^2 \,[\, 1 - \sin^2(m \sin^{-1} x)\,]$$

$$\therefore \quad (1-x^2)\, y_1^2 = m^2 (1-y^2) \qquad (1) \text{ மூலம்}$$

மறுபடியும் வகையிடு காண

$$(1-x^2) \cdot 2y_1 \cdot y_2 + y_1^2 (-2x)$$
$$= m^2 (-2y)\, y_1$$

$2y_1$-ஆல் வகுத்து ஒரே புறம் வரிசைப்படுத்த

$$(1-x^2)\, y_2 - xy_1 + m^2 y = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

சமன்பாடு (2)-ஐ n வரிசைக்கு வகையீடு காண

$$(1-x^2)\, y_{n+2} + {}_nC_1 (-2x)\, y_{n+1} + {}_nC_2 (-2) y_n$$
$$- [\, x\, y_{n+1} + {}_nC_1 (1)\, y_n \,] + m^2 y_n = 0$$

(அது) $(1-x^2)\, y_{n+2} + xy_{n+1}(-2n-1)$
$+ y^n (-n^2 + n - n - m^2) = 0$

(அது) $(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) xy_{n+1} - (n^2-m^2) y_n = 0.$

இனி $(y_n)_0$ காண்போம்.

$$(1-x^2) y_{n+2} - (2n+1) xy_{n+1} - (n^2-m^2) y_n = 0, \ \ldots (3)$$

என முதல்பகுதியில் நிறுவினோம்.

இதில் $x = 0$ எனப்பதிலிட

$$(y_{n+2})_0 = (n^2-m^2)(y_n)_0 \quad \ldots (4)$$

(4)-ல் $n = 2, 4, 6, \ldots \ldots$ எனப் பதிலிட

$(y_4)_0, (y_6)_0, (y_8)_0 \ldots \ldots$ முதலியன பூச்சியம்

n ஒற்றைப்படை எனில்

(4)-ல் n-க்கு $(n-2)$ எனப் பதிலிட

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}(y_{n-2})_0 \quad \ldots (5)$$

(5)-ல் n-க்கு $(n-2)$ எனப் பதிலிட

$$(y_{n-2})_0 = \{(n-4)^2 - n^2\}(y_{n-4})_0 \quad \ldots (6)$$

(6)-ஐ (5)-ல் பதிலிட

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}\{(n-4)^2 - m^2\}(y_{n-4})_0$$

இவ்வாறே தொடர்ந்து குறைத்துக் கொண்டே போக

$$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}\{(n-4)^2 - m^2\} \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots (1^2-m^2)(y_1)_0$$

ஆனால் $(y_1)_0 = m$

$$\therefore (y_n)_0 = \{(n-2)^2 - m^2\}\{(n-4)^2 - m^2\} \ldots \ldots$$

$$\ldots \ldots (1^2-m^2)\ m\ ;$$

n ஒற்றைப் படையெனில்

$(y_n)_0 = 0\ ;$ n இரட்டைப் படையெனில்

எடுத்துக்காட்டு 9 : $y = A(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x-\sqrt{x^2-1})^n$

எனில் $(n^2-1)y_2 + xy_1 - n^2y$. என நிறுவி

$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} = 0$ எனப் பெறுக.

தீர்வு :-

$$y = A(x+\sqrt{x^2-1})^n + B(x-\sqrt{x^2-1})^n \quad \ldots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது. வகையீடு காண x-ஐப் பொறுத்து

$$y_1 = nA\,[x + \sqrt{x^2-1}]^{n-1}\left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$+ n\,B\,[x - \sqrt{x^2-1}]^{n-1}\left[1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

(அது) $y_1\sqrt{x^2-1} = nA\,[x + \sqrt{x^2-1}]^n - nB\,[x + \sqrt{x^2-1}]^n$
மறுபடியும் x ஐப் பொறுத்து வகையீடு காண

$$y_2\sqrt{x^2-1} + y_1 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= nA\,.\,n\,[x + \sqrt{x^2-1}]^{n-1}\left[1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$- nB\,.\,n\,[x - \sqrt{x^2-1}]^{n-1}\left[1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\right]$$

$$= \frac{n^2\,[A\,(x + \sqrt{x^2-1})^n + B\,(x - \sqrt{x^2-1})^n]}{\sqrt{x^2-1}}$$

எனவே இருபுறமும் $\sqrt{x^2-1}$ ஆல் பெருக்க

$y_2\,(x^2-1) + xy_1 = n^2y$

(அது) $(x^2 - 1)\,y_2 + xy_1 - n^2y = 0 \qquad \ldots(2)$

சமன்பாடு (2) ஐ x ஐப் பொறுத்து n வரிசை வகையீடு காண

$$(x^2-1)\,y_{n+2} + n\,(2x)\,y_{n+1} + \frac{n\,(n-1)}{2}\,(2)\cdot y_n$$

$$+ \quad x \quad y_{n+1} \quad + \quad n \quad (1) \quad y_n$$

$$- n^2 \qquad y_n = 0$$

அது $(x^2-1)\,y_{n+2} + (2n + 1)\,xy_{n+1} = 0$

பயிற்சிகள் 5 (B)

1. $y = x^n \log x$ எனில்

   $y_{n+1} = \dfrac{n!}{x}$ என நிறுவுக.

2. $y = x^{n-1}\log x$ எனில்

   $y_{n+1} = \dfrac{(n-1)!}{x}$ என நிறுவுக.

3. $y = e^x \log x$ எனில் y_5-ஐக் காண்க.

4. $y = e^x \log x$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

5. $y = x^2 e^x$ எனில்

$$y_n = \tfrac{1}{2} n (n-1) y_2 - n (n-2) y_1 + \tfrac{1}{2} (n-1)(n-2) y$$ காண்க.

6. y_n-ஐக் காண்க.

(a) $y = x^3 e^{2x}$

(b) $y = x^2 e^{-x}$

7. $y = x^2 e^{ax}$ எனில் y_n-ஐக் காண்க.

8. y_n-ஐக் காண்க.

(a) $y = x^3 \cos x$.

(b) $y = x^2 e^x \cos x$.

9. $(1+x^2)\, y_2 + xy_1 = m^2 y$ என்ற வகையீட்டுச் சமன்பாடு, $y = \sinh (m \sinh^{-1} x)$ என்பதால் நிறைவு செய்யப்படுகிறது என நிறுவுக.

10. $(1-x^2)y_2 - xy_1 + a^2 y = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் n வரிசை வகைக்கெழுவைக் காண்க.

11. $y = \sin^{-1} x$ எனில் $(1-x^2)\, y_2 - xy_1 = 0$ என நிறுவுக. இச் சமன்பாட்டை $n-2$ முறை வகையிட கிடைக்கும் சமன்பாட்டைக் காண்க.

12. $y = (\sin^{-1} x)^2$ எனில்,

$(1-x^2)\, y_2 - xy_1 - 2 = 0$ எனவும்,

$(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, xy_{n+1} - n^2 y_n =$ எனவும் நிறுவுக.

13. $y = (\sin^{-1} x)^2$ எனில் $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{y_{n+2}}{y_n} = n^2$ என நிறுவுக.

14. $y = (1-x^2)^{-1/2} \sin^{-1} x$ எனில்

$(1-x^2)\, y_{n+1} - (2n+1)\, x y_n - n^2 y_{n-1} = 0$ என நிறுவுக.

15. $y = \dfrac{\log x}{x^2}$ எனில்

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 6x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} - 4y = 0$$ என நிறுவுக.

லெபனட்ஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி இச்சமன்பாட்டை மூன்று முறை வகையீடு செய்யவும்.

16. $U = \dfrac{x^5}{Ax^2 + 2Bx + C}$; $n > 5$ ஆக இருந்தால்

$(Ax^2+2Bx+C)\, U_n + 2n\,(Ax+B)\, U_{n-1} + n\,(n-1)\, AU_{n-2} = 0$ என நிறுவுக.

17. $y = a \cos(\log x) + b \sin(\log x)$ எனில்

$x^2 y_2 + xy_1 + y = 0$ எனவும்,

$x^2 y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + (n^2 + 1)\, y_n = 0$ எனவும் நிறுவுக.

18. $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ எனில்

$(1 - x^2)\, y_{n+2} - (2n + 1)\, x\, y_{n+1} + (m^2 - n^2)\, y_n = 0$ என நிறுவுக.

19. $y = (x + \sqrt{1 + x^2}\,)^m$ எனில்

$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$ என நிறுவுக.

20. $y = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ எனில்

(i) $(1 + x^2)\, y_2 + xy_1 = 0$ எனவும்,

(ii) $(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + n^2 y_n = 0$ எனவும்

(iii) $(y_{n+2})_{x=0} = -n^2 (y_n)_{x=0}$ எனவும் நிறுவுக.

21. $y = \dfrac{\sinh^{-1} x}{\sqrt{1 + x^2}}$ எனில்

$(1 + x^2)\, y_{n+2} + (2n + 3)\, x\, y_{n+1} + (n + 1)^2\, y_n = 0$ என நிறுவுக.

22. $y = A e^{-kt} \cos(pt + e)$ எனில்

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2k\frac{dy}{dt} + n^2y = 0$ என நிறுவுக. இங்கே $n^2 = p^2 + k^2$

23. $y (x^2 - 1)^n$ எனில்

$(x^2 - 1) y_{n+2} + 2x y_{n+1} - n(n+1) y_n = 0$ என நிறுவுக.

இதன் மூலம்

$P_n = D^n (x^2 - 1)^n$ எனில்

$D[(1 - x^2)(DP_n)] + n(n+1) P_n = 0$ என நிறுவுக.

24. $y = \sin(\sin x)$ எனில் $y_2 + y_1 \tan x + y \cos^2 x = 0$ என நிறுவுக.

25. $y = \sin(m \sin^{-1} x)$ எனில்

$\underset{x \to 0}{Lt} \frac{y_{n+2}}{y_n} = n^2 - m^2$ என நிறுவுக.

26. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனில்

$(1 - x^2) y_{n+2} - (2n + 1) xy_{n+1} - (n^2 + a^2) y_n = 0$ என நிறுவுக.

27. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனில்

$$\underset{x \to 0}{Lt} \left(\frac{y_{n+2}}{y_n}\right) = n^2 + a^2$$

என நிறுவுக.

28. $y = e^{\tan^{-1} x}$ எனில்

$$(1 + x^2) y_2 + (2x - 1) y_1 = 0 \text{ என்றும்}$$

$(1 + x^2) y_{n+2} + (2nx + 2x - 1)y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$ என்றும் நிறுவுக.

29. $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ எனில்

$$x^2 y_{n+2} + (2n + 1) xy_{n+1} + 2n^2 y_n = 0$$

என நிறுவுக.

30. $x + y = 1$ எனில்

$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n y^n\right) = n!\left[y^n - \left({}_nC_1\right)^2 y^{n-1} x + \left({}^nC_2\right)^2 y^{n-2} x^2 + \dots \right.$$
$$\left. \dots + (-1)^n x^n\right]$$

என நிறுவுக.

31. $y^{1/m} + y^{-1/m} = 2x$ எனில்

$$(x^2 - 1)\, y_{n+2} + (2n + 1)\, xy_{n+1} + (n^2 - m^2)\, y_n = 0$$

என நிறுவுக.

32. $P = x^n - n(n-1)\, x^{n-2} + n)(n-1(n-2)(n-3)\, x^{n-4} - \dots$
$Q = nx^{n-1} - n(n-1)(n-2)\, x^{n-3} + \dots\dots$

எனில் $\frac{d^n}{dx^n}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{1}{x^{n+1}}\left[P \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + Q\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right]$

என நிறுவுக.

33. $Y = sX,\ Z = tX$ என்ற சமன்பாடுகளில் எல்லா மாறிகளும் x-ன் சார்பலன்களாக இருக்கும்போது

$$D \equiv \begin{vmatrix} X & Y & Z \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = X^3 \begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_2 & t_1 \end{vmatrix}$$

என நிறுவுக ; இங்கே கீழ் குறிகள் x ஐப் பொறுத்த வகைக் கெழுவைக் குறிக்கின்றன.

34. $y = \sin^{-1} x$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

35. $y = \tan^{-1} x$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

36. $y = (\sin^{-1} x)^2$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

37. $y = (x + \sqrt{1 + x^2})^m$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

38. $y = \frac{1}{1 + x + x^2 + x^3}$ எனில் $(y^n)_0$-ன் மதிப்பு, n ஆனது $4p + 2$ அல்லது $4p + 3$ என்ற அமைப்புகளில் இருக்கும்போது பூச்சியம் எனவும், n ஆனது $4p$ அல்லது $4p + 1$ என்ற அமைப்புகளில் இருக்கும்போது $n!$ அல்லது $-n!$ எனவும் நிறுவுக.

39. $y = \cos(m \sin^{-1} x)$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

40. $y = e^{m \cos^{-1} x}$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

41. $y = e^{a \sin^{-1} x}$ எனில் $(y_n)_0$-ஐக் காண்க.

42. $x^{2n} = x^n \cdot x^n$ என்பதனைப் பயன்படுத்தி x^{2n} என்பதை இரு வழிகளில் n வரிசை வகைக்கெழு கண்டு,

$$1 + \frac{n^2}{1^2} + \frac{n^2 (n-1)^2}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{n^2 (n-1)^2 \cdot (n-2)^2}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

என்பதை நிறுவுக.

43. $y = (1 + x^2)^{m/2} \sin(m \tan^{-1} x)$ எனில்

$(y_{2n})_0 = 0$ எனவும்

$(y_{2n+1})_0 = (-1)^n m(m-1)(m-2) \ldots (m-2n)$

எனவும் நிறுவுக.

விடைகள் 5(B)

3. $e^x \left[\log x + \frac{5}{x} - \frac{10}{x^2} + \frac{20}{x^3} - \frac{30}{x^4} + \frac{24}{x^5}\right]$

4. $e^x \left[\log x + \frac{n}{x} - \frac{n(n-1)}{2!} \frac{1}{x^2} + \ldots\ldots + \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}\right]$

6. (a) $e^{2x} [2^n x^3 + 3n \cdot 2^{n-1} x^2 + 3n(n-1) 2^{n-2} x + n(n-1)(n-2) 2^{n-3}]$

(b) $(-1)^n e^{-x} (x^2 - 2nx + n^2 - n)$

7. $a^n e^{ax} \left[x^2 + \frac{2n}{a} x + \frac{n(n-1)}{a^2}\right]$

8. (a) $x^3 \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3n x^2 \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

$$- 3n(n-1)\, x \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$- n(n-1)(n-2) \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

(b) $2^{\frac{n-2}{2}} e^x \left[2x^2 \cos\left(x + \frac{n\pi}{4}\right) + 2^{\frac{3}{2}} n\, x \cos\left\{x + (n-1)\frac{\pi}{4}\right\} + n(n-1)\cos\left\{x+(n-2)\frac{\pi}{4}\right\}\right]$

10. $(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - (n^2 - a^2)\, y_n = 0$

11. $(1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - n^2 y_n = 0$

34. n இரட்டைப்படையெனில் $(y_n)_0 = 0$; n ஒற்றைப் படையெனில் $(y_n)_0 = (n-2)^2 (n-4)^2 \ldots 3^2$

35. n ஒற்றைப்படையெனில் $(y_n)_0 = (-1)^{\frac{n-1}{2}} (n-1)\,!$
n இரட்டைப்படையெனில் $(y_n)_0 = 0.$

36 n ஒற்றைப்படையெனில் $(y_n)_0 = 0$;
n இரட்டைப்படையெனில் $(n-2)^2 \ldots 6^2 \,.\, 4^2 \,.\, 2^2 \,.\, 2$

37. n ஒற்றைப்படையெனில்
$(y_n)_0 = [m^2 - (n-2)^2] \ldots (m^2 - 3^2)(m^2 - 1^2)\, m;$
n இரட்டைப்படையெனில்
$(y_n)_0 = [m^2 - (n-2)^2] \ldots (m^2 - 4^2)(m^2 - 2^2) m^2$

39. n ஒற்றைப்படை எனில் $(y_n)_0 = 0$; n இரட்டைப்படையெனில் $(y_n)_0 = -m^2 (2^2 - m^2)(4^2 - m^2) \ldots \{(n-2)^2 - m^2\}$

40. n ஒற்றைப்படையெனில்

$(y_n)_0 = [(n-2)^2 + m^2] \ldots [3^2 + m^2]\,]1^2 + m^2]\, [m e^{m\pi/2}]$

n இரட்டைப்படையெனில்

$(y_{n_0}) = [(n-2)^2 + m^2]\, [(n-4)^2 + m^2] \ldots m^2 e^{m\pi/2}$

41. n ஒற்றைப்படையெனில்

$(y_n)_0 = [(n-2)^2 + a^2]\, [(n-4)^2 + a^2] \ldots (5^2 + a^2)(3^2 + a^2)(1 + a^2)$;
n இரட்டைப்படையெனில்

$(y_n)_0 = \{(n-2)^2 + a^2\} \{(n-4)^2 + a^2\} \ldots \{4^2 + a^2\} \{2^2 + a^2\} a^2$

6. சார்புகளை விரித்தல்

§ 6-1. ரோல் தேற்றம் (Rolle's Theorem)

$f(x)$ என்ற சார்பலன்,

(i) $x \leq a \leq xb$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $a < x < b$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கது.

(iii) $f(a) = f(b)$

இவ்வாறிருந்தால் $f'(c) = 0$ என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு $a < c < b$ என x-க்கு c என்ற மதிப்பாவது உளதாகும்.

நிறுவல் :

$f(x)$ என்பது $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையதாதலால் அந்த இடைவெளியில் வரம்புடையது. $f(x)$ அந்த வரம்புகளையும் அடையும். M, m என்பன முறையே $f(x)$-க்கு மேல், கீழ் வரம்புகளாகும்.

$M = m$ ஆகவோ அல்லது $M \neq m$ ஆகவோ இருக்கக் கூடும்

(i) $M = m$ என்க. அப்போது

$M = m = f(a) = f(b) = f(x)$ ...... எல்லா $a \leq x \leq b$.

எனவே,

இடைவெளி முழுவதும் $f(x)$ மாறிலியாக அமைவதால் இடைவெளியில் ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் வகைக்கெழு பூச்சியமாகும். எனவே a, b-க்கு இடையே எந்த c-ஐத் தேர்ந்து எடுத்தாலும் தேற்றம் உண்மை.

(ii) $M \neq m$ என்க

எனவே M அல்லது m அல்லது இரண்டுக்குமே $f(a)$, $f(b)$ என்ற சமமான மதிப்புக்களில் இருந்து வேறுபட்டிருக்க வேண்டும்.

$M \neq f(a) = f(b)$ என்க.

$f(x)$ என்பது $x = c$-ல் M என்ற மதிப்பைப் பெறுகிறது என்க; இங்கே $a<c<b$.

$f(c+h) - f(c)$ ஆனது (a, b)-ல் ஒவ்வொரு $c+h$-க்கும் பூச்சியம் அல்லது குறை எண்.

$$\therefore \quad \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0 \; ; \quad h > 0 \text{ எனில்}$$

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geqslant 0 \; ; \quad h < 0 \text{ எனில்}$$

(அது) வலப்புற $f'(c) \leq 0$; இடப்புற $f'(c) \geqslant 0$.

ஆனால் $f(x)$ $]a, b[$-ல் வகையிடத்தக்கது எனத்தரப்பட்டுள்ளதால் a, b இடை அமைந்த c-லும் வகையிடத்தக்கது.

அதாவது $f'(c)$ உளதாகும்.

எனவே

$$\text{வலப்புற } f'(c) = \text{இடப்புற } f'(c)$$
$$= f'(c)$$

எனவே,

$f'(c) = 0$

இவ்வாறே $m \neq f(a) = f(b)$ என்றாலும் நிறுவமுடியும்.

எனவே,

$f'(x) = 0$ ஆக இருக்குமாறு குறைந்தது ஒரு புள்ளியை நாம் குறிப்பிட முடியும். இந்தப் புள்ளிதான் $f(x)$ என்பது மேல் அல்லது கீழ் வரம்பை அடையக் கூடிய புள்ளியாகும்.

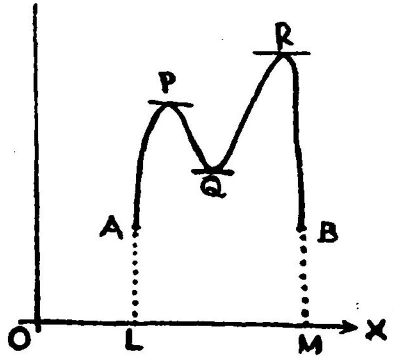
எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : ரோல் தேற்றத்திற்குக் கொடுக்கப்பட்ட மூன்று நிபந்தனைகளும் போதிய நிபந்தனைகளே. தேவையான நிபந்தனைகள் அல்ல. எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$; (0, 1) இடைவெளியில் ரோல் தேற்ற நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படாவிட்டாலும் $c = \frac{1}{2}$ எனும் போது $f'(c) = 0$.

குறிப்பு 2 : ரோல் தேற்றத்தை வடிவ கணிதம் மூலம் சரிபார்த்தல்.

$y = f(x)$ என்பது AB என்ற வளைகோட்டுப் பகுதி என்க. A, B என்பன $x = a$, $x = b$ என்பனவற்றுக்கு இயைந்த புள்ளிகள். வளைகோடு A-லிருந்து B வரை தொடர்ச்சி உடையது என்பதன் பொருள், AB-க்கு இடையே உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சி உடையது என்பதே. கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைப் படி $f(a) = f(b)$ என்பது. AL, BM என்ற இரு நிலை உயரங்களும் சமம் என்பதே. தேற்றத்தின்படி A, B தவிர குறைந்தது ஒரு புள்ளியிலாவது $f'(x) = 0$. அதாவது அப்புள்ளியில் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருக்க வேண்டும். படத்திலிருந்து இது வெளிப்படை.



படம் 6·1.

ஒரு புள்ளிக்கு மேற்பட்டும், (ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கை உள்ள புள்ளிகள்) பல புள்ளிகளில் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கலாம். இந்தப் புள்ளிகளில் எல்லாம் $f'(x) = 0$.

இணைத்தேற்றம் :

(i) $f(x)$ என்பது $a \leq x \leq b$-ல் தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $a < x < b$-ல் $f'(x)$ உளது.

(iii) $f(x) = 0$-க்கு, a, b என்பன இருதீர்வுகள் என்றால் $f'(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்குக் குறைந்தது ஒரு தீர்வாவது a, b இடையே அமையும்.

§ 6·2. § லெக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்புத் தேற்றம்

$f(x)$ என்ற சார்பலன்

(i) $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையதாகவும்

(ii) $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கதாகவும் இருந்தால்

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு}$$

$a < c < b$ என x-க்கு c என்ற ஒரு மதிப்பாவது உளதாகும்.

நிறுவல் :

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{b-x}{b-a}[f(b) - f(a)] \ldots\ldots (1)$$

எனுமாறு $\phi(x)$ என்ற சார்பலனை வரையறை செய்க.

(i) $f(x)$, $b-x$ என்பன அடைத்த இடைவெளி $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சி உடையன. எனவே $\phi(x)$ என்பதும் $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $f(x)$ என்பது $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கது. எனவே,

$$\phi'(x) = -f'(x) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \ldots\ldots (2)$$

என்பது $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உளதாகும். அதாவது $]a, b[$-ல் $\phi(x)$ வகையிடத்தக்கது.

(iii) $\phi(a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$

மற்றும் $\phi(b) = f(b) - f(b) = 0$

எனவே

$$\phi(a) = \phi(b).$$

ஆகவே ரோல் தேற்றத்திற்கான நிபந்தனைகளை $\phi(x)$ நிறைவு செய்கிறது.

(iv) எனவே ரோல் தேற்றத்தின்படி $]a, b[$ -க்கு இடையே குறைந்தது $x = c$ என்ற ஒரு மதிப்பிற்கு $\phi'(x) = 0$.
எனவே (2) லிருந்து,

$$0 = -f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ஆகவே,

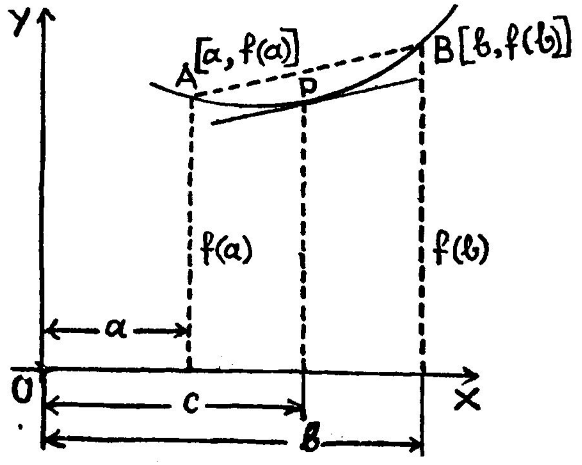
$a < c < b$ என அமைய

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

குறிப்பு 1 : மாற்று அமைப்பு :

$b = a + h$ என எடுத்துக்கொண்டால், $0 < \theta < 1$ என அமைய, $c = a + \theta h$. எனவே, இடைமதிப்புத் தேற்ற முடிவு பின்வரும் வடிவத்தில் அமைகிறது.

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h) \text{ ; இங்கே } 0 < \theta < 1.$$



படம் 6·2.

குறிப்பு 2 : லெக்ராஞ்சி இடைமதிப்புத் தேற்றத்தின் வடிவ கணித விளக்கம்

$y = f(x)$ என்ற சார்பலனின் வரை படத்தில் $x = a$, $x = b$ என்பதற்கியைந்து, A, B புள்ளிகள், அதாவது, $A[a, f(a)]$, $B[b, f(b)]$ AB என்ற நாணை இணைத்தால் அதன் சாய்வு

விகிதம் $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. லெக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தின் படி இது $f'(c)$-க்குச் சமம். அதாவது P என்ற புள்ளியில் $(x=c)$ தொடு கோட்டின் சாய்வு விகிதமாகும். எனவே லெக்ராஞ்சி தேற்றத்தை வடிவ கணிதம் மூலம் பின்வருமாறு கூறலாம்.

$y=f(x)$ என்ற சார்பலனின் வரைபடமான APB தொடர்ச்சியான வளைகோடாகவும், எல்லாப்புள்ளிகளிலும் தொடுகோட்டை உடையனவாகவும் இருந்தால் A, B-க்கு இடையே AB-க்கு இணையான தொடுகோட்டைக் கொண்டுள்ள புள்ளி குறைந்தது ஒன்றுவது இருக்கும்.

§ 6-3. காஷி இடைமதிப்புத் தேற்றம்

$f(x)$, $g(x)$ என்பன x-ல் இரு சார்பலன்கள். அவை

(i) $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையன,

(ii) $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத்தக்கன.

(iii) $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் எந்த மதிப்பிற்கும் $g'(x) \neq 0$.

இவ்வாறிருந்தால் $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு $a<c<b$ என x-க்கு c என்ற ஒரு மதிப்பாவது உளதாகும்.

நிறுவல் ;

(a, b) என்ற இடைவெளியில் $\phi(x)$ என்ற சார்பலனைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்க.

$$\phi(x) = f(b) - f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(b) - g(x)] \qquad \ldots \ldots (1)$$

(i) $f(x)$, $g(x)$ என்பன அடைத்த இடைவெளி $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சி உடையன. எனவே $\phi(x)$ என்பதும் $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $\phi(x)$-ஐ, x-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\phi'(x) = -f'(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [-g'(x)] \quad \ldots\ldots (2)$$

$f(x)$-ம், $g(x)$-ம் $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் வகையிடத் தக்கதாதலால் $\phi'(x)$-ம் $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உள தாகும். அதாவது $]a, b[$-ல் $\phi(x)$ வகையிடத்தக்கது.

$$\phi(a) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} [g(b)-g(a)] = 0$$

$$\phi(b) = f(b) - f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot [g(b)-g(b)] = 0$$

$$\therefore \quad \phi(a) = \phi(b)$$

எனவே $\phi(x)$ ரோல் தேற்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கிறது.

(iv) ரோல் தேற்றத்தின்படி (a, b)-க்கு இடையே குறைந்தது $x = c$ என்ற ஒரு மதிப்பிற்கு $\phi'(x) = 0$. எனவே (2)லிருந்து

$$0 = -f'(c) + \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) \; ; \quad \text{இங்கே } a<c<b.$$

இருபுறமும் (பூச்சியமில்லாத) $g'(c)$ மதிப்பால் வகுக்க,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} ; \quad \text{இங்கே } a<c<b.$$

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : மாற்று அமைப்பு ;

$b = a+h$ எடுத்துக் கொண்டால்

$0 < \theta < 1$ என அமைய $c = a + \theta h$. எனவே, இடைமதிப்புத் தேற்ற முடிவு பின்வரும் வடிவத்தில் அமைகிறது.

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{g(a+h)-g(a)} = \frac{f'(a+\theta h)}{g'(a+\theta h)}$$

2 ; $f(a) = g(a) = 0$ எனில் காஷி தேற்ற முடிவு பின் வருமாறு ஆகும்.

$$\frac{f(b)}{g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} ; \quad \text{இங்கே } a < c < b.$$

இதனைப் பின்வருமாறு கூறலாம்.

$f(x) = 0$, $g(x) = 0$ என்ற சமன்பாடுகளுக்கு,

a பொதுத்தீர்வு ஆனால் (a, x) என்ற இடைவெளியில் ஒரு c மதிப்புக்கு

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

குறிப்பு 2 : $g(x) = x$ எனில் கோஷி தேற்றத்தினின்று லெக்ராஞ்சி தேற்றம் கிடைக்கும்.

§ 6·41 பொது இடைமதிப்புத் தேற்றம் : (டெய்லர் தேற்றம்)

$f(x)$ என்ற சார்பலனும் அதன் தொடர்ந்த வகைக்கெழுக்களான $f'(x)$ $f''(x)$ ...... $f^{n-1}(x)$ என்பன $[a, b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையனவாகவும் $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் $f^n(x)$ உளதாகவும் இருப்பின்,

$$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a^2)}{2!} f''(a) + \cdots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n+1)!} \cdot f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c) :$$

எனுமாறு ஒரு c மதிப்பு $a < c < b$ ஆக உளதாகும்.

நிறுவல் :

$[a, b]$ என்ற இடைவெளியில் $\phi(x)$ என்ற சார்பலனைப் பின்வருமாறு வரையறை செய்க.

$$\phi(x) = F(x) - \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^n F(a) ; \qquad \ldots (1)$$

இங்கே $F(x) = f(b) - f(x) - (b-x) f'(x)$

$$- \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x) - \ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) \qquad \ldots (2)$$

எனக்கொள்க.

(i) $f(x)$, $f'(x)$ ... ... $f^{n-1}(x)$ என்பன $[a. b]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையன; அவ்வாறே $(b-x)^n$ என்பதும் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சி உடையது.

எனவே

$\phi(x)$ என்பதும் $[a, b]$-ல் தொடர்ச்சி உடையது.

(ii) $f^n(x)$, $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உளது. எனவே $\phi(x)$-ம் $]a, b[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உளதாகும்.

(iii) இங்கே,

$$\phi(a) = F(a) - \left(\frac{b-a}{b-a}\right)^n F(a) = F(a) - F(a) = 0;$$

$$\phi(b) = F(b) - \left(\frac{b-b}{b-a}\right)^n F(a) = F(b) = 0 \ldots (2) \text{ மூலம்}$$

ஆகவே ரோல் தேற்றத்திற்கான நிபந்தனைகளை $\phi(x)$ நிறைவு செய்கிறது.

(iv) எனவே ரோல் தேற்றத்தின்படி a, b-க்கு இடையே குறைந்தது $x = c$ என்ற ஒரு மதிப்பிற்கு $\phi'(x) = 0$ ஆகும்.

(1) மூலம்

$$\phi'(x) = F'(x) + n\,\frac{(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} F(a) \ldots\ldots (3)$$

x-ஐப் பொறுத்து (2)-ஐ வகையீடு செய்ய,

$$F'(x) = -f'(x) + [\,f'(x) - (b-x)f''(x)\,]$$
$$+ \left[\frac{2\,(b-x)}{2\,!} f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2\,!} f'''(x)\right] + \ldots\ldots$$
$$+ \left[\frac{(b-x)^{n-2}}{n-2\,!} f^{n-1}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{n-1\,!} f^n(x)\right]$$
$$= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^n(x) \text{ [பிற உறுப்புக்களை நீங்க]} \ldots (4)$$

$\therefore$ (3)-லிருந்து,

$$\phi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^n(x) + n\,\frac{(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} F(a) \ldots (4) \text{ மூலம்}$$

$$= \frac{n\,(b-x)^{n-1}}{(b-a)^n} \left[F(a) - \frac{(b-a)^n}{n\,!} f^n(x)\right] \ldots\ldots (5)$$

$\therefore$ $x = c$-ல், $\phi'(x) = 0$

$$\therefore \quad F(a) = \frac{(b-a)^n}{n\,!} f^n(c), \ldots\ldots (5) \text{ மூலம்} \ldots\ldots (6)$$

$x = a$ என (2)-ல் பிரதியிட

$$f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} \cdot f''(a) \quad \ldots$$

$$- \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$

$$= F(a) = \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c) \quad \ldots \text{(6)-ன் மூலம்.}$$

$$\therefore \quad f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c) \quad \ldots \ldots (7)$$

எனுமாறு ஒரு c மதிப்பாவது $a<c<b$ ஆக உளதாகிறது.

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : இத்தேற்றத்தில் $\frac{(b-a)^n}{n!} f^n(c)$ என்பதை n உறுப்புக்களுக்குப் பிறகு மீதி எனக்கூறுகிறோம்.

குறிப்பு 2 : மாற்று அமைப்பு

$b = a+h$ என எடுத்துக்கொண்டால், $0<\theta<1$ என அமைய $c = a+\theta h$. எனவே, (7)-ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-n)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h) \, ;$$

இங்கே $0<\theta<1$ ... ... (7')

இங்கே $\frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h)$ என்பது டெய்லர் தேற்றத்தின்படி n உறுப்புகளுக்குப் பிறகு லெக்ராஞ்சி அமைப்பில் மீதி எனக் கூறுகிறோம், R_n என இதைக்குறிப்பிடுகிறோம்.

குறிப்பு 3 : மற்றுமொரு மாற்றமைப்பு

(7)-ல் b-க்கு பதிலாக x பிரதியிட்டால்,

$$f(x) = f(a) + (x-a)\, f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2\,!} f''(a) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(a) + \frac{(x-a)^n}{n\,!};\ \text{இங்கே } a<c<b,$$

இதிலிருந்து $f(x)$-ஐ $(x-a)$-ன் படிகளில் விரித்தெழுதலாம்; $x = a$-ல் $f(x)$, அதன் தொடர்ந்த வகைக் கெழுக்கள் ஆகிய வற்றின் மதிப்பைக் காணலாம்.

குறிப்பு 4 : குறிப்பு 2-ல் $n = 1$ என எடுத்துக்கொண்டால்,

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h);\quad (0 < \theta < 1)$$

என்ற இடைமதிப்புத் தேற்றம் கிடைக்கும்.

§ 6-42 கிளை : மெக்லாரின் தேற்றம் (Maclaurin's Theorem)

$f(x)$ என்ற சார்பலன் தரப்பட்டுள்ளது.

(i) $f(x)\ f'(x) \ldots\ f^{n-1}(x)$ என்பன $[0, x]$ என்ற அடைத்த இடைவெளியில் தொடர்ச்சி உடையனவாகவும்

(ii) $f^n(x)$ என்பது $]\,0, x\,[$ என்ற திறந்த இடைவெளியில் உளதாகவும் இருப்பின்,

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0)$$

$$+ \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x)$$

என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு 0-க்கும் 1-க்கும் இடையே குறைந் தது θ என்ற ஒரு எண்ணாவது இருக்கும்.

நிறுவல் :

குறிப்பு (2)-ல் வரும் (7′)-ல் a-க்குப் பதிலாக O ம், h-க்குப் பதிலாக x-ம் பிரதியிட

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)\,!} f^{n-1}(0)$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \cdot f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x);$$

இங்கே $0 < \theta < 1$.

குறிப்பு : $x^n \dfrac{f^n(\theta x)}{n!}$ என்பது மெக்லாரின் தேற்றத்தில் n உறுப்புக்களுக்குப்பின் லெக்ராஞ்சி அமைப்பில் மீதி எனப்படும்.

§ 6·5 டெய்லர் தேற்றத்தில் n உறுப்புகளுக்குப்பின் மீதியைப் பிற அமைப்புக்களில் காணுதல்

$$\phi(x) = F(x) - \frac{(b-x)^q}{(b-a)^q} F(a) \quad \ldots\ldots (1)$$

என்ற சார்பலனைக் கருதுக.

$$\text{இங்கே } F(x) = f(b) - f(x) - (b-x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f''(x)$$

$$- \ldots\ldots - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(x) \quad \ldots\ldots (2)$$

q மெய் எண் § 6-41 பகுதியில் கண்டதைப் போலவே $x = c$-ல் $\phi'(x) = 0$. எனவே,

$$\phi'(x) = F'(x) + \frac{q(b-x)^{q-1}}{(b-a)^q} \cdot F(a) \quad \ldots (3)$$

(3)-லிருந்து,

$$F'(x) = -f'(x) + [f'(x) - (b-x)f''(x)]$$

$$+ \left[2\frac{(b-x)}{2!} \cdot f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!} f'''(x)\right] + \ldots$$

$$+ \left[\frac{(b-x)^{n-2}}{(n-2)!} f^{n-1}(x) - \frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x)\right]$$

$$= -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) \quad \text{(பிற உறுப்புக்கள் நீங்க)} \ldots (4)$$

(1)-லிருந்து

$$\phi'(x) = -\frac{(b-x)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(x) + \frac{q(b-x)^{q-1}}{(b-a)^q} F(a)$$

$$= \frac{q(b-x)^{q-1}}{(b-a)^q} \cdot \left[F(a) - \frac{(b-a)^q (b-x)^{n-q}}{q \cdot (n-1)!} f^n(x)\right] \quad \ldots (5)$$

$x = c$, $\phi'(x) = 0$ என (5)-ல் பிரதியிட,

$$0 = \frac{q(b-c)^{q-1}}{(b-a)^q}\left[F(a) - \frac{(b-a)^q (b-c)^{n-q}}{q\cdot(n-1)!} f^n(c)\right].$$

(அது) $F(a) = \frac{(b-a)^q (b-c)^{n-q}}{q\cdot(n-1)!} f^n(c)$

(அது) $f(b) - f(a) - (b-a) f'(a) - \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) \ldots$

$$-\frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a)$$

$$= \left[\frac{(b-a)^q \cdot (b-c)^{n-q} \cdot f^n(c)}{q\cdot(n-1)!}\right]$$

$$\therefore f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} \cdot f''(a)$$

$$+ \ldots\ldots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{(b-a)^q (b-c)^{n-q}}{q\cdot(n-1)!} f^n(c)$$

இங்கே $a<c<b$.

$b = a + h$ என எடுத்துக் கொண்டால் $0<\theta<1$ என அமைய $c = a + \theta h$. அதனல்

$$b - c = h(1-\theta)$$

எனவே,

$$f(a+h) = f(a) + h f^1(a) - \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n (1-\theta)^{n-q}}{q(n-1)!} f^n(a+\theta h) \quad \ldots(6)$$

$\frac{h^n (1-\theta)^{n-q}}{q\cdot(n-1)!} \cdot f^n(a+\theta h)$ என்பது n உறுப்புக்களுக்குப் பின் ரோஷ் (Roche) அமைப்பில் மீதி எனப்படும்.

மேல்கண்ட மீதியில் $q = 1$ எனப் பிரதியிட காஷி அமைப்பில் n உறுப்புக்களுக்குப்பின் மீதியானது

$\frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^n(a+\theta h)$ எனக் கிடைக்கும்.

குறிப்பு 1: ரோஷ் அமைப்பு மீதியில் $q = n$ எனப் பிரதியிட, லெக்ராஞ்சி அமைப்பில் மீதி பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$\frac{h^n}{n(n-1)!} f^n(a+\theta h).$$

$$(\text{அது}) \quad \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h).$$

குறிப்பு 2: காஷி அமைப்பில் a-க்கு 0-ம் h-க்கு x-ம் பிரதியிட, மெக்லாரின் தேற்றத்தில் காஷி அமைப்பில் n உறுப்புகளுக்குப் பின் மீதி பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$\frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n f^n(\theta x)$$

குறிப்பு 3: சமன்பாடு (5)-ல் a-க்கு 0-ம் h-க்கு x-ம் q-க்கு 1-ம் பிரதியிட, மெக்லாரின் தேற்றம் காஷி அமைப்பில் மீதியோடு பின் வருமாறு கிடைக்கும்.

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \quad + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(0)$$
$$+ \frac{(1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} x^n f^n(\theta x),$$

இங்கே $0 < \theta < 1$.

இந்த மீதிகளில் எல்லாம் θ என்பது ஒரே மதிப்பைக் கொண்டதல்ல என்பதை கவனிக்கவும். 0-க்கும் 1-க்கும் இடையே θ அமைந்துள்ளது என்பது மட்டுமே உண்மை.

குறிப்பு 4: டெய்லர் தேற்றம் பின்வரும் சமயங்களில் உண்மையாக இருக்காது என்பதைக் கவனிக்கவும்.

(1) $f(x)$ அல்லது அதன் தொடர்ந்த வகைக்கெழுக்கள் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள x மதிப்புகளுக்கு

(i) முடிவிலியாக ஆனாலும்.

(ii) தொடர்ச்சியற்றதாக ஆனாலும்

தேற்றம் உன்மையல்ல.

(2) n பெரிதாகும் எல்லையில்,

$\frac{h^n}{n!} f^n(x+\theta h)$ என்ற மீதி பூச்சியமானால் தேற்றம் உண்மையல்ல; ஏனெனில் அப்போது தொடர் முடிவுடையது ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$f(x) = \log \dfrac{x^2 + ab}{(a+b)x}$ என்ற சார்பலனுக்கு (a, b) இடைவெளியில் ரோல் தேற்றத்தை பயன்படுத்துவது பற்றி ஆராய்க.

தீர்வு :

$$f(x) = \log \frac{x^2 + ab}{(a+b)x} \text{ எனில்}$$

$$f(a) = \log \frac{a^2 + ab}{(a+b)a} = \log 1 = 0 ;$$

$$f(b) = \log \frac{b^2 + ab}{(a+b)b} = \log 1 = 0.$$

எனவே $f(a) = f(b) = 0.$ ... (1)

மேலும்

$$\text{வலப்புற } f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

இங்கே $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \frac{1}{h}\left[\log\left\{\frac{(x+h)^2 + ab}{(a+b)(x+h)}\right\} - \log\left\{\frac{x^2 + ab}{(a+b)x}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\log \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + ab)(a+b)x}{(a+b)(x+h)(x^2+ab)}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\log \frac{(x^2 + 2xh + h^2 + ab)x}{(x^2+ab) \,.\, x+h}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\log\left\{1 + \frac{2hx + h^2}{x^2 + ab}\right\} - \log\left\{1 + \frac{h}{x}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\frac{2hx}{x^2 + ab} - \frac{h}{x} + h^2 \text{ உறுப்புக்கள்}\right]$$

$$= \left[\frac{2x}{x^2+ab} - \frac{1}{x} + h \text{ உறுப்புக்கள்}\right]$$

$\therefore$ வலப்புற $f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{2x}{x^2+ab} - \dfrac{1}{x}$

இவ்வாறே இடப்புற $f'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \left[\dfrac{f(x-h) - f(x)}{h}\right]$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{(-h)} \left[\frac{-2hx}{x^2+ab} - \frac{(-h)}{x} + h^2 \text{ உறுப்புக்கள்}\right]$$

$$= \frac{2x}{x^2+ab} - \frac{1}{x}.$$

எனவே

வலப்புற $f'(x)$ = இடப்புற $f'(x)$

$\therefore$ $f(x)$ என்ற சார்பலன் (a, b)-ல் எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் வகையிடத்தக்கது. ...... (2)

(a, b)-ல் எல்லா x மதிப்புகளுக்கும் வகையிடத்தக்க $f(x)$, தொடர்ச்சிமுடையது. ...... (3)

(1), (2), (3) மூலம் $f(x)$ ரோல் தேற்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 2:

$a \leq x \leq b$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$; $\phi(x)$, $\psi(x)$ என்பன வகைக்கெழுக்கள் பெற்றிருந்தால்

$$\begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f'(c) & \phi'(c) & \psi'(c) \end{vmatrix} = 0$$

என்பது உண்மையாக இருக்குமாறு a, b இடையே x-ன் C மதிப்பு உண்டு என நிறுவுக.

தீர்வு ;

$$F(x) = \begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f(x) & \phi(x) & \psi(x) \end{vmatrix}$$ என்ற சார்பலனைக் கருதுக.

(x), $\phi(x)$, $\psi(x)$ என்பனவற்றிற்கு வகைகெழுக்கள் உண்டாதலால் $F(x)$-க்கும் வகைக்கெழு இருக்கும். எனவே, $F(x)$ தொடர்ச்சி உடையது.

$F(a) = F(b) = 0$; ஏனெனில் இரு வரிசைகள் ஒன்று போலவே இருக்கும்.

எனவே.

$F(x)$ ரோல் தேற்றத்தின் எல்லா நிபந்தனைகளையும் நிறைவு செய்கிறது.

எனவே, a, b இடையே உள்ள x-ன் c என்ற மதிப்பிற்கு $F'(x) = 0$. அதாவது, $F'(c) = 0$.

$$\therefore \begin{vmatrix} f(a) & \phi(a) & \psi(a) \\ f(b) & \phi(b) & \psi(b) \\ f(c) & \phi(c) & \psi(c) \end{vmatrix} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்பிற்கும் வகைக்கெழு குறையாக அமைந்த சார்பலனானது அந்த இடைவெளியில் ஒரே முறை (monotonic) இறங்கும் சார்பாக இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

(a, b) என்ற இடைவெளியில் வகைக்கெழு உளதாக $f(x)$ என்ற சார்பலன் இருக்கிறது. (a, b) என்ற இடைவெளியில் d, e என்ற இருபுள்ளிகளும் $e > d$ என அமைந்துள்ளன என்க. (d, e) இடைவெளியில் $f(x)$ வகையிடத்தக்கதாகையால் d, e இடையே $f(e) - f(d) = (e-d)f'(c)$ ... ... (1) எனுமாறு c என்ற எண் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தால் உளதாகிறது.

(a, b)-ல் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும்

$f'(x) < 0$ என கணக்கில் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $f'(c) < 0$.

மற்றும் $e - d > 0$.

எனவே (i)-லிருந்து,

$$f(e) - f(d) < 0.$$

அதாவது $f(e) < f(d)$

எனவே (a, b)-ல் $f(x)$ ஒரே முறை இறங்கும் சார்பலன் (monotonically decresing)

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$f(x) = x(x-1)(x-2)$ மற்றும் $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ எனில் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி c காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = x(x-1)(x-2)$$
$$= x^3 - 3x^2 + 2x.$$
$$f(a) = f(0) = 0$$
$$f(b) = f(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{8}$$
$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\frac{3}{8} - 0}{\frac{1}{2} - 0} = \frac{3}{4}$$

இப்போது $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$$f'(c) = 3c^2 - 6c + 2$$

லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றப்படி,

$$3c^2 - 6c + 2 = \frac{3}{4}$$
$$12c^2 - 24c + 5 = 0$$
$$\therefore \quad c = \frac{+24 \pm \sqrt{576 - 240}}{24}$$
$$= \frac{24 \pm 4\sqrt{36 - 15}}{24}$$
$$= 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{6}$$

c-ன் மதிப்பு 0-க்கும் $\frac{1}{2}$-க்கும் இடைப்பட்டது.

எனவே, $c = 1 - \dfrac{\sqrt{21}}{6}$.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்பலன்களின் வகைக்கெழுக்கள் முறையே $f'(x)$, $g'(x)$; மற்றும் $\phi(x) = g(f(x))$ எனில் $\phi(x)$-ன் வகைக்கெழு $\phi'(x) = g'\{f(x)\}\, f'(x)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\phi'(x) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{g\{f(x+h)\} - g\{f(x)\}}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{g\{f(x) + hf'(x+\theta h)\} - g\{f(x)\}}{h}$$

(இங்கே $0 < \theta < 1$; இடைமதிப்புத் தேற்றம்)

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{g(u+v) - g(u)}{h}$$

[இங்கே $u = f(x)$; $v = hf'(x+\theta h)$]

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{g(u) + vg'(u+\theta_1 v) - g(u)}{h}$$

இங்கே $0 < \theta_1 < 1$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{v\,g'(u+\theta_1 v)}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{[hf'(x+\theta h)] \cdot g'[f(x) + \theta_1 hf'(x+\theta h)]}{h}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} f'(x+\theta h) \cdot g'[f(x) + \theta_1 hf'(x+\theta h)]$$

$$= g'\{f(x)\} \cdot f'(x).$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x > 1$ எனில்

$\dfrac{x-1}{x} < \log x < x - 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\phi(x) = \log x - \dfrac{x-1}{x}$ என்க.

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{x(1) - (x-1)(1)}{x^2}$$

$$= \frac{x - x + x - 1}{x^2}$$

$$= \frac{x-1}{x^2}$$

$x > 1$ எனில் $\phi'(x) > 0$; மற்றும் $\phi'(1) = 0$.

எனவே $\phi(x)$ ஆனது $(1, \infty)$ இடைவெளியில் ஒரே முறை வளரும் சார்பலன். மேலும் $\phi(1) = 0$

$\therefore$ $x > 1$ எனில்

$$\phi(x) > \phi(1) = 0$$

அதாவது $x > 1$ எனில் $\log(x) > \frac{x-1}{x}$ ... (1)

இவ்வாறே

$$\chi(x) = (x-1) - \log x \text{ என்க.}$$

$$\chi'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$x > 1$ எனில் $\chi'(x) > 0$; மற்றும் $\chi'(1) = 0$

எனவே $\chi(x)$ ஆனது $(1, \infty)$ இடைவெளியில் ஒரே முறை வளரும் சார்பலன். மேலும் $\chi(1) = 0$.

$\therefore$ $x > 1$ எனில்

$$\chi(x) > \chi(1) = 0$$

அதாவது $x > 1$ எனில் $x - 1 > \log x$ ... (2)

(1), (2) மூலம் $x > 1$ எனில்

$$\frac{x-1}{x} < \log x < x - 1$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$f^{n+1}(x)$ என்பது தொடர்ச்சியானதாகவும் $x = a$-ல் பூச்சிய மில்லாத மதிப்பை பெற்றிருப்பதாகவும் அமைந்தால், லெக்ராஞ்சி வடிவத்தில் n உறுப்புகளுக்குப் பின் மீதியைக் கொண்ட டெய்லர் தேற்றத்தில் வரும் θ என்ற எண், h பூச்சியத்தை அணுக, $\frac{1}{n+1}$ என்ற எல்லையை அணுகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

முறையே n உறுப்புகளுக்குப் பின்னரும், $n + 1$ உறுப்புக் களுக்குப் பின்னரும் மீதிகள் இருக்குமாறு டெய்லர் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(a) + \frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h) \dots \text{(i)}$$

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a+\theta' h) \dots \text{(ii)}$$

இங்கே $0 < \theta < 1$; $0 < \theta' < 1$.

(i), (ii) லிருந்து,

$$\frac{h^n}{n!} f^n(a+\theta h) = \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(a+\theta' h)$$

எனவே $f^n(a+\theta h) - f^n(a) = \dfrac{h}{n+1} f^{n+1}(a+\theta' h)$

லெக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்புத்தேற்றத்தை இடப்பக்கம் பயன் படுத்த,

$\theta h f^{n+1}(a + \theta'' \theta h) = \dfrac{h}{n+1} f^{n+1}(a+\theta' h)$ இங்கே $0<\theta< 1$.

எனவே
$$\theta = \frac{1}{n+1} \frac{f^{n+1}(a+\theta' h)}{f^{n+1}(a+\theta''\theta h)}$$

$$\underset{h\to 0}{\text{Lt}}\ \theta = \frac{1}{n+1}$$ (ஏனெனில் $f^{n+1}(a) \neq 0$.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

n உறுப்புக்களுக்குப் பின் லெக்ராஞ்சி வடிவத்தில் மீதி வருமாறு மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\log(1+x)$-ஐ விரித்தெழுதுக.

தீர்வு ;

$f(x) = \log(1+x)$ என்க.

எனவே $f(0) = 0$.

$f'(x) = (1+x)^{-1}$: $\therefore f'(0) = 1$

$f''(x) = -(1+x)^{-2}$ $\therefore f''(0) = -1$

$f'''(x) = 2!(1+x)^{-2}$; $\therefore f'''(0) = 2!$

... ...

... ...

$$f^{n-1}(x) = \frac{(-1)^{n-2}(n-2)!}{(1+x)^{n-1}}; \quad \therefore f^{n-1}(0) = (-1)^{n-2}(n-2)!$$

$$f^{n}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^{n}}$$

$$\therefore f^{n}(\theta x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+\theta x)^{n}}$$

$$\therefore f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1}(0) + \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x),$$

$$0 < \theta < 1.$$

$$\therefore \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-2} \frac{x^{n-1}}{n-1}$$

$$+ (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}, \quad 0 < \theta < 1.$$

பயிற்சிகள் 6 (A)

1. $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = e^x \sin x$ என்ற சார்பலனுக்கு ரோல் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

2. $(-1, 1)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = |x|$ என்ற சார்பலனுக்கு ரோல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவது பற்றி ஆராய்க.

3. $(0, 2)$ என்ற இடைவெளியில் $f(x) = 2 + (x-1)^{2/3}$ என்ற சார்பலனுக்கு ரோல் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவது பற்றி ஆராய்க.

4. m, n மிகை முழு எண்களாக இருக்கும்போது

$f(x) = (x-a)^m (x-b)^n$ என்ற சார்பலனுக்கு ரோல் தேற்றத்தைச் சரிபார்க்கவும்.

5. $0 < \alpha < \beta < \pi/2$ ஆக இருக்கும்போது

$$f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin \alpha & \sin \beta \\ \cos x & \cos \alpha & \cos \beta \\ \tan x & \tan \alpha & \tan \beta \end{vmatrix}$$ என்றால்

$\alpha < \quad < \beta$ எனுமாறு $f'(\xi) =$ என நிறுவுக.

6. $(-1, 1)$ என்ற இடைவெளியில்

$$f(x) = x^2 \ (x \neq 0)$$
$$f(0) = 1$$

என்ற சார்பலன் ரோல் தேற்ற நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யாது என்றும், ஆனால் $f(x) = x^2$ என்ற சார்பலன் நிறைவு செய்யும் என்றும் நிறுவுக.

7. (a, b) என்னும் இடைவெளியில் c-ம் d-ம் இருக்கும்போது, f'' தொடர்ச்சி உடையது என எடுத்துக்கொண்டு

$$f(c) - f(a) \cdot \frac{b-c}{b-a} - f(b)\frac{c-a}{b-a}$$
$$= \tfrac{1}{2}(c-a)(c-b) f''(d)$$

என நிறுவுக.

8. ஒரு இடைவெளியில் உள்ள ஒவ்வொரு x மதிப்புக்கும் மிகையான வகைக்கெழு கொண்டு அமைந்துள்ள சார்பலன் அந்த இடைவெளியில் ஒரே முறை வளர் சார்பலன் (monotonic increasing function) ஆகும் என நிறுவுக.

9. $f(x)$ இருமுறை வகையிடத்தக்க சார்பலன் அது $a<c<b$ எனில் $f(a) = f(b) = 0$, $f(c) > 0$ என அமைந்துள்ளது. a, b-க்கு இடையே $f''(d) < 0$ எனுமாறு குறைந்தது ஒரு d இருக்கும் என நிறுவுக.

10. $f(x)$-க்கு முதல் மூன்று வரிசை வகைக்கெழுக்கள் உண்டெனத் தரப்பட்டுள்ளது ; $a < c < b$ ஆக

$$f(b) = f(a) + \tfrac{1}{2}(b-a)\,[f'(a) + f'(b)]$$
$$- \frac{1}{12}(b-a)^2 f''(c)$$

என நிறுவுக.

11. $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ மற்றும், $a = 0$, $b = 4$ எனில் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி c காண்க.

12. $f(x) = x^3 - 2x^2$ மற்றும், $a = 2$, $b = 5$ எனில் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி C காண்க.

13. $f(x) = x^3 + x$ மற்றும், $a = 1, b = 2$ எனில் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி C காண்க,

14. ஏற்ற நிபந்தனைகளுக்கு இசைய

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) \\ \phi(a) & \phi(b) \end{vmatrix} = (b-a) \begin{vmatrix} f(a) & f'(C) \\ \phi(a) & \phi'(C) \end{vmatrix}$$

என அமையுமாறு $a < C < b$ எனக் குறைந்தது ஒரு C மதிப்பாவது இருக்கும் என நிறுவுக.

15. $x > 0$ எனில், $x > \log(x+1) > \frac{x}{1+x}$ என நிறுவுக.

16. $x > 0$ எனில், $\sin x < x$ என நிறுவுக.

17. $x > 0$ எனில்,

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3(1+x)} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$ என

நிறுவுக.

18. $0 < \theta < 1$ எனில்

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a+\theta h)$$

என நிறுவி

ஏற்ற நிபந்தனைக் கூறி $\underset{h \to 0}{\text{Lt}} \; \theta = \frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

19. $f''(a) \neq 0$ எனில் h பூச்சியத்தை அணுக லெக்ராஞ்சியின் இடை மதிப்புத் தேற்றத்தில் வரும் θ ஆனது $\frac{1}{2}$ என்ற எல்லை மதிப்பை அணுகும் என நிறுவுக.

20. n உறுப்புகளுக்குப் பின் லெக்ராஞ்சி வடிவத்தில் மீதி வருமாறு மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின் வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக :

(a) $\cos x$

(b) a^x

21. (a, b) என்ற அரங்கத்தில் உள்ள ஒவ்வொரு x-க்கும் $f(x)$-க்கு முதல் n வரிசை வகைக்கெழுக்கள் இருப்பின் $0 < \theta < 1$ என ஏதோ ஒரு θ மதிப்புக்கு

$$f(b) = f(a) + (b-a) f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a)$$

$$+ \dots \frac{(b-a)^r}{r!} f^r(a) + \dots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{n-1} a$$

$$+ \frac{(b-a)^n}{n!} f^n \{a + \theta (b-a)\}$$ என்பது உண்மை

என நிறுவுக.

விடைகள் 6 (A)

2. பயன்படுத்த முடியாது.

3. பயன்படுத்த முடியாது.

11. $C = 2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$

12. $3 \cdot 97$

13. $+\sqrt{\frac{7}{3}}$

20. (a) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$

$$+ \frac{(-1)^{m+1} \cdot x^{2m+1}}{(2m+1)!} \sin(\theta x)$$

(b) $1 + x \log a + \frac{x^2}{2!} (\log a)^2 + \dots$

$$\dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} (\log a)^{n-1} + \frac{x^n}{n!} (\log a)^n$$

§ 6-6. டெய்லர், மெக்லாரின் அமைப்பில் முடிவில்லாத தொடர்

டெய்லர் தொடர் : a, $a+h$ என்ற இடைவெளியில் $f(x)$ என்ற சார்பலனுக்கு எல்லா வரிசை வகைக்கெழுக்களும் இருந்து,

$R_n = \frac{h^n}{n!} f^n (a + \theta h)$ என்ற மீதியானது $n \longrightarrow \infty$ என்ற எல்லையில் பூச்சியமாக ஆனால்,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \dots \dots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \dots \dots \text{ to } \infty$$

நிறுவல் :

§ 6-41, குறிப்பு 2 மூலம்

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + R_n \quad \dots (1)$$

இங்கே $R_n = \frac{h^n}{n!}f^n(a+\theta h)$

$$S_n = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a)$$

எனக்கொள்க.

$$\therefore \quad f(a+h) = S_n + R_n$$

$n \longrightarrow \infty$ என்ற எல்லையில் $R_n \longrightarrow 0$ எனத்தரப்பட்டு உள்ளது.

$$\underset{n \to \infty}{\mathrm{Lt}} S_n = f(a+h)$$

$$\therefore \quad f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \dots$$

ஒருங்குகிறது (converges). அதன் கூட்டல் தொகை, $f(a+h)$.

எனவே,

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \dots \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(a) + \dots \dots \infty \text{ வரை}$$

குறிப்பு 1 : மாற்றுமுறை நிறுவல் :

$f(a+h)$ என்பது h-ன் படிகளில் விரித்தெழுதக் கூடியது என்றும், அவ்விரிவை, x-ஐப் பொறுத்து, எத்தனைமுறை வேண்டுமானாலும் வகையீடு காணலாம் எனக் கொண்டு, பின் வருமாறு நிறுவலாம்.

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + a_2h^2 + \dots \quad \dots (1)$$

இங்கே a_0, a_1, ... என்பன a-ன் சார்பலன்கள், h-ஐச் சார்ந்தன அல்ல. h-ஐப் பொருத்து தொடர்ந்து வகையீடு செய்வோம்.

$$\frac{d}{dh} f(a+h) = \frac{d}{dt} f(t) \cdot \frac{dt}{dh} \text{ ; இங்கே } t = a+h.$$

$$= f'(t) \cdot 1 = f'(a+h).$$

h-ஐப் பொறுத்து தொடர்ந்து வகையீடு செய்ய

$$f'(a+h) = a_1 + 2a_2 h + 3a_3 h^2 + \ldots\ldots \quad (2)$$

$$f''(a+h) = 2a_2 + 3.2\, a_3 h + \ldots\ldots \quad (3)$$

$$f'''(a+h) = 3.2 a_3 + \ldots\ldots \quad (4)$$

மேற்கண்ட முடிவுகளில் $h = 0$ எனப் பிரதியிட,

$$f(a) = a_0 \text{ ; } f'(a) = a_1 \text{ ; } \frac{f''(a)}{2!} = a_2 \ldots\ldots$$

$\therefore$ (1)-லிருந்து $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \ldots\ldots$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \ldots\ldots \infty \text{ வரை} \quad (5)$$

குறிப்பு 2 : a-க்கு பதிலாக x பிரதியிட,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + \ldots \infty$$

குறிப்பு 3 ; (5)-ல் h-க்கு பதிலாக $x-a$ பிரதியிட,

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^n}{n!} f^n(a) + \ldots\ldots \infty$$

குறிப்பு 4 : மெக்லாரின் முடிவிலாத் தொடர் :

(5)-ல் a-க்கு பதிலாக பூச்சியமும், h-க்கு பதிலாக x-ம் பிரதியிட

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^n(0) + \ldots \infty$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$-1 < x \leq 1$ என்ற இடைவெளியில் $\log(1+x)$ என்பதை x-ன் ஏற்ற வரிசையில் விரித்தெழுதமுடியும் என நிறுவி விரித்தெழுதுக.

தீர்வு :

$f(x) = \log(1+x)$ என்க.

$(1+x) > 0$ எனில் அதாவது $x > -1$ எனில் $\log(1+x)$-க்கு எல்லா வரிசை வகைக்கெழுக்களும் உண்டென அறிவோம்.

மேலும் $f'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$$f''(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$f'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$$

....

$$f^n(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \qquad (x > -1)$$

R_n என்பது லெக்ராஞ்சி வடிவத்தில் மீதி எனில்

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^n(\theta x) = \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^n.$$

(i) $0 \leq x \leq 1$ என்றால் $x/1+\theta x$ அதனால் $[x/1+\theta x]^n$ மிகையாகவும் < 1 ஆகவும் இருக்கும் (n எம்மதிப்புடையதானாலும்). $n \longrightarrow \infty$ எனும்போது $1/n \longrightarrow 0$ $\therefore R_n \longrightarrow 0$ எனவே $0 \leq x \leq 1$ எனில் $n \longrightarrow \infty$ என்றால்

$$R_n \longrightarrow 0$$

(ii) $-1 < x < 0$ என்க.

$x/1+\theta x$ இங்கே 1-ஐ விடக் குறைந்த எண் மதிப்பைப் பெற்றிருக்காமலிருக்கலாம். எனவே R_n என்ற லெக்ராஞ்சி அமைப்பில் இருந்து முடிவு கட்ட முடியாமல் போகிறது.

காஷி அமைப்பில் உள்ள மீதியைப் பயன்படுத்தினால்

$$R_n = \frac{x^n}{n-1}(1-\theta)^{n-1} f^n(\theta x)$$

$$= (-1)^{n-1} x^n \frac{1}{1+\theta x} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^{n-1}$$

இங்கே $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$ என்பது மிகை, < 1 ;

$$\frac{1}{1+\theta x} < \frac{1}{1-|x|}$$

மேலும் $n \longrightarrow \infty$ ஆக $x^n \longrightarrow 0$

$\therefore \quad n \longrightarrow \infty$ ஆக $R_n \longrightarrow 0$

எனவே மெக்லாரின் தேற்ற நிபந்தனைகள் நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

மேலும் $f^n(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$

எனவே மெக்லாரின் தொடரில் பிரதியிட

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots$$

இங்கே $-1 < x \leq 1.$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$e^{\sin x}$-ஐ மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதுக.

தீர்வு :

$y = e^{\sin x}$ என்க.

எனவே,

$(y)_0 = e^0 = 1; \quad y_1 = e^{\sin x}\cos x := y\cos x$

$\therefore (y_1)_0 = (y\cos x)_0 = 1$

$y_2 = y_1\cos x - y\sin x\,; \quad (y_2)_0 = (y_1)_0 \cdot 1 - 0 = 1$

$y_3 = y_2\cos x - 2y_1\sin x - y\cos x$

$= (y_2 - y)\cos x - 2y_1\sin x.$

$\therefore (y_3)_0 = (y_2)_0 - (y)_0 = 1 - 1 = 0.$

$y_4 = (y_3 - y_1)\cos x - (y_2 - y)\sin x - 2y_2\sin x - 2y_1\cos x$

$= (y_3 - 3y_1)\cos x - (3y_2 - y)\sin x.$

$$\therefore (y_4)_0 = (y_2)_0 - 3(y_1)_0 - 0.$$
$$= 0 - 3 = -3$$

$$y_5 = (y_4 - 3y_2)\cos x - (y_3 - 3y_1)\sin x$$
$$-(3y_3 - y_1)\sin x - (3y_2 - y)\cos x.$$

$$= (y_4 - 6y_2 + y)\cos x - (4y_3 - 4y_1)\sin x$$

$$(y_5)_0 = (y_4)_0 - 6(y_2)_0 + (y)_0 - 0$$

$$= -3 - 6 + 1 = -8$$

மெக்லாரின் தேற்றத்தின்படி,

$$y = e^{\sin x} = (y)_0 + x(y_1)_0 + \frac{x^2}{2!}(y_2)_0 + \frac{x^3}{3!}(y_3)_0$$
$$+ \frac{x^4}{4!}(y_4)_0 + \frac{x^5}{5!}(y_5)_0 + \dots\dots$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \dots\dots$$

எடுத்துக்காட்டு 3.

log sec x-ஐ மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரிக்கவும்.

தீர்வு :

$$y = \sec x \text{ என்க.} \quad \therefore \quad (y)_0 = 1$$

$$y_1 = \sec x \tan x = y \tan x$$

$$\therefore \quad (y_1)_0 = 0.$$

$$y_2 = y_1 \tan x + y \sec^2 x.$$
$$= y_1 \tan x + y^3 \qquad \therefore \quad (y_2)_0 = 1$$

$$y_3 = y_2 \tan x + y_1 \sec^2 x + 3y^2 y_1$$
$$= y_2 \tan x + 4y^2 y_1$$

$$\therefore \quad (y_3)_0 = 0$$

$$(y_4) = y_3 \tan x + y_2 \sec^2 x + 4y^2 y_2 + 8yy_1^2$$
$$= y_3 \tan x + 5y^2 y_2 + 8yy_1^2$$

$\therefore \quad (y_4)_0 = 5$

$$(y_5) = y_4 \tan x + y_3 \sec^2 x + 5y^2y_3 + 10yy_1y_2 + 16yy_1y_2 + 8y_1{}^3$$

$$= y_4 \tan x + 6y^2y_3 + 26yy_1y_2 + 8y_1{}^3$$

$\therefore \quad (y_5)_0 = 0$

$$y_6 = y_5 \tan x + y_4 \sec^2 x + 6y^2y_4 + 12yy_1y_3 + 26yy_1y_3 + 26yy_2{}^2 + 26y_1{}^2y_2 + 24y_1{}^2y_2$$

$\therefore \quad (y_6)_0 = 5 + 30 + 26 = 61$

எனவே

$$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61x^6}{6!} + \dots\dots$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

tan x-ஐ மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதுக.

தீர்வு :

$f(x) = \tan x$ என்க.

$$f'(x) = \sec^2 x = 1 + \tan^2 x.$$

$$f''(x) = 2\tan x \sec^2 x = 2\tan x(1+\tan^2 x)$$

$$= 2\tan x + 2\tan^3 x.$$

$$f'''(x) = 2\sec^2 x + 6\tan^2 x \cdot \sec^2 x.$$

$$= 2(1+\tan^2 x) + 6\tan^2 x(1+\tan^2 x)$$

$$= 2 + 8\tan^2 x + 6\tan^4 x.$$

$$f^{iv}(x) = 16\tan x \sec^2 x + 24\tan^3 x \sec^2 x.$$

$$= 16\tan x\,(1+\tan^2 x) + 24\tan^3 x(1+\tan^2 x)$$

$$= 16\tan x + 40\tan^3 x + 24\tan^5 x.$$

$$f^{v}(x) = 16\sec^2 x + 120\tan^2 x \sec^2 x + 120\tan^4 x \sec^2 x.$$

ஆகவே $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = 2,$ $f^{iv}(0) = 0,\ f^{v}(0) = 16.$

மெக்லாரின் தொடரில் இம்மதிப்புகளைப் பிரதியிட,

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f'''(0) + \frac{x^4}{4!}f^{iv}(0) + \frac{x^5}{5!}f^{v}(0) + \ldots\ldots$$

ஆகவே $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \ldots\ldots$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$e^x \cos x$-ஐ மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித் தெழுக.

தீர்வு : $f(x) = e^x \cos x$ என்க.

அதாவது, $f(x) = e^x \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$= \frac{e^{x(1+i)} + e^{x(1-i)}}{2}$$

$$\therefore\ f^n(x) = \frac{(1+i)^n e^{x(1+i)} + (1-i)^n e^{x(1-i)}}{2}$$

$$\therefore\ f^n(0) = \frac{(1+i)^n + (1-i)^n}{2} = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

$$\therefore\ e^x \cos x = f(0) + x \cdot f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^n(0) + \ldots\ldots$$

$$e^x \cos x = 1 + x \cdot 2^{1/2}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{x^2}{2!}2^{2/2}\cos\frac{2\pi}{4} + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}2^{n/2}\cdot\cos\frac{n\pi}{4} + \ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$y = (\sin^{-1}x)^2$ எனில் $x=0$ ஆக இருக்கும்போது $y_{n+2} = n^2 y_n$ என நிறுவி, மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி,

$$(\sin^{-1} x)^2 = \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2 \cdot 2^2}{4!}x^4 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{6!} \cdot 2x^6 + \ldots\ldots$$

என நிறுவுக. மேலும்,

$$\theta^2 = \frac{2\sin^2\theta}{2!} + \frac{2^2 \cdot 2\sin^4\theta}{4!} + \frac{4^2 \cdot 2^2 \cdot 2\sin^6\theta}{6!} + \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y = f(x) = (\sin^{-1} x)^2 \qquad \therefore f(0) = 0$$

$$y_1 = \frac{2\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}; \qquad \therefore (y_1)_0 = f'(0) = 0$$

$$\sqrt{1-x^2}\; y_1 = 2\sin^{-1} x$$

வர்க்கமாக்க

$$(1-x^2)\, y_1^2 = 4(\sin^{-1} x)^2 = 4y$$

வகைக்கெழு காண்க.

$$(1-x^2)\, 2y_1 \cdot y_2 + (-2x)\, y_1^2 = 4y_1$$

$2y_1$ ஆல் வகுத்து எழுத

$$(1-x^2)\, y_2 - x y_1 = 2 \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$\therefore (y_2)_0 = f''(0) = 2$$

(1)-ஐ n வரிசைக்கு வகைக்கெழு காண

$$(1-x^2)\, y_{n+2} + n(-2x)\, y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2}(-2)\, y_n - x y_{n+1} - n y_n = 0$$

$$\therefore (1-x^2)\, y_{n+2} - (2n+1)\, x y_{n+1} - n^2 y_n = 0$$

$x = 0$-ல்

$$(y_{n+2})_0 - n^2 (y_n)_0 = 0$$

எனவே $(y_{n+2})_0 = n^2 (y_n)_0$

$(y_2)_0 = 2$ ஆதலால்

$(y_4)_0 = 2^2 \ (y_2)_0 = 2^2 - 2$

$(y_6)_0 = 4^2 \ (y_4)_0 = 4^2 \cdot 2^2 \cdot 2$

....

ஒற்றைப்படை வரிசை வகைக் கெழுக்கள் $(y_1)_0 = 0,$

$(y_3)_0 = 0, \ldots\ldots$

எனவே

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3} f'''(0) + \ldots\ldots$$

என்பதில் பிரதியிட

$$(\sin^{-1} x)^2 = \frac{2}{2!} x^2 + \frac{2 \cdot 2^2}{4!} x^4 + \frac{2^2 \cdot 4^2}{6!} 2 x^6 + \ldots\ldots$$

மேலும் $\sin^{-1} x = \theta$ எனில்

$x = \sin \theta$

∴ தொடர்

$$\theta^2 = \frac{2 \sin^2 \theta}{2!} + \frac{2^2 \cdot 2 \sin^4 \theta}{4!} + \frac{4^2 \cdot 2^2 \ 2\sin^6 \theta}{6!} + \ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

டெய்லர் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி பின்வருமாறு நிறுவுக.

$\theta = \cot^{-1} x$ எனில்

$$\tan^{-1}(x+h) = \tan^{-1} x + x \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{1}$$

$$- (h \sin \theta)^2 \frac{\sin 2\theta}{2} + (h \sin \theta)^3 \frac{\sin^3 \theta}{3}$$

$+ \ldots\ldots\ldots$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = f(x) = \tan^{-1} x$ என்க.

ஆகவே $$y_1 = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(x+i)(x-i)}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right]$$

அல்லது $$y_1 = \frac{1}{2i}\left[(x-i)^{-1} - (x-i)^{-1}\right] \quad \ldots\ldots (i)$$

(i)-ஐ $n-1$ தடவைகள் வகையிடு செய்ய,

$$y_n = \frac{1}{2i}[(-1)^{n-1}(n-1)!\,(x-i)^{-n} - (-1)^{n-1}(n-1)!\,(x+i)^{-n}]$$

அல்லது $$y_n = \frac{1}{2i}[(-1)^{n-1}(n-1)!] \cdot [(x-i)^{-n} - (x+i)^{-n}] \ldots$$

$$\ldots\ldots (ii)$$

இப்போது $x = r\cos\theta$, $1 = r\sin\theta$ என (ii)-ல் பிரதியிடுக.

ஆகவே $$y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i} \cdot r^{-n}[(\cos\theta - i\sin\theta_u)^{-} - (\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\, r^{-n}[(\cos n\theta + i\sin n\theta) - (\cos n\theta - i\sin n\theta)]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\, r^{-n}\, 2i\sin n\theta.$$

$$= (-1)^{n-1}(n-1)!\,\sin^n\theta \cdot \sin n\theta \ldots \left[\because \frac{1}{r} = \sin\theta\right]$$

ஆகவே $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,\sin^n\theta \cdot \sin n\theta$.

இங்கே $\cot\theta = x$; அதாவது $\theta = \cot^{-1}x$.

அதாவது $f'(x) = \sin\theta \cdot \sin\theta$; $f''(x) = -\sin^2\theta\sin 2\theta$

$$f'''(x) = 2!\,\sin^3\theta\sin 3\theta;\ \ldots\ldots$$

டெய்லர் தொடரில் இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிட,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \frac{h^3}{3!}f'''(x) + \ldots\ldots + \frac{h^n}{n!}f^n(x) + \ldots\ldots$$

$$\tan^{-1}(x+h) = \tan^{-1} x + h \sin\theta \cdot \sin\theta - \frac{h^2}{2!}\sin^2\theta \sin 2\theta$$

$$+ \frac{h^3 . 2!}{3!}\sin^3\theta . \sin 3\theta - \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^n}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! . \sin^n\theta . \sin n\theta + \ldots$$

அல்லது

$$\tan^{-1}(x+h) = \tan^{-1} x + h\sin\theta . \frac{\sin 2\theta}{1}$$

$$- (h\sin\theta)^2 \frac{\sin 2\theta}{2}$$

$$+ (h\sin\theta)^3 \frac{\sin 3\theta}{3} + \ldots\ldots$$

$$+ (-1)^{n-1}(h\sin\theta)^n \frac{\sin n\theta}{n} + \ldots\ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$$\log(1+\sin x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} - \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = \log(1+\sin x)$ என்க.

$(y)_0 = \log 1 = 0.$

மேலும் $e^y = 1+\sin x.$

$\therefore \quad e^y \cdot y_1 = \cos x.$

$\therefore \quad (y_1)_0 = 1$

மறுபடியும் வகையிடு செய்ய,

$e^y(y_1{}^2+y_2) = -\sin x$

$(y_2)_0 = -1$

மறுபடியும் வகையிடு செய்ய,

$$e^y[(y_1^2+y_2)y_1 + 2y_1y_2 + y_3] = -\cos x.$$

$$e^y[y_1^3 + 3y_1y_2 + y_3] = -\cos x.$$

$$\therefore \quad (y_3)_0 = 1$$

மேலும் வகையிடு செய்ய

$$e^y[(y_1^3+3y_1y_2+y_3)y_1 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_3 + 3y_2^2 + y_4] = \sin x.$$

$$e^y[y_1^4 + 6y_1^2 y^2 + 4y_1y^3 + 3y_2^2 + y_4] = \sin x.$$

$$\therefore (y_4)_0 = -2.$$

மறுபடியும் வகையிடு செய்ய,

$$e^y[(y_1^4 + 6y_1^2y_2 + 4y_1y_3 + 3y_2^2 + y_4)y_1 + 4y_1^3y_2 + 6y_1^2y_3 + 12y_1y_2^2 + 4y_1y_4 + 4y_2y_3 + 6y_2y_3 + y_5] = \cos x.$$

அல்லது

$$e^y[y_1^5 + 6y_1^3y_2 + 4y_1^2y_3 + 3y_2^2y_1 + y_1y_4 + 4y_1^3y^2 + 6y_1^2y_3 + 12y_1y_2^2 + 4y_1y_4 + 4y_2y_3 + 6y_2y_3 + y_5] = \cos x.$$

அல்லது

$$e^y[y_1^5 + 10y_1^3y_2 + 10y_1^2y_3 + 15y_2^2y_1 + 5y_1y_4 + 10y_2y_3 + y_5] = \cos x.$$

$$\therefore \quad (y_5)_0 = 5 \ldots \ldots$$

மெக்லாரின் தேற்றத்தின் படி,

$$\log(1+\sin x) = (y)_0 + x(y_1)_0 + \frac{x^2}{2!}(y_2)_0 + \ldots \ldots$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{24} \ldots \ldots$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$2x^3 + 7x^2 + x - 1$ என்பதை $(x - 2)$-ன் படிகளில் விரித்தெழுதுக.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1$$

இப்போது $f(x) = f[2 + (x - 2)]$

$$= f(2) + (x-2) f'(2) + \frac{(x-2)^2}{2!} f''(2) + \frac{(x-2)^3}{3!} f'''(2)$$

$$+ \ldots \quad \text{I}$$ டெய்லர் தேற்றப்படி

ஆனல் $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1$

$f'(x) = 6x^2 + 14x + 1$

$f''(x) = 12x + 14$

$f'''(x) = 12$; உயர்வரிசை வகைக்கெழு $= 0$.

இதனல்

$f(2) = 40$

$f'(2) = 53$

$f''(2) = 38$

$f'''(2) = 12$

மற்றும் $f^{(4)}(2) = f^{(5)}(2) = \ldots\ldots = 0$

எனவே I-ல் பிரதியிட

$$f(x) = 40 + (x-2)\,53 + 38\,\frac{(x-2)^2}{2} + \frac{12\,(x-2)^3}{6}$$

$$+ 0 + \ldots\ldots$$

$$= 40 + 53(x-2) + 19(x-2)^2 + 2(x-2)^3.$$

பயிற்சிகள் 6 (B)

1. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ என்ற சார்பலனுக்கு எந்த இடைவெளியிலும் மெக்லாரின் விரிவு ஏற்றதல்ல என நிறுவுக.

2. பின்வருவனவற்றை விரித்தெழுதுக. குறிப்பிட்ட எந்த x மதிப்புகளுக்கு அவ்வாறு செய்தல் இயலும் எனக் காண்க.

(a) $\sin x$ (b) e^x (c) $(1+x)^m$; இங்கு m மெய்யெண்

(d) e^{ax}

3. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, பின்வருவன வற்றை விரித்தெழுதுக ;

(a) $e^{x \sin x}$

(b) $e^{x \cos x}$

(c) $e^{x \sec x}$

(d) $e^{m \tan^{-1} x}$

4. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, பின்வருவன வற்றை விரித்தெழுதுக.

(a) $\log (1 + e^x)$

(b) $\log (1 + \tan x)$

(c) $\log (1 + \cos x)$

(d) $\log (1 + \sin^2 x)$

(e) $\log \cosh x$

5. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதவும் :

(a) $\cos x$ (c) $\sec x$ (e) $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^4}\right)$

(b) $\sin x$ (d) $\sin^{-1} x$ (f) $\tan^{-1} x$

(g) $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(h) $\cos^3 x$

6. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதவும்,

(a) $e^x \sin x$ (c) $e^x \sec x$

(b) $e^{ax} \cos (bx)$ (d) $\sinh x \cos x$

7. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $e^{a \sin^{-1} x}$ என்பதை விரித்தெழுதுக. பொது உறுப்பைக் கண்டுபிடித்து,

$$e^{\theta} = 1 + \sin\theta + \frac{1}{2!}\sin^2\theta + \frac{2}{3!}\sin^3\theta + \frac{5}{4!}\sin^4\theta + \dots$$

என நிறுவுக.

8. $\sin(m \sin^{-1} x)$ என்பதை x படிகளின் ஏற்ற வரிசையில் எழுதுக. இதன் மூலம் $\sin n\theta$-ஐ $\sin \theta$ படிகளில் எழுதுக.

9. மெக்லாரின் தேற்றத்தின் மூலம்

$$\log \sin(x+h) = \log \sin x + h \cot x - \frac{h^2}{2} \operatorname{cosec}^2 x + \frac{1}{3} h^3 \operatorname{cosec} 2x \cot x + \ldots$$

என நிறுவுக.

10. $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$ என்ற அமைப்பில் $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ என்ற சார்பலனை x-ன் ஏற்ற வரிசையில் விரித்தெழுத முடியும் எனக் கொண்டு, $(n+1)a_{n+1} = n a_{n-1}$ என நிறுவுக. மேலும் விரிவின் பொது உறுப்பைக் காண்க.

11. $y = \sin(e^x - 1)$ என்பதனை மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி x^4 என்ற உறுப்புவரை விரித்தெழுதுக.

12. $y = \sin [\log (x^2 + 2x + 1)]$ எனில்

$(x+1)^2 y_{n+2} + (2n+1)(x+1) y_{n+1} + (n^2+4) y_n = 0$ என நிறுவுக. இதனைப்பயன்படுத்தி, x^6 உருப்புவரை y-ஐ ஏற்ற வரிசையில் விரித்தெழுதுக.

13. $$\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{x \cos \alpha} \cdot \cos(x \sin \alpha) \right] = e^{x \cos \alpha} \cdot \cos(x \sin \alpha + n\alpha)$$ என நிறுவுக,

மேலும்

$$e^{x \cos \alpha} \cdot \cos(x \cdot \sin \alpha) = 1 + x \cos \alpha + \frac{x^2 \cos 2\alpha}{2} + \frac{x^3}{3!} \cos 3\alpha + \ldots\ldots$$

என நிறுவுக.

14. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\frac{e^x}{e^x+1}$ என்பதை x^3 உறுப்பு வரை விரித்தெழுதுக.

15. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$e^{a\cos^{-1}x} = e^{a\pi/2}\left[1 - ax + \frac{a^2x^2}{2!} - \frac{a(1^2+a^2)x^3}{3!} + \dots\right]$$

என நிறுவுக.

16. x-படிகளின் ஏற்ற வரிசையில் மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $[\log(x+\sqrt{1+x^2})]$ என்பதை விரித்தெழுதுக. என்பதை விரித்தெழுதுக. பொது உறுப்பைக் காண்க.

17. $y = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ எனில்

$$(1+x)^2y_{n+2} + (2n+3)(x+1)y_{n+1} + (n+1)^2y_n = 0$$

என நிறுவுக. மற்றும் $|x| < 1$ எனில்

$y = x - (1+\frac{1}{2})x^2 + (1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3})x^3 \dots \dots$ எனவும் நிறுவுக.

18. மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி $\log[1 - \log(1-x)]$ என்பதை x^3 உறுப்புவரும் வரை விரித்தெழுதுக. இதில் x-க்கு பதிலாக, $\frac{x}{1+x}$-ஐ பிரதியிட்டு $\log[1+\log(1+x)]$ என்பதை x^3 உறுப்புவரை விரித்தெழுதுக.

19. $\log y = \tan^{-1}x$ எனில்

$$(1+x^2)y_n = [1-2(n-1)x]y_{n-1} - (n-1)(n-2)y_{n-2}$$

என நிறுவுக. மற்றும் மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, y-ன் விரிவில் x^5-ன் கெழுவைக் காண்க.

20. $f(mx) = f(x) + (m-1)xf'(x) + \frac{1}{2!}(m-1)^2x^2 f''(x) + \dots\dots$ என நிறுவுக.

21. $f\left(\frac{x^2}{1+x}\right) = f(x) - \frac{x}{1+x}f'(x) + \frac{x^2}{(1+x)^2}\frac{f''(x)}{2!} + \dots\dots$ என நிறுவுக.

22. $f(x) = f(0) + xf'(x) - \frac{x^2}{2!}f''(x) + \frac{x^3}{3!}f'''(x) - \dots\dots$ என நிறுவுக.

23. $(x-\frac{\pi}{2})$-ன் படிகளில் $\sin x$-ஐ விரித்தெழுதுக.

24. $(x-2)$-ன் படிகளில் $\log \sin x$-ஐ விரித்தெழுதுக.

விடைகள் 6 (B)

2. (a) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$ x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\ldots$ x-ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும்.

(c) $1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots\ldots\ldots$ $-1 < x < 1$

இடைவெளியில் x-ன் மதிப்பிற்கு

(d) $1 + xa + \frac{x^2}{2!} a^2 + \frac{x^3}{3!} a^3 + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!} a^n + \ldots$

(எல்லா x மதிப்பு)

3. (a) $1 + x^2 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{120} + \ldots\ldots$

(b) $1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots$

(c) $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{2} + \ldots\ldots\ldots$

(d) $1 + mx + \frac{m^2 x^2}{2} - \left(\frac{m}{3} - \frac{m^3}{6}\right) x^3 \ldots\ldots\ldots$

4. (a) $\log 2 + \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \frac{x^2}{2;} - \frac{1}{8} \frac{x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots$

(b) $x - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots$

(c) $\log 2 - \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{96} x^4 - \ldots\ldots\ldots$

(d) $x^2 - \frac{5}{6} x^4 + \ldots\ldots\ldots$

(e) $\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{12} x^4 + \frac{1}{45} x^6 \ldots\ldots\ldots$

5. (a) $1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} x + \ldots\ldots\ldots$

(b) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots$

(c) $1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \ldots\ldots\ldots$

(d) $x + \frac{1^2 \cdot x^3}{3!} + \frac{3^2 \cdot 1^2 \cdot x^5}{5!} + \frac{5^2 \cdot 3^2 \cdot 1^2 \, x^7}{7!} + \ldots$

(e) $2\left[x^2 - \frac{x^6}{3} + \frac{x^{10}}{5} - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{4n-2}}{2n-1} + \ldots\ldots\ldots\right]$

(f) $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots\ldots$

(g) $\frac{\pi}{4} - \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots\ldots\right)$

(h) $1 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{7}{8} x^4 \ldots\ldots\ldots$

6. (a) $x + x^2 + \frac{2x^3}{3!} - \ldots\ldots$

(b) $1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} r^n \cos n\phi$; இங்கே $r = \sqrt{a^2 + b^2}$,

$\phi = \tan^{-1} \frac{b}{a}$

(c) $1 + x + x^2 + \frac{2}{3} x^3 + \ldots\ldots$

(d) $x - \frac{2}{3!} x^3 - \frac{4}{5!} x^5 + \ldots\ldots$

7. $1 + ax + \frac{a^2}{2!} x + \frac{a(1^2 + a^2)}{3!} x^3 + \frac{a^2 (2^2 + a^2)}{4!} x^4 + \ldots\ldots$

8. (i) $mx + m(1^2 - m^2) \frac{x^3}{3!} + m(1^2 - m^2)(3^2 - m^2) \frac{x^5}{5!} + \ldots\ldots$

(ii) $m \sin\theta + m(1^2 - m^2)\dfrac{\sin^3\theta}{3!} + m(1^2 - m^2)$

$$(3^2 - m^2)\frac{\sin^5\theta}{5!} + \ldots\ldots$$

10. $\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{6}{7} \ldots\ldots \dfrac{2m}{2m+1}\, x^{2m+1}$

11. $x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5x^4}{24} + \ldots\ldots$

12. $2x - x^2 - \dfrac{2x^3}{3} + \dfrac{3x^4}{2} - \dfrac{5x^5}{3} + \dfrac{3x^6}{2} + \ldots\ldots$

14. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{3}\dfrac{x^3}{3!} + \ldots\ldots$

16. $x - \dfrac{1^2}{3!}x^3 + \dfrac{1^2 \cdot 3^2}{5!}x^5 - \ldots\ldots;$

n ஒற்றைப்படை எனில் $\dfrac{(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \ldots\ldots (n-2)^2}{n!}\, x_1^n$

n இரட்டைப்படை எனில் பூச்சியம்,

18. (i) $x + \dfrac{x^3}{6} + \ldots\ldots$

(ii) $x - x^2 + \dfrac{7x^3}{6} + \ldots\ldots$

19. $\frac{1}{24}$

23. $1 - \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \dfrac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} - \ldots\ldots$

24. $\log\sin 2 + (x-2)\cot 2 - \frac{1}{2}(x-2)^2 \operatorname{cosec}^2 2$
$+ \frac{1}{3}(x-2)^3 \cdot \operatorname{cosec}^2 2 \cot 2 + \ldots\ldots$

7. தேரப்பெருத அமைப்புகள்

§ 7-0. தேரப்பெருத அமைப்புகள் (Inderminate forms)

தொடர்ச்சியின்மை பற்றி முன்னர் ஆராய்ந்தபோது $\frac{0}{0}$ என்ற பொருளற்ற அமைப்பை பெறும் சார்புகள் சிலவற்றை எடுத்துக் காட்டுகளாகக் கண்டோம், இத்தகைய அமைப்புகளை விரிவாக ஆராய்வதே இப் பகுதியின் குறிக்கோள்.

$f(x)$, $g(x)$ என்பன x-ன் இரு சார்பலன்கள். சாரா மாறியான x, a என்ற ஏதோ ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பைப் பெறும்போது $f(a) = 0$, $g(a) = 0$ எனக் கிடைத்தால், சார் பலன்களின் விகிதமான $\frac{f(x)}{g(x)}$ என்பது $x = a$-ல் $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப் பெருத அமைப்பை பெறுவதாகக் கூறுகிறோம்.

பொதுவாக,

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \ \infty - \infty, \ 1^{\infty}, \ \infty^{0}, \ 0^{0}$$

என்ற அமைப்புக்கள் தேரப்பெருத அமைப்புக்களாகும்.

தேரப்பெருத அமைப்பின் எல்லை மதிப்பை அதன் உண்மை மதிப்பு (ttue value) என்போம்.

§ 7-1. $\frac{0}{0}$ என்ற தேரப்பெருத அமைப்பு

ஹாஸ்பிடல் விதி (L' Hospital Rule)

(i) $x = a$ என்பதன் அயலில் தொடர்ச்சி உடையதாக $f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்பலன்கள் அமைய

(ii) $x = a$ என்ற புள்ளி தவிர்ந்த $x = a$-ன் அயலில் $f'(x)$, $g'(x)$ என்பன உளதாக

(iii) $f(a) = 0, \quad g(a) = 0$ ஆனால்

(iv) $x = a$ என்ற புள்ளி தவிர்த்த $x = a$-ன் அயலில் $g'(x) \neq 0$ ஆனால்

(v) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ உளதானால்

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} = \underset{a \to x}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ ஆகும்.}$$

நிறுவல் :

$x = a$-ல் $f(x),\ g(x)$ தொடர்ச்சி உள்ளது.

$$\therefore \quad f(a) = \underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = 0 \quad ;$$

$$g(a) = \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) = 0 \quad .$$

$x = a + h$ என்பது a-ன் அயலில் ஏதோ ஒரு புள்ளியானால் டெய்லர் தேற்றத்தின் படி ஒருறுப்புக்குப் பின் மீதி எழுத

$$f(a+h) = f(a) + h f'(a + \theta h) = h f'(a + \theta_1 h)$$

$$g(a+h) = g(a) + h g'(a + \theta_2 h) = h g'(a + \theta_2 h)$$

இங்கே h மிகை அல்லது குறை ; $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

$$\therefore \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a+h)}{g(a+h)} = \frac{h f'(a+\theta_1 h)}{h g'(a+\theta_2 h)} = \frac{f'(a+\theta_1 h)}{g'(a+\theta_2 h)}$$

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f'(a+\theta_1 h)}{g'(a+\theta_2 h)}$$

($x = a+h$ ஆதலால் $x \to a$ எனில் $h \to 0$)

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{; இங்கே } g'(x) \neq 0$$

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : $x \to \infty$ எனில் தேற்றம் உண்மையென நிறுவுவோம். அதாவது

$$\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} f(x) = 0, \qquad \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} g(x) = 0 \text{ எனில்}$$

$g'(x) \neq 0$ ஆக இல்லாத போது

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

என நிறுவுவோம்.

நிறுவல் :

$x = \frac{1}{t}$ எனப் பிரதியிடுக.

$x \to \infty$ எனில் $t \to 0$

∴ ஹாஸ்பிடல் விதிப்படி

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \underset{t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}{g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \frac{1}{t^2}}$$

$$= \underset{t \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

குறிப்பு 2 : ஹாஸ்பிடல் விதியினைப் பொதுமைப் படுத்துதல்

$f(x)$, $g(x)$ என்பனவும், அவற்றின் முதல் $n-1$ வரிசை வகைக்கெழுக்களும் $x = a$-ல் பூச்சியமாக இருந்து, அவற்றின் n வரிசை வகைக்கெழுக்கள் முடிவுள்ளதாகவும், பூச்சியமில்லா மலும் இருப்பின் பின்வருமாறு நிறுவலாம்.

$$\underset{x \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f^n(a)}{g^n(a)} = \underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \frac{f^n(x)}{g^n(x)}$$

[மேற்கண்ட எல்லைமதிப்பு முடிவுள்ளதாகவோ, முடிவில்லாத தாகவோ உளதாகும் போது.]

குறிப்பு 3 : செயல்முறை விதி

$\frac{f(x)}{g(x)}$, $x = a$-ல் $\frac{0}{0}$ அமைப்பில் இருந்தால்

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)}$ காண செயல் முறை விதி பின்வருமாறு:

வகையீடு முறையைக் கையாள்வதானல் :

(1) பின்ன மேல்பகுதியையும், கீழ் பகுதியையும் தனித் தனியே வகையீடு செய்க.

(2) $x = a$ எனப்பிரதியிட்டு எல்லை என்ற வார்த்தையை எடுத்து விடுக.

(3) இப்போதும் தேரப் பெருத அமைப்பு கிடைக்குமானல் மீண்டும் செயல் முறையைத் தொடர்க.

விரிவு முறையைக் கையாள்வதானல்,

முதலில் விரித்தெழுதி, சுருக்கியபின் $x = a$ எனப் பிரதியிட்டு, எல்லை என்ற வார்த்தையை எடுத்து விடுக.

குறிப்பு 4 : பின்வரும் முக்கிய எல்லைகளை நினைவில் கொண்டு ஏற்ற இடங்களில் பயன்படுத்துக.

(i) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x}{x} = 1$; (ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \cos x = 1$;

(ii) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\tan x}{x} = 1$; (iv) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (1 + x)^{1/x} = e$;

(v) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (x + nx)^{1/x} = e^n$; (vi) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

மதிப்பு காண்க

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$$

தீர்வு :

$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

முறை 1 :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x}-x}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{(1+x)-1}$$

$$= \underset{1+x \to 1}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{(1+x)-1} \left(\because \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1} \right)$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

முறை 2 :

$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{1}{2}(1+x)^{\frac{1}{2}-1}}{1}$$

$$= \frac{1}{2}(1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மதிப்பு காண்க.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x e^x - \log(1+x)}{x^2}$$

தீர்வு :

$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x e^x - \log(1+x)}{x^2}$ என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\therefore \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x e^x - \log(1+x)}{x^2}$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x e^x + e^x - \dfrac{1}{1+x}}{2x} \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{x e^x + e^x + e^x + (1+x^{-2})}{2}$$

$$= \frac{0+1+1+1}{2}$$

$$= \frac{3}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^{1/x} - e + \frac{1}{2}ex}{x^2}$$

தீர்வு :

$$\underset{x\to 0}{\text{Lt}} (1+x)^{1/x} = e$$

ஆகையால் $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e + ex/2}{x^2}$ என்பது $\dfrac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$y = (1+x)^{1/x}$ என்க.

$$\log y = \frac{1}{x}\log(1+x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots\right)$$

அல்லது $\log y = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{x^3}{4} + \dots$

அல்லது $y = e^{\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\dots\right)}$

$$= e^1 \left(e^{-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\dots}\right)$$

$$= e\left[1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right) + \frac{1}{2!}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots\right)^2\right] + \dots \dots$$

$$\left\{\text{ஏனெனில் } e^{\theta} = 1 + \theta + \frac{\theta^2}{2!} + \dots\right\}$$

$$= e\left[1 - \frac{x}{2} + x^2\left[\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{8}\right] + \dots\right]$$

அல்லது $(1+x)^{1/x} = e\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11}{24}x^2 + \dots \dots\right]$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{(1+x)^{1/x} - e + ex/2}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e\left[1 - \frac{x}{2} + \frac{11x^2}{24} + \dots\right] - e + \frac{ex}{2}}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{e\,11\,x^2}{24} + \dots \dots}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left\{\frac{11}{24}e + x \text{ உள்ள உறுப்புக்கள்}\right\}$$

$$= \frac{11e}{24}$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2}$$

தீர்வு (i) :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x\cos x - \log(1+x)}{x^2} \qquad (0/0 \text{ அமைப்பு})$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{-x \sin x + \cos x - \frac{1}{1+x}}{2x} \qquad (0/0 \text{ அமைப்பு})$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{-x \cos x - \sin x - \sin x + \frac{1}{(1+x)^2}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

தீர்வு (ii) :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x \cos x - \log(1+x)}{x^2}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\right) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\right) \right] \Big/ x^2$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{x^2}{2} + x^3\left(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}\right) + \ldots\ldots \right] x^2$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{2} - \frac{5}{6} x + \ldots \right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{\tan x - x} = -\tfrac{1}{2} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x + \log\left(\frac{1-x}{e}\right)}{\tan x - x} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x + \log(1-x) - \log e}{\tan x - x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\sec^2 x - 1} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{[(1-x)\, e^x - 1]}{1-x} \Big/ \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{[(1-x)\, e^x - 1]\cos^2 x}{(1-x)\sin^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{(1-x)\, e^x - 1}{\sin^2 x} \cdot \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{\cos^2 x}{1-x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{(1-x)\, e^x - 1}{\sin^2 x} \cdot (1)$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{e^x - e^x - x\, e^x}{2 \sin x \cos x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{-x\, e^x}{\sin 2x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{-x\, e^x - e^x}{2 \cos 2x}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

மதிப்பு காண்க.

$$\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லை $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\therefore \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; \frac{x^x - x}{1 - x + \log x}$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; \frac{x^x(1+\log x) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} \quad \left[\because \frac{d}{dx}(x^x) = x^x(1+\log x) \right]$$

(என்பது $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்பு)

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^x (1 + \log x)^2 + x^x \left[\frac{1}{x} \right]}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \frac{x^x (1 + \log x)^2 + x^{x-1}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \frac{1^1 (1 + \log 1)^2 + 1^0}{-1}$$

$$= -2.$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x \sin^{-1} x - x^2}{x^6} = \frac{1}{18}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\sin^{-1} x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots$$

$$\sin x \sin^{-1} x - x^2$$

$$= x^6 \left(\frac{3}{40} - \frac{1}{36} + \frac{1}{120} \right) + x\text{-ன் உயர்ந்த படிகள்}$$

$$= x^6 \left[\frac{1}{18} \right] + x\text{-ன் உயர்ந்த படிகள்}$$

எனவே

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin x \sin^{-1} x - x^2}{x^6}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{18} + x\text{-ன் படிகள்} \right]$$

$$= \frac{1}{18}$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\cot x - \frac{1}{x}}{x}$$

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\cot x - \frac{1}{x}}{x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\left[x\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{6!} - \dots\right)\right]}{x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\left[-\frac{1}{3} + x \text{ அடங்கிய உறுப்புக்கள்}\right]}{\left[1 - \frac{x^2}{6} + x \text{ அடங்கிய உறுப்புக்கள்}\right]}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

பயிற்சிகள் 7(A)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$

(b) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a}}{x}$

(c) $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x} - \sqrt{1-x^2}}$

2. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \frac{\log x}{x-1}$

(b) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x - 1 - x}{\log(1+x) - x}$

(c) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

(d) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x \sin x}$

(e) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{e^{ax} - e^{-ax}}{\log(1+bx)}$

(f) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1 - 3e^{-x} + 3e^{-2x} - e^{-3x}}{1 - 3e^{x} + 3e^{2x} - e^{3x}}$

3. மதிப்பு காண்க.

(a) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x - \sin x}{x^3}$

(b) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan x - x}{x - \sin x}$

(c) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$

(d) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

(e) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$

(f) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x \sin x}{\tan^3 x}$

4. மதிப்பு காண்க.

(a) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}$

(b) $\underset{x\to 0}{\text{Lt}} \dfrac{x - \sin x \cos x}{x^3}$

(c) $\underset{x\to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + 4\cos x.}$

(d) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{2\cos x - 2 + x^2}{x^4}$

(e) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{5\sin x - 7\sin 2x + 3\sin 3x}{\tan x - x}$

(f) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{\sin 2x + 2\sin^2 x - 2\sin x}{\cos x - \cos^2 x}.$

5. மதிப்பு காண்க :

(a) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{\log (1 - x^2)}{\log \cos x}$

(b) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{\log (1 + x^3)}{\sin^3 x}$

(c) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{\log(1 + kx^2)}{1 - \cos x}.$

6. மதிப்பு காண்க.

(a) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{\cosh x - \cos x}{x \sin x}.$

(b) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{e^x - \sin x - x - x^2}{x^2 - x \log (1 - x)}$

(c) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{e^x - (e)^{\sin x}}{x - \sin x}$

(d) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{e^x - e^{x \cos x}}{x - \sin x}$

(e) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{e^x - 2\cos x + e^{-x}}{x \sin x}.$

7. மதிப்பு காண்க :

(a) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$

(b) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to 0} \frac{a^x - 1 - x \log a}{x}$

(c) $\displaystyle \mathop{\text{Lt}}_{x \to a} \frac{x^a - a^x}{x^x - a^a}$

(d) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{xe^x - \log(1 + x)}{x^2}$

(e) $\underset{x \to a}{\mathrm{Lt}} \dfrac{x^2 \log_e a - a^2 \log_e x}{x^2 - a^2}$

8. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\sin x \,.\, \sin^{-1} x}{x^2}$

(b) $\underset{x \to 1}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x}{x^n - e^{\sin \log x}}$

(c) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\tan x \,.\, \tan^{-1} x - x^2}{x^6}$

9. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$

(b) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\dfrac{1}{x^2} - \cot^2 x\right)$

(c) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \dfrac{\tan x - x}{x^2 \tan x}$

(d) $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\dfrac{1}{x^2} - \mathrm{cosec}^2\, x\right)$

விடைகள் 7 (A)

1.	(a) n	(b) $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$	(c) 0
2.	(a) -1	(b) 1	(c) $-\frac{1}{2}e$
	(d) 2	(e) $\dfrac{2a}{b}$	(f) -1
3.	(a) $\frac{1}{6}$	(b) 2	(c) $-\frac{1}{3}$
	(d) $\frac{1}{2}$	(e) $\frac{1}{2}$	(f) $\frac{1}{6}$
4.	(a) $-\frac{1}{3}$	(b) $\frac{2}{3}$	(c) $\frac{1}{2}$
	(d) $\frac{1}{12}$	(e) -15	(f) 4

5. (a) 2 (b) 1 (c) $2k$

6. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{2}{3}$ (c) 1
(d) 3 (e) 2

7. (a) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (b) $\frac{1}{2}(\log_e a)^2$ (c) $\frac{(1-\log a)}{(1+\log a)}$
(d) $\frac{2}{3}$ (e) $\log a - \frac{1}{2}$

8. (a) 1 (b) $-\frac{1}{2(n-1)}$ (c) $\frac{2}{9}$

9. (a) 0 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{1}{3}$ (d) $-\frac{1}{3}$

§ 7-2. $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற தேரப் பெருத அமைப்பு :

$f(x)$, $g(x)$ என்பன $\underset{x\to a}{\text{Lt}} f(x) = \infty$ $\underset{x\to a}{\text{Lt}} g(x) = \infty$ எனுமாறு அமைந்த இரு சார்பலன்களானுல்

$$\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

நிறுவல் : $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{g(x)}\right] \Big/ \left[\frac{1}{f(x)}\right]$

$$= -\left[\frac{1}{\{g(x)\}^2} g'(x)\right] \Big/ -\left[\frac{f'(x)}{\{f(x)\}^2}\right]$$

$$= \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{g'(x)}{f'(x)} \left[\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)}\right]^2$$

மூன்று வகைகள் உண்டு.

முதல் வகை : $\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)}$ பூச்சியமாகவோ, முடிவிலியாகவோ இல்லாதபோது,

$$1 = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] \left[\underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{g'(x)}{f'(x)}\right]$$

$$\underset{\to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

இரண்டாம் வகை : $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g\ x)} = 0$ எனில்.

$$1 + \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x) + g(x)}{g(x)}$$

$$= \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x) + g'(x)}{g'(x)} \ldots\ldots \text{ வகை 1 மூலம்.}$$

[எல்லை பூச்சியமாகவோ முடிவிலியாகவோ இல்லை]

இருபுறமும் 1-ஐக் கழிக்க,

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(1)} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

மூன்றும் வகை : $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)}$ முடிவிலி எனில்,

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{g(x)}{f(x)} = 0 = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{g'(x)}{f'(x)} \ldots\ldots \text{ வகை II மூலம்}$$

$$\therefore \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x \to a}{\text{Lt}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு 1 : $x \to \infty$ எனிலும் மேற்படி தேற்றம் உண்மை.

குறிப்பு 2 : $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பில் வரும் கணக்குகளில் பொருத்தமான இடத்தில் $\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்புக்கு மாற்றுவதன் மூலமே தீர்வு காண்பது சாத்தியமாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 9 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \frac{x^2 + 2x}{5 - 3x^2}$$

தீர்வு :

கொடுத்த அமைப்பு $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது.

$$\therefore \quad \underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \frac{x^2+2x}{5-3x^2}$$

$$= \underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \frac{2x+2}{-6x} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{2}{-6} - \frac{2}{6x}\right)$$

$$= \frac{-2}{6} \quad \left(\text{ஏனெனில் } \underset{x \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \frac{-2}{6x} = \frac{-2}{\infty} = 0\right)$$

$$= -\frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\log x^2}{\cot x}$$

தீர்வு :

கொடுத்த எல்லை $\frac{\infty}{\infty}$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது.

$$\therefore \quad \underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\log x^2}{\cot x^2}$$

$$= \underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\left(\frac{1}{x^2}\right) 2x}{-2x \operatorname{cosec}^2 x^2}$$

$$= \underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \left(\frac{-\sin^2 x^2}{x^2}\right) \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right)$$

$$= \underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \left(\frac{-2\sin x^2 \cdot \cos x^2 \cdot 2x}{2x}\right)$$

$$= \underset{x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} (-2 \sin x^2 \cos x^2)$$

$$= 0$$

பயிற்சிகள் 7 (B)

1. மதிப்பு காண்க.

(a) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^4 + 1}}$

(b) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to \infty} \frac{x^2 + 2x}{1 - 6x^2}$

(c) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to \infty} \frac{x^2 + 4x + 5}{8x^2 - 3x + 7}$

2. மதிப்பு காண்க.

(a) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \frac{\log\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\tan \theta}$

(b) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to 0} \frac{\log \sin 2x}{\log \sin x}$

(c) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to 0} \operatorname{cosec} x \cdot \frac{1}{\log x}$

3. மதிப்பு காண்க :

(a) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan x}$

(b) $\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\sec \pi x}{\tan 3\pi x}$

விடைகள் 7 (B)

1. (a) 1 (b) $-\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{8}$

2. (a) 0 (b) 1 (c) $-\infty$

3. (a) $\frac{1}{5}$ (b) 3.

§ 7-3. $0 \cdot \infty$ என்ற தேரப்பெருத அமைப்பு

$\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to a} f(x) = 0, \quad \mathop{\mathrm{Lt}}_{x \to a} g(x) = \infty$ என இரு சார்

பலன்கள் இருப்பின்

$x = a$-ல் $f(x) \cdot g(x)$ ஆனது $0 \cdot \infty$ என்ற தேரப்பெறாத அமைப்பில் இருக்கும்.

அத்தகைய சமயங்களில்

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} = \frac{g(x)}{1/f(x)}$$

என மாற்றி எழுதினால் எல்லையில் $0/0$ அல்லது ∞/∞ அமைப்பில் மாறும். அப்போது 7·1, 7·2 பகுதிகளில் கண்டவாறு எல்லை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 11 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\sin x) \log x$$

தீர்வு : கொடுத்த எல்லை $0 \times \infty$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது.

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\sin x) \log x$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{[\log x]}{\operatorname{cosec} x} \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ என்ற அமைப்பு} \right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\frac{1}{x}}{-\operatorname{cosec} x \cot x}$$

$$= - \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு} \right]$$

$$= - \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x - x \sin x}$$

$$= 0$$

எடுத்துக்காட்டு 12 : m, n மிகை முழு எண்களாக இருக்கும் போது $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} x^m (\log x)^n$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு : கொடுத்த எல்லை $0 \times \infty$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^{m} (\log x)^{n}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{(\log x)^{n}}{x^{-m}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{n (\log x)^{n-1} . \frac{1}{x}}{- m\, x^{-(m+1)}}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{n (\log x)^{n-1}}{- m\, x^{-m}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{n (n - 1) (\log x)^{n-2}}{(- m)^{2}\, x^{-m}}$$

$= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{n!\; x^{m}}{(-m)^{n}} = 0.$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^{m} (\log x)^{n} = 0.$$

பயிற்சிகள் 7 (C)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \; x \tan \frac{1}{x}$

(b) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; (1 - x) \tan \frac{\pi x}{2}$

(c) $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \; x (a^{1/x} - 1)$

(d) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; (x - n) \operatorname{cosec} \pi x.$

2. மதிப்பு காண்க.

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x \log x$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x \log \sin x$

(c) $\lim_{x \to 1} \left(\sec \frac{\pi}{2x}\right) \log x$

(d) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x \log \tan x.$

3. n மிகை எண் எனில் $\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x}$-ன் மதிப்பைக் காண்க.

விடைகள் 7 (C)

1. (a) 1 (b) $2/\pi$ (c) $\log a$ (d) $(-1)^n . \pi$

2. (a) 0 (b) 0 (c) $2/\pi$ (d) 0

3. 0.

§ 7·4 ∞ - ∞ என்ற தேரப்பெறுத அமைப்பு

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to a} g(x) = \infty$$

என $f(x)$, $g(x)$ என்ற சார்புகள் இருப்பின் $f(x) - g(x)$ என்பது $x \to a$ எல்லையில் $\infty - \infty$ என்ற தேரப்பெறுத அமைப்பைப் பெறுகிறது.

அத்தகைய சமயங்களில்

$f(x) - g(x)$ என்பதை

$$\left[\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}\right] \Big/ \frac{1}{f(x) \cdot g(x)}$$

என்ற அமைப்பில் எழுதி

$\frac{0}{0}$ என்ற அமைப்புக்கு மாற்றி

பகுதி 7·1-ல் கூறப்பட்ட முறையில் எல்லை காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 13 :

மதிப்பு காண்க :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

தீர்வு : $\infty - \infty$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} \times \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{1}{x^4}\left[\sin^2 x - x^2\right] \text{ ஏனெனில் } \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 = 1$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{1}{x^4}\left[\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^2 - x^2\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \; \frac{1}{x^4}\left[x^2 - \frac{x^4}{3} + \cdots - x^2\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[-\frac{1}{3} + x \text{ அடங்கிய உறுப்புக்கள்}\right]$$

$$= -\frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\log(1 + x)\right]$$

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\log(1 + x)\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{x - \log(1 + x)}{x^2}\right] \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x}\right] \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{1}{2(1 + x)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

பயிற்சிகள் 7(D)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \tan x}\right]$

(b) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} (\sec x - \tan x)$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{a}{x} - \cot\frac{x}{a}\right)$

(d) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \left[\sec x - \frac{1}{1 - \sin x}\right]$

2. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \left[\frac{2}{x^2 - 1} - \frac{1}{x - 1}\right]$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right]$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{\pi}{4x} - \frac{\pi}{2x\,(e^{\pi x} + 1)}\right]$

விடைகள் 7 (D)

1. (a) $\frac{1}{3}$ (b) 0 (c) 0 (d) $-\infty$

2. (a) $-\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{\pi^2}{8}$.

§ 7-5. 1^{∞} என்ற தேரப்பெருத அமைப்பு

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = 1, \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) = \infty$ என

அமைய $y = \{f(x)\}^{g(x)}$ எனத்தரப்பட்டால்

$x \to a$ எல்லையில் y, 1^{∞} அமைப்பில் இருக்கும். இத்தனை அமைப்புகளுக்கு எல்லை காண

$$\log y = g(x) \log f(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x \to a} \log y$ என்பது $0.\infty$ அமைப்புக்கு மாறும். இதனை பகுதி 7·3-ல் கண்டவாறு ஏற்ற முறைகளைக் கையாண்டு தீர்வு காணலாம். இவ்வாறு பெற்ற எல்லை k என்க.

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \log y = \log \underset{x \to a}{\text{Lt}}\, y$ ஆதலால்

$$\log \underset{x \to a}{\text{Lt}}\, y = k$$

$$\therefore \quad \underset{x \to a}{\text{Lt}}\, y = e^{k} \quad \text{என ஆகும்.}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 15 :

மதிப்பு காண்க.

$$\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad (x)^{\frac{1}{1-x}}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லை 1^{∞} என்ற அமைப்பு உடையது.

$$y = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad x^{\frac{1}{1-x}} \quad \text{என்க.}$$

$$\therefore \quad \log y = \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad \frac{1}{1-x} \log x$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad \frac{\log x}{1-x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad \frac{\frac{1}{x}}{-1} = -1$$

அல்லது $y = e^{-1}$

$$\text{அல்லது} \quad \underset{x \to 1}{\text{Lt}} \quad (x)^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 ;

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லே 1^{∞} என்ற அமைப்பில் உள்ளது. ஏனெனில்

$$x \to 0 \text{ என்ற எல்லையில் } \frac{\tan x}{x} \to 1.$$

$$y = \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \text{ என்க.}$$

லாகிருதம் எடுத்து எல்லே காண

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \log y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{1}{x^2} \log \left(\frac{\tan x}{x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{x}{\tan x} \cdot \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2\, x^2 \tan x}\right] \Big/ 2x$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{x \sec^2 x - \tan x}{2\, x^2 \tan x} \quad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sec^2 x + 2x \sec^2 x \tan x - \sec^2 x}{2x^2 \sec^2 x + 4\, x \tan x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sec^2 x \tan x}{x \sec^2 x + 2 \tan x} \quad \frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{\sec^4 x + 2 \sec^2 x \tan^2 x}{2\, x \sec^2 x \tan x + 3 \sec^2 x}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \log y = \log \underset{x \to 0}{\text{Lt}} y = \tfrac{1}{3}$$

$$\text{எனவே } \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{1/3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \ (\cos x)^{\cot^2 x}$$

தீர்வு : கொடுக்கப்பட்ட எல்லை 1^{∞} அமைப்புள்ளது.

$y = (\cos x)^{\cot^2 x}$ என்க.

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \log y = \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \cot^2 x \log \cos x$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\log \cos x}{\tan^2 x} \qquad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2 \tan x \sec^2 x}$$

$$= \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} -\tfrac{1}{2}\cos^2 x = -\tfrac{1}{2}$$

$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \log y = -\frac{1}{2}$ ஆதலால் $\log \underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} y = -\frac{1}{2}$

எனவே $\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} (\cos x)^{\cot^2 x} = e^{-1/}$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

மதிப்பு காண்க:

$$\underset{x \to 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லை 1^{∞} அமைப்புள்ளது.

$y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ என்க.

$$\therefore \lim_{x \to 0} \log y = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \log\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{2}{a^x + b^x} \cdot \frac{1}{2}(a^x \log a + b^x \log b)\right]$$

$$= \frac{\log a + \log b}{2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \log a\, b = \log \sqrt{a\, b}$$

$$\lim_{x \to 0} \log y = \log \lim_{x \to 0} y = \log \sqrt{a\, b}$$

ஆதலால் $\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \sqrt{ab}.$

பயிற்சிகள் 7 (E)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\lim_{x \to 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^x$

2. மதிப்பு காண்க :

(a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sinh x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $\lim_{x \to 0} \left[\frac{2(\cosh x - 1)}{x^2}\right]^{\frac{1}{x^2}}$

3. மதிப்பு காண்க :

(a) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

(e) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

4. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\sec^2 x)^{\cot^2 x}$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (\text{cosec } x)^{\frac{1}{\log x}}$.

5. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} (\sin x)^{\tan x}$.

(b) $\underset{x \to \frac{\pi}{4}}{\text{Lt}} (\tan x)^{\tan 2x}$.

(c) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} (\sin x)^{2 \tan x}$

(d) $\underset{x \to a}{\text{Lt}} \left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\tan \frac{\pi x}{2b}}$

6. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{a^x + b^x + c^x}{3}\right)$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} (a^x + x)^{1/x}$

விடைகள் 7 (E)

1. (a) e (b) e^a (c) 1

2. (a) $e^{1/6}$ (b) $e^{1/12}$

3. (a) 1 (b) 1 (c) வலமிருந்து $x \longrightarrow 0$ எனில் எல்லை ∞ ; இடமிருந்து $x \longrightarrow 0$ எனில் எல்லை 0.

4. (a) $e^{-1/2}$ (b) e (c) e^{-1}

5. (a) 1 (b) e^{-1} (c) 1 (d) $e^{2\pi}$

6. (a) $(a\,b\,c)^{1/3}$ (b) $a\,e$.

§ 7-6. ∞^0 என்ற தேரப் பெறுத அமைப்பு.

$\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} f(x) = \infty$, $\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} g(x) = 0$ என அமைய $y = \{f(x)\}^{g(x)}$ எனத் தரப்பட்டால் $x \longrightarrow a$ எல்லையில் y ஆனது ∞^0 அமைப்பில் இருக்கும்.

இத்தகைய அமைப்புகளுக்கு எல்லை காண

$$\log y = g(x) \,.\, \log f(x)$$

எனவே $\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} \log y$ என்பது $0 \cdot \infty$ அமைப்புக்கு மாறும். இதனைப் பகுதி 7·3-ல் கண்டவாறு ஏற்ற முறைகளைக் கையாண்டு தீர்வு காணலாம். இவ்வாறு பெற்ற எல்லை k என்க.

$\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} \log y = \log \underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} y = k$ ஆதலால்

$\underset{x \longrightarrow a}{\mathrm{Lt}} y = e^k$ என ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 19:

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \longrightarrow 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{1}{x}\right)^{2 \sin x}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட எல்லை ∞^0 என்ற அமைப்பில்.

$$y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x}\right)^{2 \sin x} \text{ என்க.}$$

$$\therefore \log y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \{-2 \sin x \log x\} \quad [0 \times \infty \text{ என்ற அமைப்பு}]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{-2\log x}{\text{cosec } x}\right] \quad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ என்ற அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{2/x}{\text{cosec } x \cot x}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{2 \sin x \tan x}{x}\right] \quad \left[\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{2\sin^2 x}{x \cos x}\right] \quad \left[\frac{0}{0} \text{ அமைப்பு}\right]$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\frac{4\sin x \cos x}{\cos x - x\sin x}\right]$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

$$\therefore \log y = 0$$

$$\therefore y = e^0 = 1$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x}\right)^{2 \sin x} = 1$$

பயிற்சிகள் 7(F)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \ (\text{cosec } x)^{\frac{1}{\log x}}$

(b) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{1}{x}\right)^{\tan x}$

(c) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \left[\log \frac{1}{x}\right]^{\log(1-x)}$

விடைகள் 7(F)

1. (a) e^{-1} b) 1 (c) 1.

§ 7-7 0° என்ற தேரப் பெருத அமைப்பு :

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} f(x) = 0$; $\underset{x \to a}{\text{Lt}} g(x) = 0$ என அமைய,

$y = \left[f(x)\right]^{g(x)}$ தரப்பட்டுள்ளது.

$x \to a$ எல்லையில் y ஆனது 0^{0} அமைப்பில் இருக்கும். ஆகையால் இத்தகைய அமைப்புகளுக்கு எல்லைகாண

$$\log y = g(x) \log f(x).$$

எனவே

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \log y$ என்பது $0 . \infty$ அமைப்பிற்கு மாறும். இதனை முன் கூறிய முறையில், ஏற்ற முறையில் தீர்வு காணலாம். (பகுதி 7.3 காண்க) இவ்வாறு பெற்ற எல்லை k என்க.

$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \log y = \log \underset{x \to a}{\text{Lt}} y = k$ ஆதலால் $\underset{x \to a}{\text{Lt}} y$ தீர்மானம் ஆகும். $\underset{x \to a}{\text{Lt}} y = e^{k}$.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 20 :

மதிப்பு காண்க :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} x^{x}$$

தீர்வு :

$$y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^x \text{ என்க;} \quad (0^0 \text{ அமைப்பு})$$

$$\log y = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x \log x \; (0 \times \infty \text{ அமைப்பு})$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{\log x}{x^{-1}}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; (-x)$$

$$= 0.$$

$$\therefore \log y = 0$$

$$y = e^0 = 1$$

$$\therefore \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^x = 1$$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$$\underset{x \to a}{\text{Lt}} \; \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3} = 1 \text{ எனில்}$$

a, b-ன் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{x(1 + a\cos x) - b\sin x}{x^3}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{x + ax\left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) b - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right)}{x^3}$$

$$= \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; \frac{x(1 + a - b) - x^3\left(\frac{b}{6} - \frac{a}{2}\right) + \ldots}{x^3}$$

மேற்கண்ட எல்லை 1 என்ற மதிப்புக்குச் சமமாக இருக்க வேண்டு மாஞல் x-ன் கெழு பூச்சியமாகவும் x^3-ன் கெழு 1 ஆகவும் இருக்க வேண்டும். ஆகையால்

$$a - b + 1 = 0 \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{b}{6} - \frac{a}{2} = 1$$

அல்லது $b - 3a = 6 \quad \ldots\ldots (2)$

(1) ஐயும் (2) ஐயும் தீர்வு காண

$$a = -\frac{5}{2}$$

$$b = -\frac{3}{2}$$

பயிற்சிகள் 7 (G)

1. மதிப்பு காண்க :

(a) $\underset{x \to 0}{\text{Lt}} \; x^{2x}$

(b) $\underset{x \to 1}{\text{Lt}} \; (1 - x^2)^{\frac{1}{\log (1 - x)}}$

(c) $\underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\text{Lt}} \; (\cos \theta)^{\cos \theta}$

விடைகள் 7 (G)

1. (a) 1 (b) e (c) 1

8. தொடுகோடும் வரைச்செங்கோடும்

§ 8-0. தொடுகோடு

$P(x, y)$, $Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ என்பன ஒரு வளைகோட்டில் அணுக்கமான புள்ளிகள். PQ என்ற நாண், QP-ஐ அணுகும் போது பெறுகின்ற எல்லை நிலையை P-யில் தொடுகோடு என வரையறை செய்கிறோம்.

§ 8-11. தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் (Slope)

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(x, y)$ என்பது கொடுக்கப் பட்ட புள்ளி. P-யில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதத்தைக் காணவேண்டியுள்ளது.

$Q(x+\triangle x, y+\triangle y)$ என்பது P-க்கு அருகில் வளைகோட்டில் உள்ள ஒரு புள்ளி. PQ, x அச்சை N-இல் வெட்டுகிறது. Q. P-ஐ அணுகும் போது QP என்ற நாண் P-யில் தொடு கோடாக அமைகிறது. இத்தொடு கோடு OX-ஐ K-இல் வெட்டுகிறது.

PK, QP என்பன x அச்சோடு உண்டாகும் கோணங்கள் ψ, ϕ என்க.

P, Q-விலிருந்து PL, QM என்பன x அச்சில் செங்குத்துக் கோடுகள். $PR \perp QM$. வரைக.

$$\angle RPQ = \angle MNQ = \phi$$

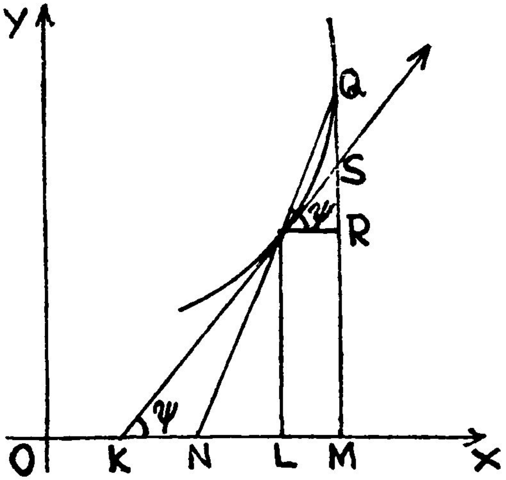
$$\tan\phi = \frac{RQ}{PR} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \triangle PQR\text{-இல்}$$

$$= \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

இப்போது Q ⟶ P என்ற எல்லையில்

$\triangle x \longrightarrow 0$

$\therefore \quad \frac{\triangle y}{\triangle x} \longrightarrow \frac{dy}{dx}$



படம் 8·1.

மேலும் Q ⟶ P என்ற எல்லையில்

நாண் QP ⟶ தொடுகோடு PK.

$\phi \longrightarrow \psi$

$\tan \phi \longrightarrow \tan \psi$

$\underset{\phi \longrightarrow \psi}{\text{Lt}} \tan \phi = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$ ஆதலால்

$$\boxed{\tan \psi = \frac{dy}{dx}}$$

$\therefore$ $\tan \psi$ என்பது (x, y) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$y = 3x^2$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $(-1, 3)$ என்ற புள்ளியில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம், m என்க.

$$m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(1,\,3)}$$

$$= (6x)_{(1,\,3)}$$

$$= 6$$

குறிப்பு 1 :

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$y-3 = 6(x-1)$$

குறிப்பு 2 :

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன் தரப்பட்டால் தனித்த மாறியின் கூடுந்தொகையான $\triangle x$ ஆனது x-ன் வகையீடாகிய dx-க்கு சமமென்பதையும் y-ன் வகையீடாக dy ஆனது $f'(x)\,\triangle x$-க்கு சமமென்பதையும் நினைவு கூர்க.

படத்தில்,

$$\frac{SR}{PR} = \tan \chi = f'(x)$$

$$\therefore \quad SR = PR\, f'(x)$$

$$PR = \triangle x = dx$$

மற்றும் $SR = dy = dx\, f'(x)$

எனவே

x-ன் வகையீடு $dx = PR$

y-ன் வகையீடு $dy = SR$

மேலும் y-ன் கூடுந்தொகை $\triangle y = QR$

y-ன் வகையீடு, y-ன் கூடுந்தொகைக்கு தோராய மதிப்பு என்பதை அறிக.

§ 8-12 தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(x_1, y_1)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு x அச்சில் ψ என்னும் கோணத்தை உண்டாக்குகிறது.

$\tan\psi = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = m$ என அறிவோம்.

எனவே தொடு கோட்டுச் சமன்பாடு

$$\boxed{y - y_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (x - x_1)}$$

குறிப்பு :

நடப்புக் கூறுகளை (X, Y) ஆலும், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியை (x, y) ஆலும், குறித்தால் தொடுகோட்டுச் சமன்பாடு

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x).$$

§ 8-2. வரைச் செங்கோட்டின் (Normal) சமன்பாடு

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் P (x_1, y_1) என்னும் புள்ளி வழியாக p-ன் தொடுகோட்டுக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டை P-ல் வரைச் செங்கோடு என்கிறோம். இதன் சமன்பாட்டைக் காண்போம்.

P-ல் தொடு கோட்டின் சாய்வு விகிதம் m எனவும், வரைச் செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் m^1 எனவும் கொள்க. $m\,m^1 = -1$ ஆதலால்

$$m^1 = -\frac{1}{m} \text{ இங்கே } m = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1\, y_1)}$$

வரைச் செங்கேட்டின் சமன்பாடு.

$$y - y_1 = m^1 (x - x_1)$$

(அ-து) $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

(அ-து) $x - x_1 + m(y - y_1) = 0.$

(அ-து) $$\boxed{(x - x_1) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} (y - y_1) = 0}$$

குறிப்பு :

நடப்புக் கூறுகள் (X, Y); கொடுக்கப்பட்டபுள்ளி (x, y) எனில் வரைச்செங்கோடு

$$(Y - y)\frac{dy}{dx} + (X - x) = 0.$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு : 1

$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ என்ற வளைகோடு n-ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ என்ற நேர் கோட்டை (a, b) என்ற புள்ளியில் தொடுகிறது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\frac{x^n}{a^n} + \frac{y^n}{b^n} = 2$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

வகைக்கெழுக்காண

$$\frac{nx^{n-1}}{a^n} + \frac{ny^{n-1}}{b^n} \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

$$(\text{அது})\quad \frac{dy}{dx} = -\frac{nx^{n-1}}{a^n} \cdot \frac{b^n}{n \cdot y^{n-1}}$$

$$= -\frac{b^n x^{n-1}}{a^n \cdot y^{n-1}}$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,\, b)} = -\frac{b^n a^{n-1}}{a^n b^{n-1}} = -\frac{b}{a}$$

எனவே தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - b = -\frac{b}{a}(x - a)$$

(அது) $a(y-b) + b(x - a) = 0$

(அது) $xb + ay = 2ab$

(அது) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2.$

$\therefore \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$ என்ற கோடு வளைகோட்டை n-ன் எல்லா மதிப்பிற்கும் (a, b)-ல் தொடும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 ;

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்னும் நேர்கோடு $\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 1$ என்னும் வளைகோட்டைத் தொடுவதற்கான நிபந்தனையைக் காண்க.

தீர்வு:

$\frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 1$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

வகைக்கெழு காண,

$$\frac{3x^2}{a^3} + \frac{3y^2}{b^3} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{(அது)} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2}{a^3}\,\frac{b^3}{3y^2}$$

$$= -\frac{b^3}{a^3} \cdot \frac{x^2}{y^2}$$

ஆகவே (x, y)-ல் வலரயப்பட்ட தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$(Y-y) = -\frac{b^3}{a^3}\,\frac{x^2}{y^2}\,(X-x)$$

அல்லது $\frac{X}{a}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \frac{Y}{b}\left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$ ... (1)

$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, தொடுகோடு எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

(அது) $X \cos \alpha + Y \sin \alpha = p$ ... (2)

(1), (2)-ல் கெழுக்கள் சமவிகித முடையன.

$$\frac{a \cos \alpha}{\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{b \sin \alpha}{\left(\frac{y}{b}\right)^2} = \frac{p}{1}$$

எனவே,

$$\left(\frac{a \cos \alpha}{p}\right)^{1/2} = \frac{x}{a},$$

$$\left(\frac{b \sin \alpha}{p}\right)^{1/2} = \frac{y}{b}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{a \cos \alpha}{p}\right)^{3/2} + \left(\frac{b \sin \alpha}{p}\right)^{3/2} = \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 1$$

ஆகவே தேவைப்படும் நிபந்தனை,

$$(a \cos \alpha)^{3/2} + (b \sin \alpha)^{3/2} = p^{3/2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$3h^2y = x^3 - 3ax^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு x அச்சிற்கு இணையான தொடு கோடுகள் எந்தப் புள்ளிகளில் இருக்கும் எனக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$3b^2y = x^3 - 3ax^2$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது. வகையீடு செய்ய,

$$3b^2 y' = 3x^2 - 6ax.$$

$$y' = \frac{x^2 - 2ax}{b^2}$$

x அச்சுக்கு இணையாக தொடுகோடுகளுக்கு சாய்வுவீதம் $= 0$.

அதாவது $\frac{dy}{dx} = 0$

(அ'து) $x^2 - 2ax = 0$. (அது) $x = 0$ அல்லது $x = 2a$

அப்போது $y = 0$. அல்லது $3b^2y = 8a^3 - 12a^3 = -4a^3$

எனவே $y = 0$ அல்லது $y = -\frac{4a^3}{3b^2}$

எனவே தொடுகோடு அமைந்த புள்ளிகள்

$(0, 0)$; $(2a, -4a^3/3b^2)$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$xy(y^2 - x) = a^4$ என்ற வளைகோடு $y^2 = 2x$ என்ற பர வளையத்தால் வெட்டப்படும் புள்ளிகளில் வளைகோட்டிற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x-அச்சுக்கு இணை என நிறுவுக.

தீர்வு :

$xy(y^2 - x) = a^4 \ldots \quad (1)$ என்பதை வகையிட

$$xy\left[2y\frac{dy}{dx} - 1\right] + x\frac{dy}{dx}(y^2 - x) + y(y^2 - x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}[2xy^2 + xy^2 - x^3] = xy - y^3 + xy.$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^3}{3xy^2 - x^3}$$

$xy(y^2 - x) = a^4, \quad y^2 = 2x$ ஆகியன.

வெட்டும் புள்ளிகளில் $x = y^2/2$ ஆதலால்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y^2}{2}\times y\right) - y^3}{3\,\frac{y^2}{2}\,.\,y^2 - \frac{y^6}{8}} = 0$$

ஆதலால் வெட்டும் புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் x-அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$y^2 = 4a\left(x + a\sin\frac{x}{a}\right)$ என்ற வளை கோட்டிற்கு வரையப் பட்ட x-அச்சுக்கு இணையான தொடுகோடுகளின் தொடும் புள்ளிகள் ஒரு பரவளைவின் மேல் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y^2 = 4a\left(x + a\ \sin\frac{x}{a}\right)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது. ... . (1)

வகையீடு செய்ய,

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4a\left(1 + a\cos\frac{x}{a}\,\frac{1}{a}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4a}{2y}\left(1 + \cos\frac{x}{a}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

x அச்சுக்கு இணையான தொடுகோட்டுக்கு $\frac{dy}{dx}$

$$\therefore\ 4a\left(1 + \cos\frac{x}{a}\right) = 0.$$

$$(\text{அது})\ \cos\frac{x}{a} = -1$$

$$(\text{அது})\ \frac{x}{a} = (2k+1)\pi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

இங்கே k, பூச்சியம் அல்லது மிகை முழு எண், அல்லது குறை முழு எண்.

இதற்கேற்ற y காண்போம்.

$\frac{x}{a} = (2k+1)\pi$ ஆதலால் $\sin\frac{x}{a} = 0$.

(1)-லிருந்து $y^2 = 4ax$ என x மதிப்புக்கேற்ப y மதிப்புகள் கிடைக்கும்.

அதாவது தொடும் புள்ளிகள் $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஒரு வளைகோட்டின் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளாவன $x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$; $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$. இவ்வளைகோட்டின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு கண்டு $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்னும் புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு ஆதி வழியே செல்லும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$x = 3\cos\theta - \cos^3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin^3\theta$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{dx}{d\theta} = -3\sin\theta + 3\cos^2\theta\sin\theta \; ; \quad \frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta - 3\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= -3\sin\theta\,(1-\cos^2\theta); \qquad = 3\cos\theta(1-\sin^2\theta)$$

$$= -3\sin^3\theta. \qquad = 3\cos^3\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos^3\theta}{\sin^3\theta}$$

∴ வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - 3\sin\theta + \sin^3\theta = \frac{\sin^3\theta}{\cos^3\theta}(x - 3\cos\theta + \cos^3\theta)$$

(அது) $y\cos^3\theta - x\sin^3\theta = 3\sin\theta \cdot \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$$= \frac{3}{2}\sin 2\theta \cdot \cos 2\theta$$

$$= \frac{3}{4}\sin 4\theta$$

இரண்டாம் பகுதி : $\theta = \frac{\pi}{4}$-ல் $y\cos^3\frac{\pi}{4} - x\sin^3\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\sin\pi$
$= 0.$

சமன்பாட்டில் மாறிலி உறுப்பு இல்லை.

எனவே $\theta = \frac{\pi}{4}$-ல், வரைச் செங்கோடு ஆதிவழி செல்லும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x^3 = y^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(4m^2, 8m^3)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு $y = 4mx - 4m^3$ என நிறுவுக. அது வளைகோட்டை $(m_1^2, -m^3)$ என்ற புள்ளியில் மீண்டும் வெட்டும் எனவும், $9m^2 = 2$ எனில் அப்புள்ளியில் அது வரைச் செங்கோடாக இருக்கும் எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாடு,

$$x^3 = y^2 \qquad \dots\dots (1)$$

$$\therefore \quad 2y\cdot\frac{dy}{dx} = 3x^2. \quad \text{(அது)} \ \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{y}.$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(4m^2,\, 8m^3)} = 3m$$

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு, $(Y-y) = \frac{dy}{dx}(X-x)$.

$(4m^2, 8m^3)$-ல் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$(Y-8m^3) = 3m(x-4m^2).$$

அதாவது $y = 3mx - 4m^3$ ... ... (2)

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் தீர்க்க, தொடுகோடும், வளைகோடும் வெட்டும் புள்ளி பெறப்படும்.

$$\therefore \quad x^3 = (3mx - 4m^3)^2$$

அது $x^3 - 9m^2x^2 + 24m^4x - 16m^6 = 0$ ... (3)

$x = m^2$ எனப்பிரதியிட

$$m^6 - 9m^6 + 24m^6 - 16m^6 = 0.$$

(3) நிறைவு செய்யப்படுகிறது.

எனவே $x = m^2$ என்பது (3)-ன் ஒரு தீர்வு ஆகும்.

$x = m^2$ என (2)-ல் பிரதியிட,

$y = 3m^3 - 4m^3 = -m^3$

∴ தொடுகோடு, வளைகோட்டை மீண்டும் $(m^2, -m^3)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

இனி $9m^2 = 2$ எனில்

$y = 3mx - 4m^3$ ... (2)

என்பது $(m^2, -m^3)$-ல் வரைச் செங்கோடு என நிறுவுவோம்.

வளைகோட்டுக்கு $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2y}$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(m^2, -m^3)} = \frac{3m^4}{2(-m^3)} = -\frac{3m}{2}$$

எனவே வரைச் செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= \frac{2}{3m}$

$(m^2, -m^3)$-ல் வரைச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(y + m^3) = \frac{2}{3m}(x - m^2)$$

$$3my + 3m^4 = 2x - 2m^2$$

(அது) $9my+9m^4 \quad = 6x - 6m^2$

$$\therefore \; 9my = 6x - 6m^2 - 9m^4$$

$$= 6x - 6\left(\frac{2}{9}\right) - 9.\frac{4}{81} \text{ (ஏனெனில் } m^2 = 2/9)$$

$$\therefore \; 9\,my = 6x - \frac{16}{4} \qquad \dots \quad (3)$$

(2)-ஐ $9m$ ஆல் பெருக்க

$$9my = 27m^2x - 4.9.\,m^4$$

$$= 27\,.\,\frac{2}{9}\,x - 36\,.\,\frac{4}{81}$$

$$= 6x - \frac{16}{4} \qquad \dots \quad (4)$$

எனவே $9m^2 = 2$ எனில், (m^2, m^3)-ல் வரைச் செங்கோடு (2) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு வரையப்பட்ட தொடுகோடுகளின் அச்சுத் துண்டங்களின் கூட்டல் தொகை மாறிலி என நிறுவுக.

தீர்வு : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = a$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.
தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

$$\frac{X - x}{2\sqrt{x}} + \frac{Y - y}{2\sqrt{y}} = 0.$$

(அது) $\dfrac{X}{\sqrt{x}} + \dfrac{Y}{\sqrt{y}} = (\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{a}$

(அது) $\dfrac{X}{\sqrt{a}\sqrt{x}} + \dfrac{Y}{\sqrt{a}\;\sqrt{y}} = 1$

இது அச்சுக்களை வெட்டும் துண்டங்கள் x_1, y_1 என்க.

எனவே $x_1 = \sqrt{a}\;\sqrt{x}$, $y_1 = \sqrt{a}, \sqrt{y}.$

$$\therefore x_1 + y_1 = \sqrt{a}\,(\sqrt{x} + \sqrt{y}) = \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a.$$

இது மாறிலி.

பயிற்சிகள் 8 (A)

பின் வரும் வளைகோடுகளின் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் தொடு கோடுகள், வரைச் செங்கோடுகள், ஆகியவற்றின் சமன்பாடு களைக் காண்க :

1. $y = 2x^2 - 4x + 5$; $(3, 11)$ என்ற புள்ளி,
2. $y = \dfrac{6x}{x^2 - 1}$; $(2, 4)$ என்ற புள்ளி.
3. $y^2 = \dfrac{x^3}{4 - x}$; $(2, -2)$ என்ற புள்ளி.
4. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 5$; $(9, 4)$ என்ற புள்ளி.
5. $x^2 + 5y^2 = 14$; $y = 1$ எனில்.
6. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ என்ற புள்ளி.
7. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; (h, k) என்ற புள்ளி.
8. $y(x - 2)(x - 3) - x + 7 = 0$; x அச்சை வளைகோடு வெட்டும் புள்ளி
9. $y \sin 2x$; $x = \dfrac{\pi}{2}$ எனில்.
10. $y = a \log \sin x$; (x_1, y_1) என்ற புள்ளி.
11. $y^2 = 4ax$; $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளி.
12. $x = a\sin^3\theta$; $y = \cos^3\theta$; "θ" என்ற புள்ளி.

13. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (a, a) என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க. அது வளை கோட்டை $\left(\dfrac{2a}{5}, \dfrac{-a}{5}\right)$ என்ற புள்ளியில் மீண்டும் வெட்டும் என நிறுவுக. (a, a) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு, வரைச்செங்கோடு, மற்றும் $x = 2a$ என்ற நேர்கோடு உருவாக்கும் முக்கோணம் $\dfrac{5a^2}{4}$ பரப்புடையது என நிறுவுக.

14. $y = b\,e^{-x/a}$ என்ற வளைகோட்டை y அச்சு வெட்டும் புள்ளியில் $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற கோடு தொடும் என நிறுவுக.

15. $x^3 = ay^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(4am^2,\ 8am^3)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க. மற்றும் அத் தொடுகோடு வளைகோட்டை மீண்டும் எங்கே வெட்டும் எனக் காண்க.

16. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோடு, x அச்சுடன் θ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கினுல் அதன் சமன்பாடு $y\cos\theta - \sin\theta = a\cos 2\theta$ என நிறுவுக.

17. பின் வரும் வளைகோடுகளுக்கு எந்தப் புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் x அச்சிற்கு இணையாக இருக்கும் எனக் காண்க.

(i) $x^4 + y^4 = a^2 x^2 y$.

(ii) $3b^2 = x^3 - 3ax^2$

18. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ என்ற நீள் வளையத்தை $ax + hy = 0$ என்ற கோடு வெட்டும் புள்ளிகளில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் x அச்சுக்கு இணை என நிறுவுக. எந்தப் புள்ளி களில் வரையப்படும் தொடுகோடுகள் y அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும் ?

19. பின் வரும் வளைகோடுகளுக்கு எந்தப் புள்ளிகளில் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள் x அச்சுக்குச் செங்குத்தாக இருக்கும் எனக் காண்க.

(i) $y^3 = x^2(2a - x)$

(ii) $x^3 + y^3 = 3axy$.

20. ஆதியிலிருந்து $y = \sin x$ என்னும் வளைகோட்டிற்குத் தொடுகோடுகள் வரையப்படுகின்றன. அவற்றின் தொடும் புள்ளிகள் $x^2y^2 = x^2 - y^2$ என்பதன் மேல் அமையும் என நிறுவுக.

21. $x^m y^m = a^{m+n}$ என்ற வளைகோட்டை $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ தொடும் எனில் $p^{m+n}\cdot m^m\cdot n^n = (m+n)^{m+n}\,a^{m+n}\cdot\cos^m\alpha.\ \sin^n\alpha$. என நிறுவுக.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளையத்தின் வரைச் செங்கோடு $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$ வளைகோட்டைத் தொடும் என நிறுவுக.

23. $y^2 = 4ax$ என்ற வளைகோட்டின் செங்கோடு $27ay^2 = 4(x-2a)^3$ என்ற வளைகோட்டைத் தொடும் என நிறுவுக.

24. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ என்னும் கோடு

$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{n}{n-1}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{n}{n-1}} = 1$ என்ற வளைகோட்டைத் தொடு மாஞல் $(a \cos \alpha)^n + (b \sin \alpha)^n = p^n$ என நிறுவுக.

25. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (x, y) என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் மீது ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில் $3p^2 + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என நிறுவுக.

26. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டின் இரு அச்சுகளிடையே துண்டாடப்படும் பகுதி மாறுத நீளம் உடையது என நிறுவுக.

27. $x^m \cdot y^m = a^{m+n}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வரைந்த தொடுகோட்டின் இரு அச்சுகளுக்கிடைப்பட்ட பகுதி தொடும் புள்ளியில் மாறுத விகிதத்தில் பிரிக்கப்படும் என நிறுவுக.

28. $xy^n = a^{n+1}$ என்ற வளைகோட்டின் எந்த தொடுகோடும் இரு அச்சுக்களோடு சேர்ந்து உண்டாக்கும் முக்கோணத்தின் மாறுதிருக்க n இன் மதிப்பென்ன ?

29. $ay^2 = x^3$ என்ற வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு, அச்சுக்களில் சம நீளமுள்ள துண்டங்களை வெட்டிஞல் பரப்பு அப்புள்ளியின் x அச்சு தூரத்தைக் காண்க.

30. $x = a\frac{f(t)}{\psi(t)}$; $y = a\frac{\phi(t)}{\psi(t)}$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் தொடுகோடு, கீழ்காணும் அமைப்பில் இருக்கும் என நிறுவுக :

$$\begin{vmatrix} x & y & a \\ f(t) & \phi(t) & \psi(t) \\ f'(t) & \phi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix} = 0$$

விடைகள் 8 (A)

1. $8x - y = 13$; $x + 8y = 91$

2. $10x + 3y - 32 = 0$; $3x - 10y + 34 = 0$.

3. $2x + y = 2$; $x + 2y = 6$.

4. $2x + 3y = 30$; $3x - 2y = 19$.

5, $3x + 5y - 14 = 0$; $5x - 3y - 12 = 0$

6. $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$; $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

7. $xh^{-1/3} + yk^{-1/3} = a^{2/3}$;

$xk^{-1/3} - yh^{-1/3} = hk^{-1/3} - kh^{-1/3}$

8. $x - 20y - 7 = 0$; $20x + y - 140 = 0$.

9. $6(x+y) = 2\pi + 3\sqrt{3}$; $6(x-y) = 2\pi - 3\sqrt{3}$

10. $y - y_1 = a(\cot x_1)(x - x_1)$; $(y - y_1)a + (\tan x_1)(x - x_1) = 0$.

11. $y = \frac{x}{t} + at$; $y + tx = 2at + at^3$

12. $x/a \sin\theta + y/b \sin\theta = 1$; $ax\sin\theta - by\cos\theta = a\sin^4\theta - b\cos^4\theta$

15. $y = 3mx - 4am^3$; (am^2, am^3)

17. (i) $[(a, 2) ; (-a, 2)]$ (ii) $(2a, -\frac{4a^3}{3b^2})$; $(0, 0)$

18. $hx + by = 0$ நீள்வளையத்தை வெட்டும் புள்ளிகள்.

19. (i) $(0, 0)$, $(9a, 0)$, (ii) $[(4a)^{1/3}, (2a)^{1/3}]$

28. $n = 1$.

29. $\frac{49}{9}$

§ 8-3 இரு வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம்.

இரு வளைகோடுகள் ஒன்றை ஒன்று வெட்டினால் வெட்டும் புள்ளியில் வளைகோடுகளுக்குத் தொடு கோடுகள் வரைந்து, அவற்றுக்கிடையே உள்ள கோணத்தை இரு வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம் என வரையறை செய்கிறோம்.

$y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ என்ற வளைகோடுகள் (x,y) என்னும் புள்ளியில் வெட்டுகிறது என்க. θ வெட்டும் கோணம்.

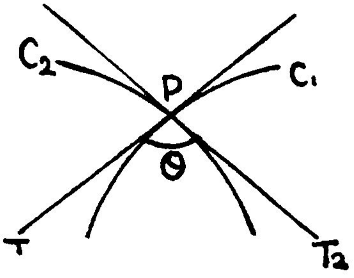
(x, y) என்ற புள்ளியில் இரு வளைகோடுகளுக்கும் தொடு கோடுகள் வரைந்தால் அவற்றின் சாய்வு விகிதம் முறையே $f_1'(x)$, $f_2'(x)$

எனவே

$$\tan\theta = \pm\frac{f_1'(x) - f_2'(x)}{1 + f_1'(x)f_2(x)}$$

கிளை 1 :

இரு வளைகோடுகள் ஒன்றை ஒன்று குத்தாக (orthogonal) வெட்டினால் வெட்டும் கோணம் $\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆகும்.



படம் 8·2.

எனவே $\frac{1}{\tan\theta} = 0$

$$\therefore \quad \frac{1 + f_1'(x) \cdot f_2'(x)}{f_1'(x) - f_2'(x)} = 0$$

$$f_1'(x) \cdot f_2'(x) = -1$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$x^2 - y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2}$ என்ற வளை கோடுகள் வெட்டும் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு :

$$x^2 - y^2 = a^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$2x - 2y\frac{dy}{dx} = 0 ;$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} m_1$$ என்க.

$$x^2 + y^2 = a^2\sqrt{2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} m_2$$ என்க.

வெட்டும் புள்ளிகள் காண (1), (2)-ஐ தீர்வு காணவும்.

(1 -ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்ட,

$$2x^2 = a^2(1 + \sqrt{2}$$

$$x^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \sqrt{2})$$

$$x = \pm\frac{9}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} + 1)}$$

2-லிருந்து (1)-ஐ கழிக்க

$$2y^2 = a^2(\sqrt{2} - 1)$$

$$y = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} - 1)}$$

எனவே, கிடைக்கும் வெட்டும் புள்ளிகள் நான்கில்

$$\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} + 1)}\ ,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2} - 1)}\right)$$

என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

$$m_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}+1)}\,,\ \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}-1)}\right]$$

$$= \frac{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}+1)}}{\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{2}-1)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$m_2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)\left[\frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1)\,,\ \frac{a}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}-1)\right]$$

$$= -\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$m_1 m_2 = -\sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)^2}} = -\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)}$$

$$\therefore \tan\theta = \pm\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm\frac{2\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}}{1 - \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= \pm(\sqrt{2}-1)\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$\tan\theta = \pm\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \pm\sqrt{2-1} = \sqrt{1} = \pm 1$$

$\therefore \theta = \pm\frac{\pi}{4}$. $\therefore$ வளைகோடுகள் வெட்டும் கோணம் $\frac{\pi}{4}$, இவ்வாறே மற்ற மூன்று வெட்டும் புள்ளிகளிலும் வெட்டும் கோணங்கள் காண்க.

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$ax^2 + by^2 = 1$, $lx^2 + my^2 = 1$ என்னும் வளைகோடுகள் குத்தாக வெட்டினுல்

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$ax^2 + by^2 = 1 \qquad \dots (1)$$

$$lx^2 + my^2 = 1 \qquad \dots (2)$$

என்ற வளைகோடுகள் தரப்பட்டுள்ளன.

(1), (2)-ன் வெட்டும் புள்ளிகளில் (x_1, y_1) ஒன்று என்க.

எனவே

$$ax_1^2 + by_1^2 = 1 \qquad \dots (3)$$

$$lx_1^2 + my_1^2 = 1 \qquad \dots (4)$$

(1)-ஐ வகையீடு செய்ய,

$$2ax + 2by.\frac{dy}{dx} = 0 \text{ அல்லது } \frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$$

m_1 என்பது (1)-க்கு (x_1, y_1)-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -(ax_1/by_1)$

m_2 என்பது (2)-க்கு $(x_1\ y_1)$-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டின் சாய்வுவீதம் $= -(lx_1/my_1)$

வளைகோடுகள் குத்தாக வெட்டுவதால்

$$m_1 m_2 = -1$$

$$\therefore \left(-\frac{ax_1}{by_1}\right)\left(-\frac{lx_1}{my_1}\right) = -1 \text{ அல்லது } \frac{alx_1^2}{bmy_1^2} = -1 \qquad (5)$$

தேவையான நிபந்தனையைப்பெற $x_1\ y_1$ என்ற மாறிலிகளை (3), (5), (4) இவைகளிலிருந்து நீக்கம் செய்ய வேண்டும்.

(3)-லிருந்து (4)-ஐக் கழிக்க,

$$(a - l)\ x_1^2 + (b - m)\ y_1^2 = 0$$

$$\text{அது } \frac{x_1^2}{y_1^2} = -\frac{b - m}{a - l}$$

இந்த மதிப்பை (5)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{al\ (b - m)}{bm\ (a - l)} = 1$$

(அது) $al(b - m) = bm(a - l)$

$ab\,lm$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க.

$$\frac{1}{m} - \frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{a}$$

அது $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m}$.

பயிற்சிகள் 8 (B)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளின் வெட்டும் கோணம் காண்க:

(i) $x^2 = 4ay$; $2y^2 = ax$.

(ii) $x^3 - 3xy^2 + 2 = 0$; $3x^2y - y^3 = 2$.

(iii) $y^2 = 4ax$; $x^2 = 4by$.

(iv) $y = \sin x$; $y = \cos 2x$.

2. பின்வரும் வளைகோடுகள் குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக:

(i) $x^3 - 3xy^2 = 2a^3$; $y^3 - 3x^2y = 11a^3$.

(ii) $x^3 - 3xy^2 = -2$; $3x^2y - y^3 = 2$.

3. $\dfrac{x^2}{a^2+k_1} + \dfrac{y^2}{b^2+k_1} = 1$, $\dfrac{x^2}{a^2+k_2} + \dfrac{y^2}{b^2+k_2} = 1$

என்னும் வளைகோடுகள் குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக.

4. (2, 1) என்ற புள்ளியில் $y = x^2 - 3x + 3$, $y = x^3 - 6x^2 + 13x - 9$ எனும் வளைகோடுகள் தொடும் என நிறுவுக.

விடைகள் 8 (B)

1. (i) $\pi/2$ (ii) $\tan^{-1}(3/5)$ (iii) $\tan^{-1}\left[\dfrac{a^{1/3}\,b^{1/3}}{2(a^{2/3}+b^{2/3})}\right]$

(iv) $x = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}$ ஆகிய புள்ளிகள் $\tan^{-1}(3\sqrt{3})$;

$x = \dfrac{3\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் தொடும்.

§ 8-4. ஆதியில் தொடுகோடுகள்

ஆதி வழியே செல்லும் 'n'படி உள்ள விகிதமுறு இயற்கணித வளைகோடு (Rational algebraic curve)

$(a_1 x + b_1 y) + (a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2) + \dots\dots\dots\dots$
$\dots\dots + (a_n x^n + \dots\dots\dots + k_n y^n) = 0 \dots\dots (1)$

P (x, y) என்பது O-வின் அண்மையின் உள்ள ஒரு புள்ளி. OP என்ற நாணின் சாய்வு விகிதம் $\frac{y}{x}$ ஆகும். எனவே O-வில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு.

$$Y = mX \dots\dots (2) \text{ இங்கே } m = \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{y}{x}\right)$$

வகை 1 : m முடிவுள்ள எண். அதாவது y அச்சு ஆதியில் தொடுகோடாக இல்லை.

(i) $b_1 \neq 0$ எனக் கொள்க. சமன்பாடு (1)-ஐ x ஆல் வகுத்தால்,

$$\left(a_1 + b_1\frac{y}{x}\right) + \left(a_2 x + b_2 y + c_2 y \cdot \frac{y}{x}\right) + \dots\dots = 0$$

$x \longrightarrow 0$ எனில் $y \longrightarrow 0$; $\frac{y}{x} \longrightarrow m$

ஆகவே $a_1 + b_1 m = 0$

மற்ற உறுப்புக்கள் எல்லாம் 0 ஆகும்.

எனவே,

$$m = -\frac{a_1}{b_1} \qquad \dots\dots (3)$$

ஆகையால் (2) ஆனது

$$Y = -\frac{a_1}{b_1} X$$

அல்லது

$$a_1 X + b_1 Y = 0$$

அல்லது

x, y நடப்புக் கூறுகளாகக் கொண்டால் சமன்பாடு

$$a_1x + b_1y = 0$$

(1) என்ற சமன்பாட்டில் மிகக் குறைந்தபடி உள்ள உறுப்புகளை பூஜ்ஜியத்தோடு சமப்படுத்தினால் மேற்கண்ட சமன்பாடு கிடைக்கும் என்பதை அறிக.

(ii) $b_1 = 0$ எனக் கொண்டால் (3) இலிருந்து

$a_1 = 0$ ஆகும்.

$b_2 \neq 0$; $c_2 \neq 0$ எனக் கொள்க.

இப்போது (1)-ஐ x^2 ஆல் வகுத்து, $x \longrightarrow 0$; $y \longrightarrow 0$ எல்லையைக் கண்டால்

$$a_2 + b_2m + c_2m^2 = 0$$ ஆகும்.

மற்ற உறுப்புக்கள் மறையும். இச்சமன்பாடு m-க்கு இரு மதிப்புக்கள் தருமாதலால் ஆதியில்

$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = 0$ என்ற அமைப்பில் இரு தொடு கோடுகள் கிடைக்கும்.

இங்கும் (1) இன் மிகக் குறைந்தபடிகளில் உள்ள உறுப்பை பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துவதனால் மேற்கூறிய சமன்பாடு கிடைக்கும் என்பதை அறிக.

வகை 2 :

y அச்சு ஆதியில் தொடும் கோடாக இருக்கும் போது, x அச்சும் y அச்சும் ஒன்றுக்கொன்று இடம் மாறி உள்ளதாகக் கருதி, தொடுகோடு அதே அமைப்பில் இருப்பதை அறியலாம்.

செய்முறை :

ஆதியில் உள்ள தொடுகோடு அல்லது தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு காண, வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் மிகக் குறைந்த படியில் உள்ள உறுப்புக்களைப் பூஜ்ஜியத்துடன் சமப்படுத்துக.

எடுத்துக்காட்டாக,

$x^3 + y^3 - 3axy = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் உள்ள தொடுகோடுகளின் சமன்பாடாவது,

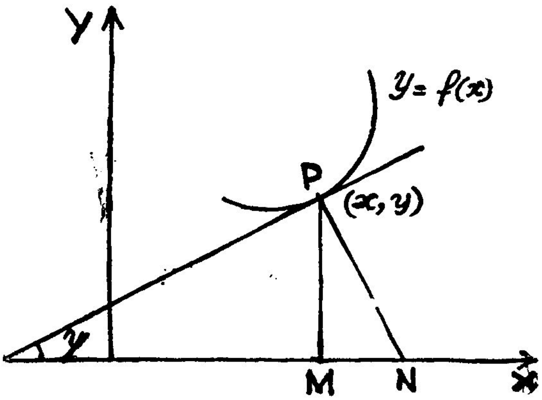
$$3axy = 0$$

அதாவது, $x = 0$

$$y = 0.$$

§ 8-5. தொடு கோட்டடி, வரைச் செங்கோட்டடி முதலியன:

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $P(x, y)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடும், வரைச் செங்கோடும் வரையப் படுகின்றன. அவை x அச்சை முறையே T-யிலும் N-இலும் வெட்டுகின்றன. P-யிலிருந்து x அச்சுக்கு PM செங்குத்துக் கோடாகும்.



படம் 8·3.

$\angle MPN = \angle PTN = \psi$ என்க.

TM, MN ஆகிய நீளங்கள் முறையே தொடு கோட்டடி, (sub tangent) வரைச் செங்கோட்டடி (sub normal) என அழைக்கப்படும்.

PT, PN என்பன முறையே, தொடுகோட்டு நீளம், வரைச் செங் கோட்டு நீளம் எனக் கூறப்படும்.

$$\therefore \text{ தொடுகோட்டடி } = TM = y\cot\psi = \frac{y}{\frac{dy}{dx}} = \boxed{\frac{y}{y_1}}$$

$$\text{வரைச்செங்கோட்டடி } = MN = y\tan\psi = y\frac{dy}{dx} = \boxed{y\,y_1}$$

தொடுகோட்டின் நீளம் = PT = y cosec ψ

$$= y\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1+\frac{1}{y_1^2}}$$

$$\therefore \boxed{\text{தொடுகோட்டின் நீளம்} = \frac{y}{y_1}\sqrt{1+y_1^2}}$$

வரைச் செங்கோட்டு நீளம்

$$= PN = y \sec \psi$$

$$= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+y_1^2}$$

$$\therefore \boxed{\text{வரைச் செங்கோட்டு நீளம்} = y\sqrt{1+y_1^2}}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$y^{n+1} = a^n x$ என்ற வளைகோட்டுக்கு தொடுகோட்டடி x ஆயத்தொலையைப் பொறுத்து மாறுமென்றும், வரைச்செங் கோட்டடியின் $(n+1)$ படி, x ஆயத்தொலையின் $(n-1)$ படியைப் பொறுத்து எதிர்மறையாக மாறுமென்றும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y^{n+1} = a^n x \text{ ஆதலால்}$$

$$(n+1)\log y = n\log a + \log x$$

$\therefore$ வகைக்கெழு காண

$$(n+1)\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\cdot\frac{1}{n+1}$$

$$\text{தொடுகோட்டடி} = \frac{y}{y_1} = (n+1)x$$

∴ தொடுகோட்டடி x ஆயத்தொலையைப் போல் மாறும் வரைச்செங்கோட்டடி

$$= yy_1 = y \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{1}{n+1}$$

(வரைச்செங்கோட்டடி)$^{n+1}$

$$= \frac{(y^2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}\, x^{n+1}} = \frac{(y^{n+1})^2}{x^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)^{n+1}}$$

$$= \frac{a^{2n}\, x^2}{x^{n+1}} = \frac{a^{2n}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$$

∴ (வரைச்செங்கோட்டி)$^{n+1}$

$$\propto \frac{1}{(x \text{ ஆயத்தொலை})^{n-1}}$$

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$y = a \log (x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டின் நீளமும், தொடு கோட்டடி நீளமும் கூட்டிய தொகை அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகைக்கு ஏற்ப மாறும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = a \log (x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே $y_1 = \dfrac{2ax}{x^2 - a^2}$

தொடுகோடு + தொடுகோட்டடி

$$= \frac{y}{y_1} \sqrt{1 + y_1^2} + \frac{y}{y_1}$$

$$= \frac{y}{y_1} \left(1 + \sqrt{1 + y_1^2}\right)$$

$$= \frac{y\,(x^2 - a^2)}{2ax} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 x^2}{(x^2 - a^2)^2}}\right]$$

$$= \frac{y\,(x^2 - a^2)}{2ax} \left[1 + \frac{x^2 + a^2}{x^2 - a^2}\right]$$

$$= \frac{xy}{a}$$

எனவே, ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டு நீளமும், தொடுகோட்டடி நீளமும், கூட்டிய தொகை, அப்புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் இரண்டின் பெருக்குத் தொகைக்கு ஏற்ப மாறுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

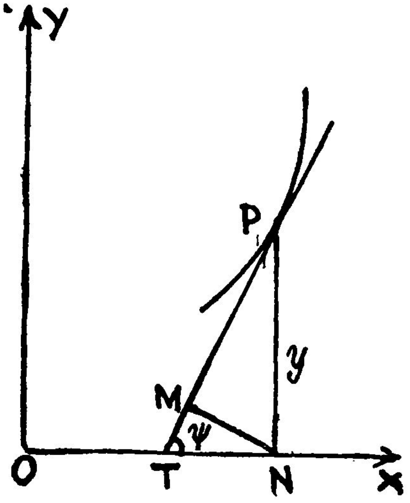
$y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்ற சங்கிலியத்தின் (catenary) ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ஒரு தொடுகோடு வரையப்பட்டுள்ளது. அப் புள்ளியிலிருந்து x அச்சிற்கு வரையப்பட்ட குத்தாயத்தின் அடியிலிருந்து அத்தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் மாறிலி என நிறுவுக.

தீர்வு :

சங்கிலியத்திற்கு P-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, x அச்சை T-ல் ψ என்ற கோணத்தில் சந்திக்கிறது.

எனவே,

$y_1 = \tan \psi$; மற்றும் $y_1 = \sinh \frac{x}{c}$



படம் 8·4.

மற்றும் P-லிருந்து OX-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு N-ல் சந்தித்தால் TN தொடுகோட்டடி, $TN = y/y_1$ N-லிருந்து PT-க்கு படத்தில் கண்டவாறு NM செங்குத்தாக வரையப்படுகிறது.

எனவே, $\frac{MN}{TN} = \sin \chi$

$$\therefore \quad MN = TN \sin \chi$$

$$= \frac{y}{y_1} \sin \chi$$

$$= \frac{y}{\tan \chi} \sin \chi = y \cos \chi$$

$$= y \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \chi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{c}}}$$

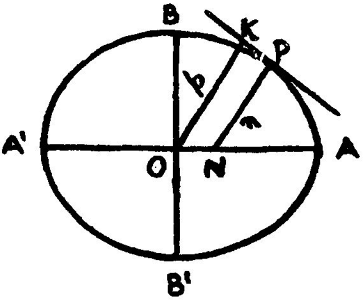
$$= \frac{c \cosh \frac{x}{c}}{\cosh \frac{x}{c}} = c \text{ (மாறிலி).}$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தின் ஒரு புள்ளியில் வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டு நீளமாவது, அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டுக்கு ஆதியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் நீளத்திற்கு எதிர்மறையாக மாறும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $P(x_1\ y_1)$-ல் PT



படம் 8·5.

என்ற தொடுகோடு வரையப்பட்டு இருக்கிறது. வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை வகையீடு செய்ய,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(\text{அது})\ \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y}$$

$$(x_1\, y_1)\text{-ல்}\ \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1}{y_1}$$

வரைச்செங்கோட்டின் நீளம் = NP

$$= n = y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \cdots\cdots (x_1\, y_1)\text{-ல்}$$

$$= y_1\cdot\sqrt{1+\frac{b^4\, x_1^2}{a^4\, y_1^2}} = \frac{1}{a^2}\cdot\sqrt{a^4y_1^2+b^4x_1^2}$$

$$(x_1\, y_1)\text{-ல் தொடுகோடு}\ \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \qquad \cdots\cdots (1)$$

ஆதியிலிருந்து (1)-க்கு வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$= \text{OK} = p = 1 \bigg/ \sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}} = \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^4y_1^2 + b^4x_1^2}}$$

$$n \times p = b^2\ (\text{மாறிலி})$$

$$\text{எனவே } n \propto \frac{1}{p}$$

பயிற்சிகள் 8(C)

1. $x^7 = a^3y^4$ என்ற வளைகோட்டில், தொடுகோட்டடியின் ஐந்தாவது படியாவது வரைச்செங்கோட்டடியின் இரண்டாம் படிக்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

2. $x^2 - y^2 = a^2$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு P என்னும் புள்ளியில் வரைச்செங்கோட்டு நீளமாவது ஆதியிலிருந்து P-க்கு உள்ள தூரத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

3. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் தொடுகோட்டடி, தொடும் புள்ளியின் x ஆயத் தொலையைப் போல் மாறும் எனவும், வரைச்செங்கோட்டடி, மாருத நீளமுடையது எனவும் நிறுவுக.

4. $y = be^{x/a}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, தொடுகோட்டடி மாருத நீளமுடையது, வரைச்செங்கோட்டடி, தொடும் புள்ளி

யின் y ஆயத் தொலையின் வர்க்கத்தைப் போல் மாறும் எனவும் நிறுவுக.

5. $xy = c^2$ என்ற வளைகோட்டின் எந்தப் புள்ளியிலும் தொடுகோட்டடி x அச்சுத் தொலையைப் போல மாறும் எனவும். வரைச்செங்கோட்டடி, y ஆயத் தொலையின் மூன்றுவது படியைப் போல் மாறும் எனவும், தொடுகோடு. இரு அச்சுக்களிலும் உண்டாக்கும் துண்டங்களின் பெருக்குத் தொகை மாறிலி எனவும் நிறுவுக.

6. ஆதியிலிருந்து தொடுகோட்டுக்கு செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $\left\{y - x\frac{dy}{dx}\right\}\Big/\left[1 + \frac{dy}{dx}\right]^{1/2}$ என நிறுவி $y = \pm\sqrt{a^2 - x^2}$ என்ற வட்டத்துக்கு இம்மதிப்பு மாறிலி யென்றும், $xy = k^2$ என்ற செவ்வக அதிபர வளையத்துக்கு இம்மதிப்பு $2k^2/\sqrt{x^2+y^2}$ என்றும் சரிபார்க்க.

7. $x = a(t+\sin t)$; $y = a(1-\cos t)$ என்ற உருள் வளையில் (cycloid) t என்னும் புள்ளியில், தொடுகோட்டு நீளம், தொடுகோட்டடி, வரைச்செங்கோட்டு நீளம், வரைச்செங்கோட்டடி, ஆகியவற்றைக் காண்க.

8 $x^m y^m = a^{m+n}$ என்ற வளைகோட்டில். ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டடி, அப்புள்ளியின் x ஆயத் தொலைக்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

9. $x^{m+n} = a^{m-n}y^{2n}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, தொடுகோட்டடியின் m படியாவது வரைச்செங்கோட்டடியின் n படிக்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

10. $\beta y^2 = (x+\alpha)^3$ என்ற வளைசோட்டடியின் வர்க்கமாவது, வரைச் செங்கோட்டடிக்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

11. $x = a + b\log[b+\sqrt{b^2-y^2}] - \sqrt{(b^2-y^2)}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டடி, வரைச் செங்கோட்டடி ஆகியவற்றின் கூடுதல் மாறிலி என நிறுவுக.

12. வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியிலிருந்து x அச்சுக்கு செங்குத்துக்கு கோடு வரைந்து பாதத்திலிருந்து புள்ளியில் தொடுகோட்டுக்கு செங்குத்துக்கோடு வரைந்தால் அதன் நீளம் $\frac{y}{\sqrt{1+y_1^2}}$ என நிறுவுக.

13. $x = a\cos t + \log\tan\frac{t}{2}$

$y = a\sin t$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடு x அச்சுக்கும் வளைகோட்டிற்கும் இடையே துண்டாடப்படும் பகுதி மாறாத நீளம் உடையது என நிறுவுக.

14. $y\cosh\frac{x}{a}$ என்ற வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோடு x அச்சுக்கும்,வளைகோட்டிற்கும் இடையே துண்டாடப்படும் பகுதி $\frac{y^2}{a}$ நீளமுடையது என நிறுவுக.

15. $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, (x, y) என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, x அச்சில் x_1 என்ற துண்டையும், y அச்சில் y_1 என்ற துண்டையும் உண்டாக்கினால் $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ என நிறுவுக.

16. $x = \sqrt{c^2 - y^2} + \frac{c}{2}\log\frac{c - \sqrt{c^2 - y^2}}{c + \sqrt{c^2 + y^2}}$ என்ற வளைகோட்டில் வரையப்படும் தொடுகோட்டின் x அச்சிற்கும், தொடும் புள்ளிக்கும் இடையே உள்ள பகுதி மாறிலி என நிறுவுக.

விடைகள் 8 (C)

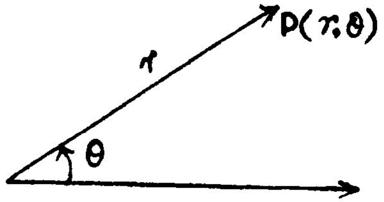
7. $2a\sin\frac{t}{2}$; $a\sin t$; $2a\sin\frac{t}{2}$:

$\tan\frac{t}{2}$; $2a\sin\frac{3t}{2}\sec\frac{t}{2}$.

§ 8·60 கோணதூரக் கூறமைப்பு

தேக்காட்டின் ஆயக் கூறமைப்பில் (Cartesian coordinate system) ஒரு புள்ளியின் நிலையானது y அச்சு x அச்சு ஆகியவற்றிலிருந்து தூரங்களாகக் கூறப்படுகிறது. இதைப் போன்றே ஒரு புள்ளியின் நிலையைக் குறிக்க, கோண தூரக் கூறுகளைக் (Polar coodinates) கொண்ட ஒரு அமைப்பு உண்டு. இந்த அமைப்பில் ஒரு நிலைப்புள்ளியும், அப்புள்ளி வழியே ஒரு நிலையான திசையும் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. ஒரு புள்ளியின் நிலையைக் குறிக்க,

அப்புள்ளிக்கும், நிலைப்புள்ளிக்கும் உள்ள தூரமும், அத்தோடு அப்புள்ளியை நிலைப்புள்ளியோடு இணைக்கும் திசை, நிலைத்திசையோடு கொண்டுள்ள உறவும் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.



படம் 8·6.

படத்தில் O என்பது நிலைப்புள்ளி. OX என்பது நிலைத் திசை. P என்ற புள்ளி தரப்பட்டுள்ளது. OP-ஐ இணைக்கவும். OP $= r$ என்க. $\angle XOP = \theta$ என்க. r என்பது ஆரைத் திசையி (radius vector) என்றும் θ என்பது ஆரைக்கோணம் (vectorial angle) என்றும் அழைக்கப்படும். (r, θ) என்ற கூறுகளால் P-யின் நிலையைக் குறிப்பிடுகிறோம். [0 என்பதை கோண ஆதி அல்லது துருவ ஆதி (pole) என்போம்]. எடுத்துக் காட்டாக, படத்தில்

P-ன் கூறுகள் $\left(3, \frac{\pi}{4}\right)$

Q-ன் கூறுகள் $\left(3, \frac{5\pi}{4}\right)$

P-ன் கூறுகளை $\left(3,\ 2\pi + \frac{\pi}{4}\right)$

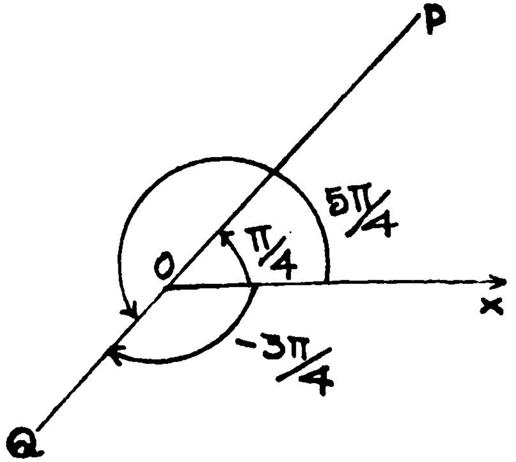
என்றும் குறிப்பிடலாம்.

Q-ன் கூறுகளை $\left(3,\ -\frac{3\pi}{4}\right)$

என்றும் குறிப்பிடலாம்.

ஒரு இயங்குவரை (locus)யில் P (r, θ) என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. (r, θ) என்பன $r = f(\theta)$ என்ற சமன்பாட்டால் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் $r = f(\theta)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு ஆகும். $r = f(\theta)$ என்ற சார்பலன் $y = f(x)$ என்ற சார்பலனைப் போன்றதே. இரண்டுக்கும் வரைபட விளக்கமே வேறுபட்டவை.

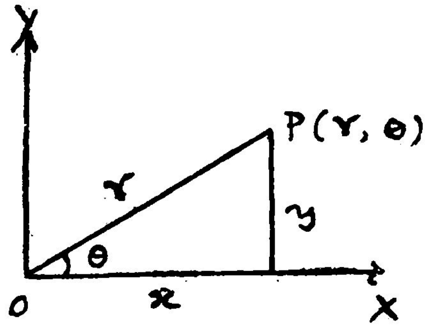
கோண தூர அமைப்பு பற்றிய அடிப்படை மரபுகளைத் தொகுத்துக் கூறுவோம்.



படம் 8·7.

(i) θ என்னும் கோணத்தை இடஞ்சுழியாக அளத்தல் நேர்த் திசை ஆகும்.

(ii) r என்பதை θ கோணத்தின் இரண்டாம் கதிர் (Terminal ray) வழியாக அளக்கும்போது நேர்த்திசையாகக் கருது கிறோம். இத்திசைக்கு நேர் எதிராக அளக்கும்போது எதிர்த் திசையாகக் கருதுகிறோம்.



படம் 8 8.

(iii) (r, θ) என்ற ஒவ்வொரு இரட்டை மதிப்புகளோடும் ஒரே புள்ளிதான் தொடர்பு படுத்தப்படும். ஆனால் ஒரே புள்ளிக்குப் பல கோண தூர கூறுகள் இருக்கலாம். (r, θ) என்

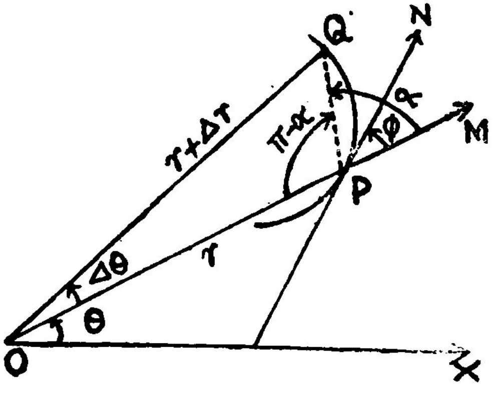
பதும் $(r, 360° + \theta)$ என்பதும் $(r, 720° + \theta)$ என்பதும் ஒரு புள்ளியைக் குறிப்பனவே. பொதுவாக $-\pi < \theta < \pi$ என்ற எல்லைகளில் அமையும், θ மதிப்பை முக்கிய மதிப்பு (Principal value) என்று கருதி அதனையே கோணக் கூறாக எடுத்துக் கொள்வது வழக்கம்.

(iv) தேக்காட்டின் ஆயக் கூறுகளுக்கும் கோண தூர ஆயக் கூறுகளுக்கும் உள்ள உறவு படத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது. $x = r\cos\theta$; $y = r\sin\theta$.

§ 8-61 தொடுகோட்டுக்கும் ஆரைத் திசையிக்கும், இடைப்பட்ட கோணத்தைக் காணல்

$r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(r, \theta)$ $Q(r+\Delta r, \theta+\Delta\theta$ என்பன இரு புள்ளிகள். OP-ஐ இணைத்து, M வரை நீட்டவும் (படம் பார்க்க). TPN என்பது வளைகோட்டிற்கு P-யில் தொடுகோடு என்க. தொடுகோடு, ஆரைத்திசையி, இரண்டுக்கும் இடையே உள்ள கோணம் $\angle MPN = \phi$.

$\angle MPQ = \lambda$ என்க.



படம் 8·9.

எனவே

$\angle QPO = \pi - \lambda$

$\angle POQ = \Delta\theta$ ஆதலால்

$\angle OQP = \pi - (\pi - \lambda + \Delta\theta)$

$= \lambda - \Delta\theta.$

$$\triangle \text{OPQ-ல்} \ \frac{OQ}{OP} = \frac{\sin \angle OPQ}{\sin \angle OQP}$$

$$\frac{r+\Delta r}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \Delta\theta)}$$

$$1 + \frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \Delta\theta)}$$

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \Delta\theta)} - 1$$

$$= \frac{\sin \alpha - \sin(\alpha - \Delta\theta)}{\sin(\alpha - \Delta\theta)}$$

$$= \frac{2\cos\left(\alpha - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\sin\frac{\Delta\theta}{2}}{\sin(\alpha - \Delta\theta)}$$

$$\frac{r}{\Delta r} = \frac{\sin(\alpha - \Delta\theta)}{2\cos\left(\alpha - \frac{\Delta\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}$$

$$r\frac{\Delta\theta}{\Delta r} = \frac{\sin(\alpha - \Delta\theta)}{\cos(\alpha - \frac{1}{2}\Delta\theta)} \cdot \frac{\frac{1}{2}\Delta\theta}{\sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)}$$

வளைகோட்டு வழியே Q, P-ஐ நெருங்க,

$$\Delta\theta \longrightarrow 0$$

$$\Delta r \longrightarrow 0.$$

வெட்டுக்கோடு PQ ⟶ Pயில் தொடுகோடு.

$$\alpha \longrightarrow \phi$$

$$r\frac{\Delta\theta}{\Delta r} \longrightarrow r\frac{d\theta}{dr}$$

$$\frac{\sin(\alpha - \Delta\theta)}{\cos\left(\alpha - \frac{\Delta\theta}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(\sin\frac{\Delta\theta}{2}\right) \Big/ \frac{\Delta\theta}{2}} \longrightarrow \frac{\sin\phi}{\cos\phi} \cdot 1$$

$$\boxed{\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr}}$$

குறிப்பு 1 : $r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் P என்பது ஒரு புள்ளி. OP-ன் நீட்சி (r-ன் நேர்த்திசை) θ அதிகரிக்குமாறு அமையும். தொடுகோட்டின் திசையோடு ஒன்றுவதற்காக எந்தக் கோணத்திற்கு சுழலுமோ அதனை P என்ற புள்ளியில் ϕ என வரையறை செய்கிறோம். θ வளருமாறு அமையும் தொடுகோட்டுத் திசை, தொடு கோட்டிற்கு நேர்த்திசையாகக் கருதப்படுகிறது.

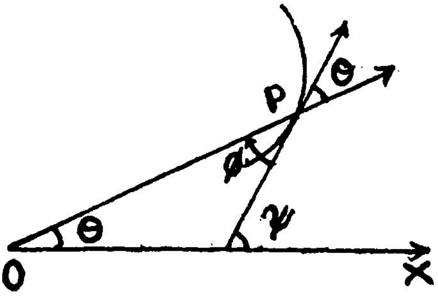
குறிப்பு 2 : $r = f(\theta)$ என $r' = \dfrac{dr}{d\theta} = f'(\theta)$

எனவே $\tan\phi = r\dfrac{d\theta}{dr} = r \Big/ \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r}{r'}$,

$= \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$ எனவும் எழுதலாம்.

குறிப்பு 3 : θ, ϕ, ψ ஆகிய கோணங்களுக்கிடையே

$\psi = \phi + \theta$ என்ற தொடர்பு இருப்பதை அறியவும்.



படம் 8·10.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$r = a e^{\theta \cot \alpha}$ என்ற வளைவரையில் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$r = a e^{\theta \cot \alpha}$ … … (1) எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$\tan \phi = r\dfrac{d\theta}{dr}$ என அறிவோம்.

(1)-ல் log எடுக்க

$$\log r = \log a + \theta \cot \alpha$$

வகையீடு செய்ய

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \cot \alpha.$$

அது $\cot \phi = \cot \alpha.$

$$\therefore \phi = \alpha.$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$\frac{2a}{r} = (1 - \cos \theta)$ என்ற வளைவரைவில் ϕ மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$\frac{2a}{r} = (1 - \cos \theta)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டு உள்ளது ......(1)

log எடுக்க.

$2a - \log r = (1 - \cos \theta)$

வகையீடுசெய்ய,

$$-\frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}.$$

$$\therefore \tan \phi = r \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \frac{1 - \cos \theta}{-\sin \theta}.$$

$$= -\tan \frac{\theta}{2}$$

$$= \tan \left(\pi - \frac{\theta}{2} \right)$$

எனவே

$$\phi = \pi - \frac{\theta}{2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 16:

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டில் (r, θ) என்னும் புள்ளியில் வரைச் செங்கோடு தொடக்கக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் $(n + 1)\,\theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$r^n = a^n \cos n\,\theta$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.
log எடுக்க,

$$n \log r = n \log a + \log \cos n\theta.$$

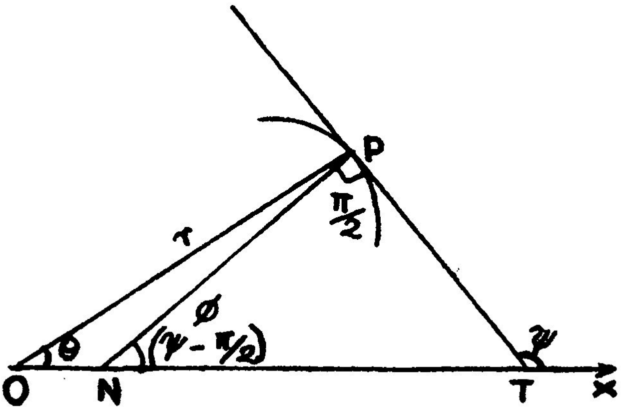
θ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$n \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = - \frac{n \cdot \sin n\theta}{\cos n\theta}$$

$$\tan \phi = r \cdot \frac{d\theta}{dr} = - \cot n\theta\,.$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{2} + n\theta\right)$$

$$\therefore\ \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta\cdot$$



படம் 8·11.

தொடுகோடு, OX உடன் ψ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கினால் வரைச்செங்கோடு OX உடன் உண்டாக்கும் கோணமாவது

$$\psi - \frac{\pi}{2} = \theta + \phi - \frac{\pi}{2}$$

$$= \theta + \frac{\pi}{2} + n\theta \frac{\pi}{2} \left[\because \phi = \frac{\pi}{2} + n\theta. \right]$$

$$= (n + 1)\,\theta.$$

பயிற்சிகள் 8 (D)

1. $r = a\,(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டை ஆரை வெக்டர் வெட்டும் கோணத்தைக் காண்க.

2. ϕ-ன் மதிப்பு காண்க :

(i) $r^m = a^m\ (\cos m\theta - \sin m\theta)$ என்ற வளை கோட்டுக்கு; $\theta = 0$ என்ற மதிப்பில்

(ii) $a\theta = \sqrt{r^2 - a^2} - a \cos^{-1}\left(\frac{a}{r}\right)$ என்ற வளை கோட்டுக்கு.

3. $\sinh n\theta = a$ என்ற வளைகோட்டில் $\tanh n\theta + n \tan\phi = 0$ என நிறுவுக.

4. வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டிற்கும் தொடும் புள்ளியை ஆதியோடு இணைக்கும் ஆரைவெக்டருக்கும் இடையே உள்ள கோணம் ϕ எனில்

$$\tan \phi = \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x + y \frac{dy}{dx}}$$

என நிறுவுக.

5. ஒரு வளைகோட்டில் 0 கோண ஆதி; $P(r, \theta)$, $Q\ (r + \delta r, \theta + \delta\theta)$ என்பன வளைகோட்டுப் புள்ளிகள். ϕ என்பது P-ல் தொடுகோட்டிற்கும் OP-க்கு இடையே உள்ள கோணம் எனில்

$$\cot \angle OQP = \frac{\delta r}{r \sin \delta\theta} + \tan\left(\frac{\delta\theta}{2}\right) \text{ என்றும்}$$

$$\cot \phi = \frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} \text{ என்றும் நிறுவுக.}$$

6. $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ என்ற வளைகோட்டில் (r, θ) என்ற புள்ளியில் தொடுகோடு தொடக்கக் கோட்டுடன் 3θ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குகிறது என நிறுவுக.

7. $r^3 = a^3 \cdot \cos 3\theta$ என்னும் வளைகோட்டில் (r, θ)-ல் வரைச் செங்கோடு தொடக்கக் கோட்டுடன் 4θ கோணத்தை உண்டாக்கும் என நிறுவுக.

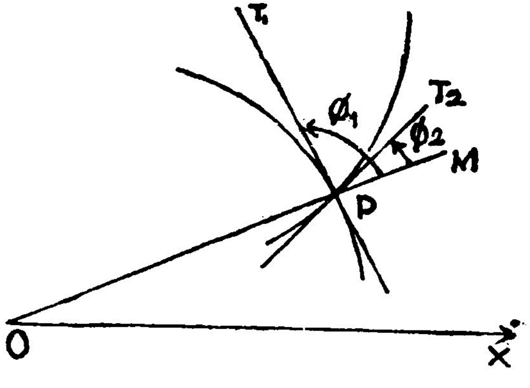
விடைகள் 8(D)

1. $\phi = \theta/2$

2. (i) $\phi = 3\pi/4$ (ii) $\phi = \cos^{-1}(a/r)$.

§ 8-6·2 இருவளைகோடுகளுக்கு இடையே உள்ள கோணம் (கோணதூரக் கூறமைப்பு)

$r = f(\theta)$; $r = g(\theta)$ என்ற வளைகோடுகள் P என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன. M என்பது OP-யின் நீட்சியில் ஒரு புள்ளி PT_1, PT_2 என்பன முதல், இரண்டாவது வளைகோடுகளுக்கு நேர்த்திசையில் தொடுகோடுகள்.



படம் 8·12.

$\angle MPT_1 = \phi_1$;

$\angle MPT_2 = \phi_2$ என்க.

எனவே, இருவளைகோடுகளும் வெட்டும் கோணம்

$\angle T_2PT_1 = \phi_1 - \phi_2$

எனவே,

$$\tan(\phi_1 - \phi_2) = \frac{\tan\phi_1 - \tan\phi_2}{1+\tan\phi_1 \cdot \tan\phi_2} \qquad \ldots\ldots(1)$$

இங்கே $\tan\phi_1$, $\tan\phi_2$ என்பன முறையே முதல், இரண்டாம் வளை கோடுகளுக்கு P என்னும் புள்ளியில் $r\dfrac{d\theta}{dr}$ மதிப்புகள்.

அதாவது, $\tan\phi_1 = \dfrac{f(\theta)}{f'(\theta)}$; [p என்னும் புள்ளியில்]

$\tan\phi_2 = \dfrac{g(\theta)}{g'(\theta)}$; [P என்னும் புள்ளியில்]

எனவே, (1) என்னும் சமன்பாட்டிலிருந்து, வெட்டும் கோணம் $\phi_1 - \phi_2$ கணக்கிடலாம்.

கிளை : இரு வளைகோடுகள் குத்தாக வெட்டினுல்

$$\phi_1 - \phi_2 = \frac{\pi}{2}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 17 :

வெட்டும் கோணம் காண்க :

$r = a(1+\cos\theta)$

$r = a(1-\cos\theta)$

தீர்வு :

$r = a(1-\cos\theta)$

$r = a(1+\cos\theta)$ என்ற வளைகோடுகள் தரப்பட்டு உள்ளன.

எனவே இவற்றிலிருந்து

$$\tan\phi_1 = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)} = \frac{a(1-\cos\theta)}{a\sin\theta}$$

$$= \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \phi_1 = \frac{\theta}{2}$$

$$\tan \phi_2 = \frac{a(1 + \cos\theta)}{-a\sin\theta}$$

$$= -\cot\frac{\theta}{2}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \phi_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}$$

ஆகவே

$$\text{வெட்டும் கோணம்} = \phi_2 - \phi_1 = \frac{\pi}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$r = a(1+\cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் துருவ ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட நாண், வளைகோட்டை, P, Q-ல் சந்திக்கிறது. P, Q-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோடுகள், செங்குத்தாகச் சந்திக்கின்றன என நிறுவுக.

தீர்வு :

$r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது

PQ என்பது கோண ஆதிவழியே செல்லும் நாண் என்க.

P, Q-ல் ஆரை வெக்டர்கள் உண்டாக்கும் கோணங்கள் முறையே, θ, $\theta + \pi$ என்க. மேலும் இப்புள்ளிகளில் ϕ-ன் மதிப்புகள் முறையே ϕ_1, ϕ_2 என்க.

எனவே, (1)-லிருந்து $\dfrac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta$.

$$\therefore \quad r\frac{d\theta}{dr} = a(1 + \cos\theta)\frac{-1}{a\sin\theta} = -\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \tan\phi_1 = -\cot . \tfrac{1}{2}\theta = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\theta\right)$$

$$\therefore \quad \phi_1 = \tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\theta.$$

$$\tan\phi_2 = -\cot\left(\frac{\theta + \pi}{2}\right) = \tan\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \phi_2 = \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \quad \text{தேவையான கோணம்} = \phi_1 \sim \phi_2$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

பயிற்சிகள் 8(E)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு வெட்டும் கோணங்கள் காண்க :

(a) $r = a\cos\theta$

$2r = a$

(b) $r^2 = 16\sin 2\theta$

$r^2 \sin 2\theta = 4$

(c) $r(1+\cos\theta) = a$

$r(1-\cos\theta) = b$

(d) $r = 2a\sin\theta$

$r = 2a\cos\theta$

(e) $r^2 = a^2 \operatorname{cosec} 2\theta$

$r^2 = b^2 \sec 2\theta$

(f) $r^2 = a^2\cos 2\theta$

$r^2 = a(1+\cos\theta)$

2. $r^n = a^n \sec(n\theta+\alpha)$, $r^n = b^n(\sec n\theta+\beta)$ என்ற வளை கோடுகள் வெட்டும் கோணம் a, b-ஐச் சார்ந்ததல்ல என நிறுவுக. மற்றும்,

3. $r^n = a^n \sec(n\theta+30°)$, $r^n = b^n(\sec n\theta+45°)$ என்ற வளைகோடுகள் 15° கோணத்தில் வெட்டும் என நிறுவுக.

4. பின்வரும் வளைகோடுகள் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றன என நிறுவுக.

(i) $r = 2\sin\theta$

$r = 2\cos\theta$

(ii) $r^n = a^n\cos n\theta$

$r^n = b^n\sin n\theta$

(iii) $r^2\cos(2\theta-\alpha) = a^2\sin 2\alpha$

$r^2 = 2a^2\sin(2\theta+\alpha)$

(iv) $r\theta = a$

$r = a\theta$

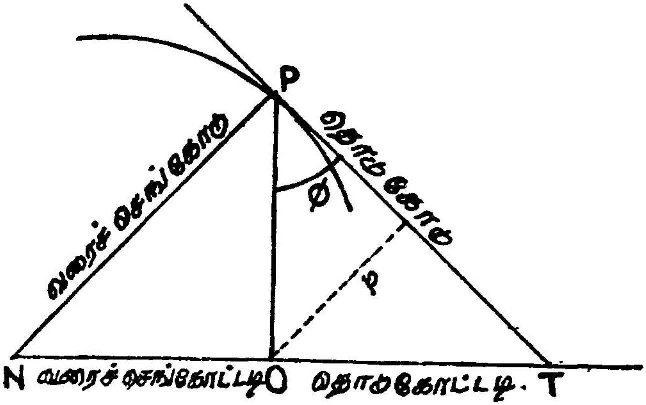
விடைகள் 8(E)

1. (a) $\frac{\pi}{3}$ (b) $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$ (c) $\frac{\pi}{2}$

(d) $\frac{\pi}{2}$ (e) $\frac{\pi}{2}$ (f) $3 \sin^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}$

§ 8-63. தொடுகோட்டடி, வரைச்செங்கோட்டடி முதலியன : (கோணதூர அமைப்பில்)

P(r, θ) என்பது $r = f(\theta)$ என்னும் வளைகோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி O வழியே OP-க்கு செங்குத்தாக வரையும் கோடு P-ல்



படம் 8·13.

தொடுகோட்டையும், P-ல் வரைச் செங்கோட்டையும் T, N புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றது. OT, ON. PT, PN என்பன முறையே (கோணதூர) தொடுகோட்டடி, வரைச் செங்கோட்டடி, தொடு கோட்டு நீளம், வரைச் செங்கோட்டு நீளம் என அழைக்கப்படும். $\angle OPT = \phi$; $\angle OPN = 90-\phi$.

O-விலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு OM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரைக.

தொடுகோட்டடி

$$= OT = OP \tan\phi = r\tan\phi.$$

$$= r\left(r\frac{d\theta}{dr}\right) = r^2\frac{d\theta}{dr}$$

$$\text{தொடுகோட்டடி} = r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

வரைச்செங்கோட்டடி

$$= ON = OP \tan (90-\phi)$$

$$= r \cot \phi = r \frac{1}{r} \cdot \frac{dr}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta}$$

$$\therefore \quad \text{வரைச்செங்கோட்டடி} = \frac{dr}{d\theta}$$

தொடுகோட்டு நீளம் $= PT = r \sec \phi$.

$$= r \sqrt{1 + \tan^2 \phi}$$

$$= r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$\text{தொடுகோட்டு நீளம்} = r \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

வரைச்செங்கோட்டு நீளம் $= PN = r \operatorname{cosec} \phi$.

$$= r \sqrt{1 + \cot^2 \phi}$$

$$= r \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \text{வரைச்செங்கோட்டு நீளம்} = r \sqrt{1 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

குறிப்பு :

ஆதியிலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $= ON = P = r \sin \phi$.

எனவே

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi$$

$$= \frac{1}{r^2}(1 + \text{oot } r^2\,\phi)$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\left[1 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]}$$

மற்றும்

$r = \frac{1}{u}$ எனக் கொண்டால்

$$\frac{dr}{a\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{p^2} = u^2 + \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 19:

$r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டின் கோணதூர வரைச் செங்கோட்டியின் மறுமுனையின் நியமப்பாதை $r = f'\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)$ என நிறுவுக. இதன் மூலம் $r = a\,e^{n\theta}$ என்ற சமகோணச் சுருளின் கோணதூர வரைச் செங்கோட்டடியின் மறுமுனையின் நியமப்பாதையும் ஒரு சமகோணச் சுருளியே என நிறுவுக.

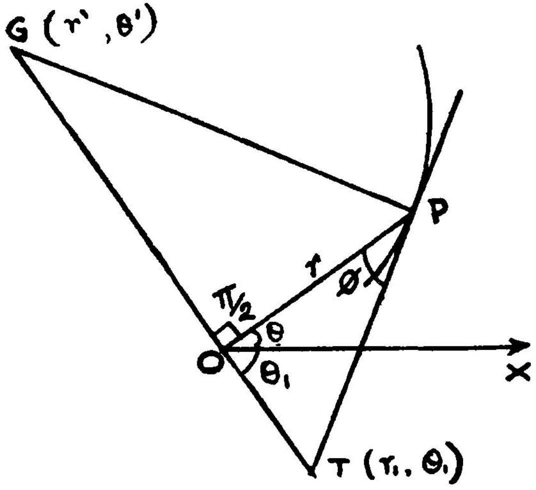
தீர்வு :

$r = f(\theta)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டு உள்ளது.

முதல்பகுதி :

G-ன் ஆயத்தொலைகள் (r', θ') என்க. ஆகவே $r' = OG$.
= கோண தூர வரைச் செங்கோட்டடி

$$= \frac{dr}{d\theta} = f'(\theta) \ldots\ldots (1)$$



படம் 8·14.

மேலும்

$$\theta' = \angle GOX = \frac{\pi}{2} + \theta$$

$$\therefore \quad \theta = \theta' - \frac{\pi}{2} \qquad \ldots\ldots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து θ-ஐ நீக்கம் செய்ய,
r'. θ'-ல் ஒரு தொடர்பு கிடைக்கிறது.

$$r' = f'\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)$$

(r', θ')-ன் நியமப்பாதை $r = f'\left(\theta' - \frac{\pi}{2}\right)$

இரண்டாம் பகுதி :

$$r = ae^{n\theta}.$$

(அது) $\dfrac{dr}{d\theta} = a\,n\,e^{n\theta}.$

தேவையான நியமப்பாதை $r = f'\left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$(\text{அது})\ r = a\,n\,e^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)n}$$

$$= a\,n\,e^{-\frac{\pi}{2}n}\,e^{n\theta}.$$

$$= b\,e^{n\theta}.$$

எனவும் ஒரு சமகோணச் சுருளியே ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 20

$r\,\theta = a$ என்ற வளைகோட்டிற்கு கோணதூர அமைப்பில் தொடுகோட்டடியும் வரைச் செங்கோட்டடியும் காண்க.

தீர்வு :

தொடுகோட்டடி $= r^2 \dfrac{d\theta}{dr}$;

வரைச் செங்கோட்டடி $= \dfrac{dr}{d\theta}$.

$r\,\theta = a$ ஆதலால்

$\log r + \log \theta = \log a.$

θ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta} + \frac{1}{\theta} = 0$$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = -\frac{r}{\theta}$$

$\therefore$ தொடுகோட்டடி $= r^2 \dfrac{d\theta}{dr} = r^2\left(-\dfrac{\theta}{r}\right) = -r\,\theta = -a$

தொடுகோட்டடி (அளவில்) $= a$

(அளவில்) வரைச் செங்கோட்டடி $= \dfrac{dr}{d\theta} = \dfrac{r}{\theta}$

$$= \frac{r}{a/r} = r^2/a$$

பயிற்சிகள் 8 (F)

1. $r = a^{\theta}$ என்ற வளைகோட்டின் கோணதூர தொடு கோட்டடியும், வரைச் செங்கோட்டடியும் காண்க.

2. $r = a e^{\theta \cot \alpha}$ என்ற வளைகோட்டிற்குக் கோணதூர அமைப்பில் தொடு கோட்டடியும் வரைச் செங்கோட்டடியும் காண்க.

3. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குக் கோணதூர அமைப்பில் தொடுகோட்டடி காண்க.

(i) $r = a(1 + \cos\theta)$

(ii) $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$

(iii) $\frac{2a}{r} = (1 - \cos\theta)$

4. வரைச் செங்கோட்டடி காண்க.

$r^2 = a^2 \sin 2\theta$.

5. $r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டிற்குத் தொடு கோட்டடி $2a \sin^2\frac{\theta}{2}\tan\frac{\theta}{2}$ எனவும் $\theta = \frac{\pi}{3}$ என்ற புள்ளியில் அதன் மதிப்பு $\frac{a}{2\sqrt{3}}$ எனவும் நிறுவுக.

6. $r = a\theta$ என்ற வளைகோட்டுக்கு கோணதூர வரைச் செங் கோட்டடியும், $r\theta = a$ என்ற வளைகோட்டுக்கு தொடுகோட்டடியும் மாறிலி என நிறுவுக.

7. பின் வரும் வளை கோடுகளுக்குக் கோணதூர தொடு கோட்டடியின் மறு முனையின் நியமப் பாதை காண்க.

(a) $r = a \operatorname{cosec}\theta$.

(b) $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$

(c) $\frac{l}{r} = f(\theta)$

8. $r\left\{m+n\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right\}=1+\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ என்ற வளைகோட்டின் கோண தூர தொடுகோட்டடியின் மறுமுனையின் நியமப்பாதை ஒரு நெஞ்சு வளை (cardioid) ஆக இருக்கும் என நிறுவுக.

விடைகள் 8 (F)

1. $\frac{r^2}{a}$, a

2. $r\tan\lambda$, $r\cot\lambda$

3. (i) $2a\cos^2\frac{\theta}{2}\ \operatorname{cosec}\frac{\theta}{2}$

(ii) $\frac{l}{e}\operatorname{cosec}\theta$

(iii) $2a\operatorname{cosec}\theta$

4. $(a\cos 2\theta)/\sqrt{\sin 2\theta}$

7. (a) $r=\frac{a}{2}\sec 2\theta$

(b) $er=l\sec\theta$

(c) $\frac{l}{r}+f'\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=0.$

எடுத்துக்காட்டு 21 :

கோண ஆதியிலிருந்து $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோட்டிற்கு வரைந்த செங்கோட்டின் நீளம் காண்க.

தீர்வு ;

$$\frac{l}{r}=1+e\cos\theta \text{ எனத் தரப்பட்டுள்ளது}$$

லாகிருதம் எடுக்க

$$\log l-\log r=\log(1+e\cos\theta)$$

வகையிடல் செய்ய (θ-ஐப் பொறுத்தது)

$$-\frac{1}{r}\frac{dz}{d\theta} = -\frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$$\therefore \quad \cot\phi = \frac{e\sin\theta}{1+e\cos\theta}$$

$p = r\sin\phi$ ஆதலால் $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi$

ஆனால் $\operatorname{cosec}^2\phi = 1+\cot^2\phi$

$$= 1+\frac{e^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1+e\cos^2\theta + 2e\cos\theta + e^2\sin^2\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$= \frac{1+e^2+2e\cos\theta}{(l/r)^2}$$

$$= \frac{r^2}{l^2}[1+e^2+2e\cos\theta]$$

$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ ஆதலால் $e\cos\theta = \frac{l}{r}-1$

எனவே $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2}\operatorname{cosec}^2\phi$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\frac{r^2}{l^2}\cdot\left[1+e^2+2\left(\frac{l}{r}-1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{l^2}\left[\frac{2l}{r}+e^2-1\right]$$

இதிலிருந்து p காணலாம்.

பயிற்சிகள் 8(G)

கோண ஆதியிலிருந்து பின்வரும் வளைகோடுகளின் தொடு கோடுகளுக்கு வரைந்த செங்கோடுகளின் நீளங்கள் காண்க.

1. $r = a(1-\cos\theta)$

2. $\frac{2a}{r} = 1-\cos\theta$

3. $r\cos\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\theta\right) = \sqrt{a^2-b^2}$

விடைகள் 8(G)

1. $2a \sin^3 \frac{\theta}{2}$

2. $a \operatorname{cosec} \frac{\theta}{2}$

3. $\frac{a^2 r^2}{b^2 + r^2}$

§ 8-7 பாதச் சமன்பாடு :

வளைகோட்டில் $P(r, \theta)$ என்பது ஒரு புள்ளி. O-ல் இருந்து P-ல் தொடுகோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு $OM = p$ ஆகும். p, r இரண்டுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை வளை கோட்டின் (p, r) சமன்பாடு என்கிறோம். இந்தச் சமன் பாட்டையே பாதச் சமன்பாடு (Pedal equation) என்கிறோம்.

(i) வளைகோட்டின் டேகோர்ட் சமன்பாட்டிலிருந்து பாதச் சமன்பாடு (Pedal Equation) காணல் :

$$y = f(x) \qquad \ldots (1)$$

என்ற வளைகோட்டில் $P(x, y)$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. அப்புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x) \qquad \ldots (2)$$

ஆதியிலிருந்து p என்பது (2)-ன் மேல் வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் எனில்

$$p = \left| \left(x\frac{dy}{dx} - y \right) \right| \Big/ \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right\}} \qquad \ldots (3)$$

மேலும்

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad \ldots (4)$$

(1), (3), (4) ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y நீக்கம் செய்தால் வளைகோட்டின் பாதச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

(ii) வளைகோட்டின் கோணதூரச் சமன்பாட்டிலிருந்து பாதச்சமன்பாடு காணல்.

$$r = f(\theta) \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு.

p என்பது வளைகோட்டில் (r, θ) என்ற புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டிற்கு ஆதியில் இருந்து செங்குத்துக்கோட்டு நீளம் எனில்

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து θ நீக்கம் செய்தால் பாதச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

குறிப்பு :

சில சமயங்களில்,

$$r = f(\theta)$$

$$\tan\phi = a\,\frac{d\theta}{dr}$$

$$p = r\sin\phi.$$

என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து θ, ϕ நீக்கம் செய்து, பாதச் சமன்பாட்டை எளிதில் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு பாதச் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots (1)$$

என்ற வளைகோட்டிற்கு $(a\cos\theta, b\sin\theta)$-ல் தொடுகோடு

$$\frac{x(a\cos\theta)}{a^2} + \frac{y(b\sin\theta)}{b^2} = 1 \qquad \ldots (2)$$

(அது) $\dfrac{x\cos\theta}{a} + \dfrac{y\sin\theta}{b} = 1$ ... (2)

(0, 0)-லிருந்து இத்தொடுகோட்டிற்கு வரைந்த செங்கோட்டின் நீளம் p என்க.

$$p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\cos\theta}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sin\theta}{b}\right)^2}}$$

அதாவது $\dfrac{1}{p^2} + \dfrac{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}{a^2b^2}$ ... (3)

மேலும் $r^2 = x^2 + y^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta.$

$$= a^2(1-\sin^2\theta) + b^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= (a^2+b^2) - \frac{a^2b^2}{p^2} \quad \text{... (3) மூலம்}$$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}$$

$$\therefore \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2b^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

$r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோட்டின் பாதச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$r^m = a^m \cos m\theta$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

$$r^m = a^m \cos m\theta.$$

log எடுக்க

$$m\log r = m\log a + \log\cos m\theta$$

வகையீடு செய்ய,

$$\frac{m}{r}\frac{dr}{d\theta} = -m\frac{\sin m\theta}{\cos m\theta}$$

(அது) $\cot\phi = -\tan m\theta$

$$= \cot\left(\frac{\pi}{2} + m\theta\right)$$

$$\therefore \phi = \frac{\pi}{2} + m\,\theta \qquad \ldots (1)$$

$$p = r \sin\phi = r\sin\left(\frac{\pi}{2} + m\,\theta\right)$$

$$= r \cos m\,\theta. \qquad \ldots (2)$$

$$r^m = a^m \cos m\,\theta. \qquad \ldots (3)$$

(2), (3) லிருந்து θ ஐ நீக்கம் செய்ய,

$$p = r.\frac{r^m}{a^m} \text{ (அ.து) } a^m p = r^{m+1}$$

$$a^m p = r^{m+1}$$

இதுவே தேவையான பாதச் சமன்பாடு.

பயிற்சிகள் 8 (H)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குப் பாதச் சமன்பாடு காண்க.

(a) $x^2 - y^2 = a^2$

(b) $x^2 + y^2 = 2\,ax$

(c) $y^2 = 4\,ax$

(d) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

(e) $y^2 = 4\,a\,(x + a)$

(f) $x = a\cos^3 t$
$y = a \sin 3t$

2. $c^2(x^2+y^2) = x^2\,y^2$ என்ற வளைகோட்டின் பாதச்சமன்பாடு $\frac{1}{p^2} + \frac{3}{r^2} = \frac{1}{c^2}$ என நிறுவுக.

3. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குப் பாதச் சமன்பாடு காண்க.

(a) $r = a\,\theta.$

(b) $r = a\,e^{\theta \cot \lambda}$

(c) $r = a\,(1 - \cos\theta)$

(d) $r^2 = a^2 \cos 2\,\theta.$

(e) $\frac{l}{r} = (1 + e \cos \theta)$

(f) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$

(g) $r^n = a^n \sin n\theta$.

4. $r = a \operatorname{sech} n\theta$ என்ற சுருளின் பாதச்சமன்பாடு $\frac{1}{p^2} = \frac{A}{r^2} + B$ என்ற அமைப்பில் இருக்கும் என நிறுவுக. (A, B மாறிலிகள்

விடைகள் 8 (H)

1. (a) $pr = a^2$ (b) $r^2 = 2ap$

(c) $p^2 = ar$ (d) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{r^2}{a^2 b^2}$

(e) $p^2 = ar$ (f) $r^2 = a^2 - 3p^2$

2. (a) $p^2 (a^2 + r^2) = r^4$ (b) $p = r \sin \lambda$

(c) $2ap = r^3$ (d) $r^3 = a^2 p$

(e) $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{l^2}\left[\frac{2l}{r} - 1 + e^2\right]$ (f) $p^2 = ar$

(g) $pa^n = r^{n+1}$

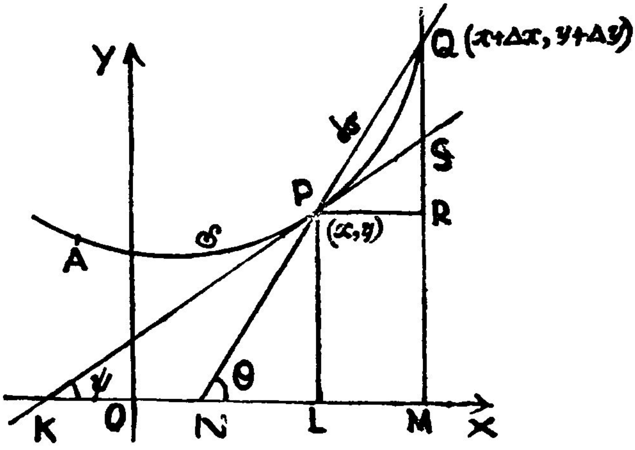
§ 8-8 $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில், A என்னும் நிலைப்புள்ளியிலிருந்து P (x, y) என்ற புள்ளிக்கு வளைகோட்டு வழியே உள்ள தூரம் s எனில் $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ என நிறுவுதல்.

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் P (x, y), Q $(x+\delta x, y+\delta y)$ என்பன அணுக்கமான இரு புள்ளிகள்.

x அச்சுக்கு PL, QM என்ற செங்குத்துக் கோடுகளும் MQ-க்கு PR என்ற செங்குத்துக் கோடும் வரைக.

P-ல் தொடுகோடு x அச்சை T-ல் ψ என்ற கோணத்தில் சந்திக்கிறது. QP, x அச்சை O என்ற கோணத்தில் சந்திக்கிறது.

A என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து தூரங்கள் வளைகோட்டு வழியே அளக்கப்படுகின்றன.



படம் 8·15.

வில் AP $= s$; வில் AQ $= s + \delta s$ என்க.

எனவே வில் PQ $= \delta s$.

மேலும் நாண் PQ $= \delta c$ எனக் கொள்க.

Q $\longrightarrow$ P எனில்

வில் PQ $\longrightarrow$ நாண் PQ என அறிவோம் ... ... (1)

இனி, செங்கோண முக்கோணம் PQR-ல்

$$PR = \delta x.$$

$$RQ = \delta y.$$

PQ $= \delta c$ ஆதலால்

$$(\delta c)^2 = (\delta x)^2 + (\delta y)^2 \quad \text{... ... ...} \quad (2)$$

(2) என்ற சமன்பாட்டின் இருபுறமும் $(\delta x)^2$-ஆல் வகுக்க,

$$\left(\frac{\delta c}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$$

அல்லது $\left(\frac{\delta c}{\delta s}\right)^2\left(\frac{\delta s}{\delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\delta y}{\delta x}\right)^2$ ... ... (3)

வளைகோட்டு வழியே Q ⟶ P எனில்

$\delta x \longrightarrow 0;$ (1) மூலம் $\frac{\delta c}{\delta s} \longrightarrow 1.$

∴ எனவே எல்லை மதிப்பில் (3) என்பது.

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\boxed{\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

குறிப்பு :

$$\frac{ds}{dy} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dy}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dy}.$$

$$\boxed{\frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}}$$

குறிப்பு 2 :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \sqrt{1+\left(\frac{dr}{dx}\right)^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dx}{ct}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}$$

குறிப்பு :

$$\sin\psi = \frac{1}{\operatorname{cosec}\psi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{ds}{dx}} = \frac{dy}{ds}$$

$$\boxed{\sin\psi = \frac{dy}{ds}}$$

குறிப்பு 4 ;

$$\cos\psi = \frac{1}{\sec\psi}$$

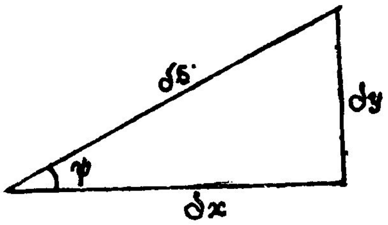
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\psi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

$$= \frac{dx}{ds}$$

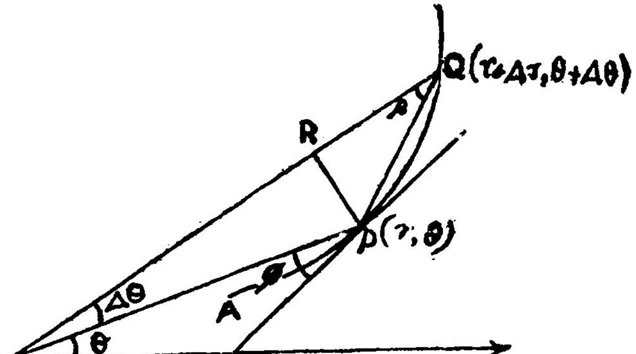
எனவே $$\boxed{\cos\psi = \frac{dx}{ds}}$$

குறிப்பு 5 : மேற்கூறிய முடிவுகளை எளிதில் நினைவுகூற பக்கத்தில் தந்துள்ள புனைவுப்படம் உதவும்.



படம் 8·16.

§ 8-9. $r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் A என்னும் நிலைப்புள்ளியிலிருந்து $P(r, \theta)$ என்ற புள்ளிக்கு வளைகோட்டு வழியே உள்ள தூரம் s எனில் $\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}$ என நிறுவுதல்.



படம் 8.17.

$r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் $P(r, \theta)$, $Q(r+\delta r, \theta+\delta\theta)$ என்பன அணுக்கமான இரு புள்ளிகள்.

OP, OQ ஆகியவற்றை இணைக்கவும். OQ க்குச் செங்குத்தாக PR வரை. OP என்ற ஆரை வெக்டருக்கும், P-ல் தொடுகோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் ϕ; $\angle PQR = \beta$ என்க.

A என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து, தூரங்கள் வளைகோட்டு வழியே அளக்கப்படுகின்றன.

வில் AP = s.

வில் AQ = $s + \delta s$

எனவே வில் PQ = δs.

மேலும் நாண் PQ = δc என்க.

$$Q \longrightarrow P \text{ எனில்}$$

வில் PQ $\longrightarrow$ நாண் PQ என அறிவோம் ... (1)

இனி செங்கோண முக்கோணம் PQR-ல்

$$PR = r \sin \delta\theta$$

$$RQ = OQ - OR$$

$$= (r + \delta r) - r \cos \delta\theta$$

$$= r(1 - \cos \delta\theta) + \delta r$$

$$= 2r \sin^2 \frac{\delta\theta}{2} + \delta r$$

$$PQ^2 = PR^2 + RQ^2$$

$$= r^2 \sin^2 \delta\theta + \left(2r \sin^2 \frac{\delta\theta}{2} + \delta r\right)^2 \quad \ldots\ldots(2)$$

சமன்பாடு (2)ஐ இருபுறமும் $(\delta\theta)^2$ ஆல் வகுக்க,

$$\left(\frac{PQ}{\delta\theta}\right)^2 = r^2 \left(\frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta}\right)^2 + \left[r \sin \frac{\delta\theta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}} + \frac{\delta r}{\delta\theta}\right]^2$$

$$\left(\frac{\delta c}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{\delta\theta}\right)^2 = r^2 \left(\frac{\sin \delta\theta}{\delta\theta}\right)^2 + \left[r \sin \frac{\delta\theta}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\delta\theta}{2}}{\frac{\delta\theta}{2}} + \frac{\delta r}{\delta\theta}\right]^2 \quad \ldots (3)$$

வளைகோட்டு வழியே Q $\longrightarrow$ P எனில் $\delta\theta \longrightarrow 0$

$$\frac{\delta c}{\delta s} \longrightarrow 1$$

இதனால் (3) என்பது

$$\left(\frac{ds}{d\theta}\right)^2 = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$

எனவே

$$\boxed{\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}$$

குறிப்பு : 1

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$\boxed{\frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + \left(r\frac{d\theta}{dr}\right)^2}}$$

குறிப்பு 2 :

$$\sin\phi = \frac{1}{\operatorname{cosec}\phi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{1}{\left(r\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2}}}$$

$$= \frac{r\dfrac{d\theta}{dr}}{\sqrt{\left(r\dfrac{d\theta}{dr}\right)^2 + 1}}$$

$$= \frac{r\frac{d\theta}{dr}}{\frac{ds}{dr}} = r\frac{d\theta}{ds}$$

$$\therefore \boxed{\sin\phi = r\frac{d\theta}{ds}}$$

குறிப்பு 3 :

$$\cos\phi = \frac{1}{\sec\phi}$$

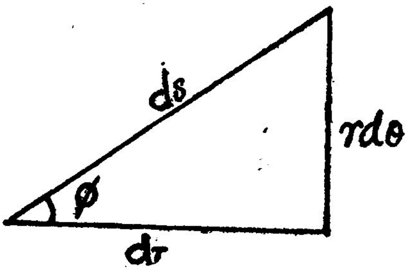
$$= \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}}$$

$$= \frac{dr}{ds}$$

$$\therefore \boxed{\cos\phi = \frac{dr}{ds}}$$

குறிப்பு 4 :



படம் 8·18.

மேற்கூறிய முடிவுகளை எளிதில் நினைவுகூற பக்கத்தில் தந்துள்ள புனைவுப் படம் உதவும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 24 :

$x = a(\theta + \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளைக்கு $\dfrac{ds}{d\theta}$ காண்க.

தீர்வு :

$x = a(\theta+\sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1+\cos\theta) = 2a\cos^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta = 2a\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

ஆகையால் $$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2\cos^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\sin^2\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{\theta}}$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 25 :

$r = ae^{\theta\cot\alpha}$ என்ற சமகோணச் சுருளிக்கு $\dfrac{ds}{d\theta} = r\operatorname{cosec}\alpha$ என நிறுவுக. ஆதியிலிருந்து s அளக்கப்பட்டால் $\dfrac{s}{r}$ மாறிலி என நிறுவுக.

தீர்வு :

$r = ae^{\theta\cot\alpha}$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

$$\frac{dr}{d\theta} = ae^{\theta\cot\alpha}\cdot\cot\alpha = r\cot\alpha \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\therefore \frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{r^2 + r^2 \cot^2 \alpha}$$

$$= r \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\therefore \frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dr} = \frac{r \operatorname{cosec} \alpha}{r \cot \alpha}$$

$$= \sec \alpha \qquad \ldots \ldots \ldots (1)\text{-ன் மூலம்}$$

எனவே $\frac{ds}{dr}$ = c (மாறிலி) என்க.

ஆகையால் $s = cr +$ மாறிலி என்ற அமைப்பு இருந்திருக்க வேண்டும்.

அதாவது $\frac{s}{r}$ = மாறிலி

பயிற்சிகள் 8 (I)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு $\frac{ds}{dx}$ காண்க.

(a) $ay^2 = x^3$

(b) $y = \frac{c}{2\left(e^{\frac{x}{c}} + e^{\frac{-x}{c}}\right)}$

(c) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$

2. $y^2 = 4\,ax$ என்ற பரவளையத்திற்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{\frac{a + x}{x}}$ என நிறுவுக.

3. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ என்ற நீள் வளையத்திற்கு $\frac{ds}{dt} = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t}$ என நிறுவுக.

4. $y = a \log \sec \left(\frac{x}{a}\right)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\frac{ds}{dx}$, $\frac{ds}{-}$ கண்டுபிடித்து, $x = a\,\psi$ என நிறுவுக. மேலும், $\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{2a}\sin\left(\frac{2x}{a}\right)$ என நிறுவுக.

5. $r = \log \sin 3\theta$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $\frac{d^2s}{d\theta^2} = r^2 + 9\cot^2 3\theta$ என நிறுவுக.

6. பின் வரும் வளைகோடுகளுக்கு $\frac{ds}{dr}$ காண்க :

(i) $r\theta = a$. (ii) $\theta = \cos^{-1}(r/k) - (\sqrt{k^2 - r^2})/r$

7. எந்த வளைகோட்டிலும்

(i) $p = r^2 \frac{d\theta}{ds}$ என்றும்

(ii) $\sqrt{r^2 - p^2} = r\frac{dr}{ds}$ என்றும்

நிறுவுக.

8. $r^n = a^n \cos n\theta$ எனில்

(i) $\frac{ds}{d\theta} = a\ (\sec n\theta)^{\frac{n-1}{n}}$ என்றும்

(ii) $a^{2n}\frac{d^2r}{ds^2} + n \cdot r^{2n-1} = 0$ என்றும்

நிறுவுக.

9. $y = c^2 + s^2$ என்ற வளைகோட்டில் ஒரு தொடுகோட்டின் மீது தொடுகோட்டின் நிலைத்தூரப்பாதத்திலிருந்து வரையப் படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் மாறிலி என நிறுவுக.

விடைகள்: 8 (I)

1. (a) $\sqrt{1 + \frac{9x}{4a}}$

(b) $\frac{1}{2}(e^{x/c} + e^{-x/c})$

(c) $\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}$

6. (i) $\frac{(r^2 + a^2)^{1/2}}{r}$ (ii) $\frac{k}{r}$

9. பகுதி வகைக்கெழு காணல்

§ 9·0·0. பல மாறிகளின் சார்பலன்கள்

x, y தளத்தில் உள்ள (x, y) என்ற ஒவ்வொரு புள்ளியோடும் y என்ற மெய் எண்ணைத் தொடர்பு படுத்தும் $z = f(x, y)$ என்ற கோவையை x, y என்ற இரு தனித்த மாறிகளின் சார்பலனாக z அமைந்துள்ளது எனக் கூறுவோம். x, y என்ற மாறிகளுக்குத் தனித்தனியே தரும் மதிப்புகளைப் பொறுத்து z-ன் மதிப்பு உள்ளது z-ன் மதிப்பைப் பெறுவதற்கு x, y இரண்டுக்குமே ஒரே சமயத்தில் மதிப்பைத் தரவேண்டும். x, y, z என்ற மூன்று மாறிலிகளுக்கும் இடையே உள்ள தொடர்பை மூன்று அச்சுகள் உடைய கார்ட்டிசியன் ஆயத்தொலை அமைப்பில் x, y, z மதிப்புகளைப் புள்ளிகளோடு குறிப்பதன் மூலம் பெறலாம். இவ்விதமாகக் கிடைப்பது ஒரு வளைபரப்பு (Surface) ஆகும்.

குறிப்பிட்ட அரங்கத்தில் (Domain) x, y என்ற ஒவ்வொரு ஜோடி மதிப்புகளுக்கும் z ஒரே மதிப்பாகத் தீர்மானமானல் z-ஐ x, y-ன் தனிமதிப்புச் சார்பலன் (Single valued function) எனக் கூறுகிறோம். எடுத்துக்காட்டாக $z = x+y$; இங்கே x, y என்பன x, y தளத்தை அரங்கமாகக் கொண்டுள்ளது. மற்றும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு.

$z = \sqrt{1-x^2-y^2}$; இங்கே x, y-ன் அரங்கம் $x^2+y^2 = 1$ என்ற வட்டத்தின் உட்புறமும் மேலும் ஆகும்.

இப்போது $z = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ என்ற கோவையைக் கருதுக. x, y என்ற இணைமதிப்புகள் z-ன் மதிப்பை ஒரே மதிப்பாகத் தீர்மானம் செய்வதில்லை. இங்கே கோவைக்குக் கிடைக்கக் கூடிய பலமதிப்புகளில் எவற்றைப் பயன்படுத்தப் போகிறோம் என்று குறிப்பிட வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக $-\frac{\pi}{2}$-க்கும் $+\frac{\pi}{2}$-க்குமிடையே அமைந்துள்ள $\tan^{-1}\frac{y}{x}$-ன் மதிப்புகளைச் சார்பலனுக்கு எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும் எனக் குறிப்பிடலாம். இவ்வாறன்றி $\frac{\pi}{2}$-க்கும் $\frac{3\pi}{2}$-க்கும் இடையில் அமையும் மதிப்புக்களையோ வேறு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்களையோ சார்பலனுக்கு ஏற்ற மதிப்புக்களாக அமைத்துக் கொள்ளலாம். இத்தகைய கோவைகளை ஒரு சார்பலனின் பல தனிமதிப்புடைய கிளைகளாகக் கருதலாம். இவ்வாறன்றி கிளைகளுக்குள் பாகுபாடு செய்யாதவாறு தொகுத்துக் கருதுவதானால் இத்தகைய சார்பலன்களைப் பல் மதிப்புச் சார்பலன்கள் (Multiple valued functions) என்போம். நாம் எடுத்துக் கொண்டுள்ளபடி பல் மதிப்புச் சார்பலனைப் பல சார்பலன்களின் தொகுப்பாகக் கருதுகிறோம்.

இதுவரை இருமாறிகளில் சார்பலன்களை விவரித்தோம் இதே முறையில் x, y, z என்ற மூன்று மாறிகளின் சார்பலன்களையும் விவரிக்கலாம். இதனை மேலும் பொதுமைப்படுத்தி, n மாறிகளின் சார்பலன்களைப் பின்வருமாறு அறிமுகம் செய்யலாம்.

$(x_1, x_2 \ldots \ldots x_n)$ என்ற வரிசைப்பட்ட n எண்கள் தொகுப்பை n பரிமாண வெளியில் ஒரு புள்ளி எனக் கருதுக. R_n என்பது இத்தகைய புள்ளிகளாலான ஒரு கணம் என்க. R_n-ஐ அரங்கமாகக் கொண்டு $x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_n$ ஆகிய n தனித்த மாறிகள் மாறுவதாகக் கொள்க. இப்போது $(x_1, x_2 \ldots\ x_n)$ என்ற R_n-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியோடும் z என்ற தனித்த குறிப்பிட்ட மதிப்பைத் தொடர்புபடுத்த முடியுமானால் R_n-ல் z ஆனது $x_1, x_2, \ldots x_n$ என்ற n தனித்த மாறிகளின் ஒரு சார்பலன் எனக் கூறுவோம்.

இனி, இவ்வகையாக இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட மாறிகளில் உள்ள சார்பலன்களின் வகைகளைக் கூறுவோம். இவ்வகைகளைக் கூறும் போது இருமாறிகளை அடிப்படையாகக் கொண்டு விளக்கங்கள் கூறினாலும் இவ் விளக்கங்கள் பல மாறிகளைக் கொண்ட சார்பலன்களுக்கும் பொருந்தும்.

(i) **பல்லுறுப்புக் கோவைகள் :**

x, y-ல் பல்லுறுப்புக் கோவை என்பது $a_{mn}\, x^m y^m$ போன்ற உறுப்புக்களின் கூட்டல் தொகையாக வருவது இங்கே a_{mn} கெழு. m, n என்பன மிகை முழு எண்கள்.

எடுத்துக்காட்டாக, $z = ax+by+c$ என்பது முதல்படி பல்லுறுப்புக் கோவை x, y மதிப்புகள் xy தளத்தில் அரங்கமாக எடுக்கப்பட்டால் சார்பலனுக்கு வரைபடமாகக் கிடைப்பது முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளைபரப்பாகும்.

$z = ax^2 + by^2 + cy^2 + dx + ef + f$ என்பது x, y-ல் இரண்டாம்படியில் பல்லுறுப்புக் கோவை. x, y-ன் எல்லா மெய் மதிப்புகளுக்கும் சார்பலன் வரையறை செய்யப்படுகிறது.

(ii) விகிதமுறு சார்பலன்கள் :

$g(x, y) \pm 0$ ஆக இருக்கும்போது $\dfrac{f(x, y)}{g(x, y)}$ என்ற அமைப்பில் இரு பல்லுறுப்புக் கோவைகளின் விகிதமாக அமைந்திருக்கும் சார்பலனை விகிதமுறு சார்பலன் (Rational function) என்போம்.

எடுத்துக்காட்டாக $a^1x+b^1y+c^1 = 0$. ஆக இல்லாதபோது $z = \dfrac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ என்பது விகிதமுறு சார்பலனுகும்.

எடுத்துக்காட்டாக $a'x + b'y + c' = 0$ ஆக இல்லாதபோது $z = \dfrac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'}$ என்பது விகிதமுறு சார்பலனுகும்.

(iii) இயற்கணித சார்பலன்கள் :

$z = \sqrt{(x - 3)(y + 5)}$ போன்று படிமூலம் கண்டவகையில் அமைந்திருப்பன இயற்கணிதச் சார்பலன்கள் (algebraic functions) ஆகும். இங்கே படிமூலம் கண்ட மதிப்புக்கள் மிகையாகவே எடுத்துக் கொள்ளப்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக $n = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$ என்ற இயற்கணிதச் சார்பலனுக்கு u ஆனது $x^2 + y^2 \geqslant 4$ என அமைந்துள்ள மதிப்புகளுக்கே வரையறை செய்யப்படும்.

(iv) e^{x+y}, $\sin(x + y)$, $\log(x^2 + \sin \frac{1}{2} y)$ போன்று சிக்கலான சார்பலன்களும் உண்டு. அவற்றை நாம் விரிவாகக் காணப் போவது இல்லை.

§ 9-10. (a, b) என்ற புள்ளியின் அயல் :

δ என்பது சிறு மிகை எண் என்க.

$a - \delta < x < a + \delta$

$b - \delta < y < b + \delta$

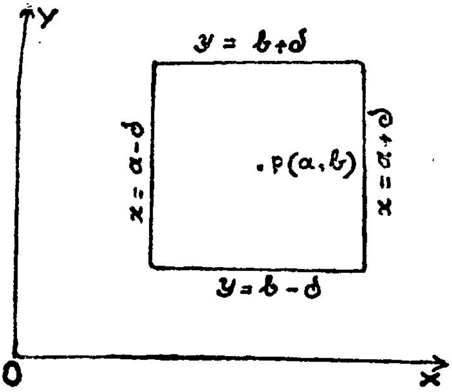
என்றவாறு அமைந்துள்ள (x, y) புள்ளிகள் ஒரு சதுரத்தைத் தீர்மானம் செய்யும். இச் சதுரத்திற்கு எல்லைகள்

$$x = a - \delta;\quad x = a + \delta$$
$$y = b - \delta;\quad y = b + \delta.$$

இச் சதுரத்தின் மையம் (a, b) எனும் புள்ளியில் உள்ளது. இச் சதுரத்தை (a, b) என்ற புள்ளிக்கு அயல் (neighbourhood) எனக் கூறுகிறோம். δ-ன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் ஒவ்வொரு அயல் கிடைக்கும்.

§ 9-1·1. ஒரு புள்ளியில் தொடர்ச்சி

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பலனின் அரங்கத்தில் (a, b) என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. a, b-க்குப் போதிய அளவு அருகாமையில் (x, y) புள்ளிகளை எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $f(a, b)$-ஐ $f(x, y)$ மதிப்புக்கு நெருக்கமாகக் கொண்டு செல்ல முடியும் எனில் $f(x, y)$



படம் 9·0.

என்ற சார்பலன் (a, b)-ல் தொடர்ச்சி உடையது எனக் கூறுகிறோம். அதாவது (a, b)-ல் $f(x, y)$ தொடர்ச்சி உள்ளது எனில் ϵ என்பது எவ்வளவு குறைந்த மிகை எண்ணாக இருந்தாலும் $f(a,b) - \epsilon \leq f(x,y) \leq f(a,b) + \epsilon$ என அமையுமாறு (x,y) புள்ளிகளைக் கொண்ட $x = a - \delta$; $x = a + \delta$; $y = b - \delta$; $y = b + \delta$ என்ற கோடுகளால் உருவான சதுரம் ஒன்று இருக்க வேண்டும்.

§ 9-1·2. ஒரு சார்பலனின் தொடர்ச்சி

$f(x,y)$ என்ற சார்பலன், அச்சார்பலனின் அரங்கமான R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடர்ச்சி உடையதாக இருந்

தால் $f(x,y)$ என்ற சார்பலன் R-ல் தொடர்ச்சியான சார்பலன் எனக் கூறப்படுகிறது.

குறிப்பு :

இரு மாறிகளில் தொடர்ச்சியான சார்பலன் ஒன்று இருந்தால் அது ஒவ்வொரு மாறியிலும் தனித்தனியே தொடர்ச்சி உடைய சார்பலன் என நிறுவ முடியும்.

§ 9-1·3. இருமாறிகளில் உள்ள சார்பலன் ஒன்றுக்கு எல்லை $(x\,y) \longrightarrow (a,b)$ எனில் $\text{Lt}\, f(x,y) = l$ என்பதன் பொருள், அதாவது

$f(x,y)$ என்ற சார்பலன், x,a-க்கும், y, b-க்கும் அணுகும் போது l என்ற எல்லையை அணுகும் என்பதற்குப் பொருள் பின் வருமாறு :

முன் கூட்டியே தரப்பட்டுள்ள ϵ எனும் மிகை எண்ணுக்கியைந்து,

$a - \delta \leq x \leq a + \delta;\quad b - \delta \leq y \leq b + \delta$

எனும் போது (a,b) தவிர ஏனைய (x,y) புள்ளிகள் எல்லாம்.

$$|\ f(x,y) - l\ | < \epsilon$$

என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் வண்ணம் δ என்ற மிகை எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க முடியும். அதாவது ϵ என்ற ஒவ்வொரு மிகை எண்ணுக்கும் இயைந்து (a, b) தவிர ஏனைய $(x.y)$ புள்ளிகள் எல்லாம் $f(x,y)$ ஆனது $l - \epsilon$-க்கும் இடையே அமையுமாறு (a,b)-ன் அயல் ஒன்று கண்டுபிடிக்க முடியும்.

குறிப்பு :

$f(x.y)$ என்பது (a,b)-ல் தொடர்ச்சி உடையது என்ற நிபந்தனையும், $(x.y)$, (a,b)-ஐ அணுக. $\text{Lt}\, f(x.y) = f(a,b)$ என்ற நிபந்தனையும் ஒன்றே. இதனையே வேறு விதமாகக் கூறுவதானால், (a,b)-ல் சார்பலன் தொடர்ச்சி உடையது என்பதையே,

$(h,k) \longrightarrow (0,0)$ எனில் $\text{Lt}\, f(a+h,\ b+k) \longrightarrow f(a,b)$ என்று கூறலாம்.

§ 9-2·0. பகுதி வகைக்கெழு : (Partial Derivative)

xy தளத்தில், R என்ற அரங்கத்தில் x,y என்ற இரு தனித்த மாறிகளில் $u = f(x.y)$ என்பது ஒரு சார்பலன். R-ல் (a,b) என்பது ஒரு புள்ளி.

y மாருத மதிப்பு b-ஐ உடையது எனக் கொண்டால் $f\ (x,b)$ சார்பலன் x-ஐ மட்டுமே சார்ந்திருக்கும்; இப்போது $x = a$-ஐ ஒட்டிய இடைவெளியில் x என்ற தனித்த மாறியின் ஒரு சார் பலனுக அது அமைந்திருக்கும். எனவே x-ஐப் பொறுத்து $x = a$-ல் அதற்கு வகைக்கெழு உளதாக முடியும். அவ்வாறு உளதானுல் அம் மதிப்பை x-ஐப் பொறுத்து a,b-ல் $f\ (x,y)$-ன் பகுதி வகைக்கெழு எனக் கூறுகிறோம்.

வகைக்கெழுவின் வரையறைப்படி

$$f_x\ (a, b) = \underset{h \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{f\ (a+h\ b) - f\ (a, b)}{h} \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறே x-ன் மதிப்பை a-ல் நிலையாகக் கொண்டால் $f\ (a, y)$ என்பது $y = b$-ஐ ஒட்டிய இடைவெளியில், y என்ற தனித்த மாறியின் சார்பலனுகிறது; அதன் வகைக்கெழு உள தாயின் அதனை a, b-ல் y-ஐப் பொறுத்து $f\ (x, y)$-ன் பகுதி வகைக் கெழு என்போம்; இதை $f_y\ (a, b)$ எனக் குறிப்பிடுவோம்.
இங்கே,

$$f_y\ (a\ ,b) = \underset{k \longrightarrow 0}{\text{Lt}} \frac{f\ (a, b+k) - f(a, b)}{k} \quad \ldots\ \ldots \quad (2)$$

குறியீடுகள் : பகுதி வகைக்கெழுக்களைக் குறிப்பிட பல குறி யீடுகள் வழக்கில் உள்ளன. $f_x\ (a, b)$ என்பதனையே பின்வரும் குறியீடுகளால் குறிப்பிடலாம்.

$$\left(\frac{\partial f(x.\ y)}{\partial x}\right)_{x=a;\ y=b}\ ; \qquad D_x\ f\ (a, b);$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,\ b)}\ ;$$

குறிப்பிட்ட புள்ளியை வெளிப்படையாகச் சுட்டிக் காட்ட வேண்டிய தேவையில்லாதபோது பகுதி வகைக்கெழுக்களைச் சுருக்கமாக $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x போன்று குறிப்பிடுவோம்.

இவ்வாறே,

$$f_y\ (a, b) = \left(\frac{\partial f\ (x.\ y)}{\partial y}\right)_{x=a,\ y=b}$$

$$= D_y\ f\ (a, b) = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{a,\ b}$$

சுருக்கமாக எழுதும் போது,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y$$

$f(x, y)$ ஆனது R-ல் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழுக்கள் கொண்டிருந்தால் இப்பகுதி வகைக்கெழுக்களின் மதிப்புகள் தாமாகவே R-ல் ஒரு சார்பலனை வரையறை செய்கின்றன. இச். சார்பலனை f என்ற சார்பலனின் x-ஐப் பொறுத்த பகுதி வகைக்கெழு எனக் கூறி $f_x(x, y)$ ஆல் குறிப்பிடுகிறோம். இதே போன்ற முறையில் $f_y(x, y)$-ஐ வரையறை செய்கிறோம். எனவே,

$$f_x(x, y) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \qquad \ldots \ldots (3)$$

$$f_y(x, y) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x, y+k) - f(x, y)}{k} \qquad \ldots \ldots (4)$$

குறிப்பு ;

$f(x, y, z)$ என்ற x, y, z என்ற மூன்று தனித்த மாறிகளில் அமைந்த சார்பலனுக்கு மூன்று பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன. இவை $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ இவற்றைப் பெறும்போது இரு மாறிகளைப் மாறிலியாக வைத்துக்கொண்டு சார்பலன் ஒரே மாறியில் இருப்பதாக எடுத்துக்கொள்கின்றோம். அதாவது,

$$f_x(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$$

இவ்வாறே $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ வரையறை செய்யப்படுகின்றன.

மேலும் பொதுவாக $x_1, x_2, x_3 \ldots \ldots x_n$ என n தனித்த மாறிகளில் ஒரு சார்பலன் அமையுமானல்

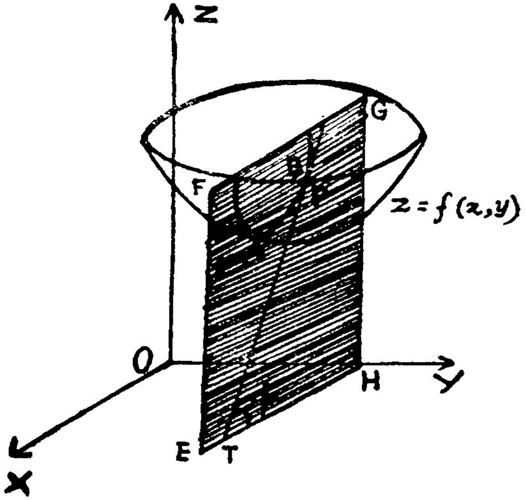
$$f_{x_1}(x_1 \ldots \ldots x_n) = \frac{\partial f(x_1, x_2 \ldots \ldots x_n)}{\partial x_1}$$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(x_1+h, x_2, \ldots x_n) - f(x_1, x_2 \ldots x_n)}{h}$$

§ 9-2·1. பகுதி வகைக்கெழுக்களுக்கு வடிவ கணித விளக்கம்

$u = f(x, y)$ என்பது ஒரு வளை பரப்பை வடிவ கணிதத்தில் குறிக்கும் என அறிவோம். படத்தில் இப்பரப்பு காட்டப் பட்டுள்ளது.

P $[a\ b\ f(a\ b)]$ என்பது இப்பரப்பில் ஒரு புள்ளி. அதன் வழியே XOZ-க்கு இணையாக EFGH என்ற தளம் வரைக. இதன் சமன் பாடு $y = b$. இத்தளம் வளைபரப்பை $u = f(x, b)$, $y = b$ என்ற சமன்பாடுகளை உடைய APB என்ற வளைகோட்டில் வெட்டுகிறது.



படம் 9·1.

x-ன் மாற்றத்திற்கு ஏற்ப P-ஆனது APB வளைகோட்டு வழியே நகர்கிறது. P-எனும் புள்ளியில் வளைகோட்டின் சாய்வு விகிதம் $\frac{\partial u}{\partial x}$ ஆகும். இது tan ψ-க்குச் சமம். ψ என்பது x அச்சுடன் P-ல் தொடுகோடு உண்டாக்கும் கோணம். இவ்வாறே P வழியாக YOZ தளத்திற்கு இணையாக $x = a$ என்ற தளத்தை எடுத்துக் கொண்டால் அது வெட்டும் வளைகோட்டிற்கு $\frac{\partial u}{\partial y}$ என்ற சாய்வு விகிதம் இருக்கும்.

§ 9-2·2. மேல்வரிசைப் பகுதி வகைக் கெழுக்கள்

$u = f(x, y)$ என்ற சார்பலனுக்கு $f_x(x,y)$ $f_y(x,y)$ என்ற பகுதி வகைக்கெழுக்கள் x, y-ல் சார்பலன்களாக அமைந்திருப்பதால்

அவற்றுக்கு மீண்டும் x-ஐப் பொறுத்தோ y-ஐப் பொறுத்தோ பகுதி வகைக்கெழு காணமுடியும். x-ஐப் பொறுத்து $f_x(x,y)$-ன் பகுதி வகைக் கெழுவாவது

$$f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_x(x+h, y) - f_x(x,y)}{h}$$

இவ்வாறே y-ஐப் பொறுத்து f_x (x,y)-ன் பகுதி வகைக்கெழுவானது,

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_x(x, y+k) - f_x(x,y)}{k}$$

f_{yy}, f_{xy} என்ற குறியீடுகளுக்கு முன்பு போலவே பொருத்தமான விளக்கம் தரலாம்.

$f(x,y)$-க்கு இரண்டாம் வரிசையில் (second order) f_{xx}, f_{yx}, f_{yy}, f_{xy} என நான்கு பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு. இவ்வாறே மூன்றும் வரிசை, மற்றும் மேல் வரிசையில் அமைந்த பகுதி வகைக் கெழுக்களை வரையறை செய்யலாம்.

குறிப்பு :

f_{xy}-ம் f_{yx}-ம் சமமாக இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியம் அல்ல.

எடுத்துக்காட்டாக

$$f(x,y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^4 + y^2} \quad (x,y) \text{ இரண்டுமே } \neq 0$$

$$f(0,0) = 0.$$

என்ற சார்பலனைக் கருதுக.

$$f_{yx}(0,0) = \underset{k \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_x(0, 0+k) - f_x(0,0)}{k}$$

இங்கே $f_x(0,k) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$

$$= \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{hk\left(\frac{h^2 - k^2}{h^2 + k^2}\right) - 0}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{k(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2}$$

$$= \frac{-k^3}{k^2} = -k.$$

மற்றும் $f_x(0,0) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{0-0}{h}$

$= 0$

எனவே,

$$f_{yx}(0,0) = \underset{k \to 0}{\text{Lt}} \frac{-k-0}{k} = -1$$

இனி

$$f_{xy}(0,0) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

இங்கே

$$f_y(h,0) = \underset{k \to 0}{\text{Lt}} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$$

$$= \underset{k \to 0}{\text{Lt}} \frac{hk(h^2 - k^2)}{k(h^2 + k^2)} = h$$

$\text{Lt}\, f_y(0,0) = 0$ முன்பு போல

எனவே

$$f_{xy}(0,0) = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{h-0}{h} = 1$$

$\therefore$ $(0,0)$-ல் $f_{xy} = 1;\ \ f_{xy} = -1\ \ \therefore f_{xy} \neq f_{yx}$.

இப்பொழுது எந்த நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டு f_{xy}, f_{y}^{x} சமமாக இருக்கும் என்ற கேள்வி எழுகிறது. இதற்கு விடையே பின்வரும் தேற்றம்.

§ 9-2·3. தேற்றம் : $f(x, y)$ என்ற சார்பலனின் பகுதி வகைக் கெழுக்களான f_{xy}, f_{yx} என்ற இரண்டும் R எனும் அரங்கத்தில் தொடர்ச்சி உடையதாக இருந்தால், $f_{yx} = f_{xy}$ என்பது R-ல் உண்மையாக இருக்கும்.

நிறுவல் :

பின்வரும் கோவையைக் கருதுக.

$$\phi(h, k) = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y) \quad \dots (1)$$

$$\psi(x) = f(x, y+k) - f(x, y) \quad \dots (2)$$

என எடுத்துக் கொண்டால் (1) ஆனது,

$$\phi(h, k) = \psi(x+h) - \psi(x) \qquad (3)$$

லெக்ராஞ்சி இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினல்

$\psi(x+h) - \psi(x) = h\,\psi'(x + \theta, h)$; இங்கே $0 < \theta r < 1$...(4)

மேலும்,

$$\psi'(x) = f_x(x, y+k) - f_x(x, y) \qquad \ldots (5)$$

அதனல்,

$$\phi(h, k) = h\,[f_x(x + \theta, h, y+k) - f_x(x + \theta, h, y)] \ldots (6)$$

மறுபடியும் (6)-ன் வலப்புறத்திற்கு இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினல்

$$\phi(h, k) = hk\, f_{yx}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k); \quad 0 < \theta_2 < 1$$

எனவே,

$$\frac{\phi(h,k)}{h\,k} = f_{yx}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k) \qquad \ldots (7)$$

மறுபடியும் $\psi(x)$-க்கு பதிலாக $f(y) = f(x+h, y) - f(x, y)$ எடுத்துக் கொண்டு முன்பு போலவே செய்தால்,

$$\frac{\phi(h,k)}{h\,k} = f_{xy}(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k) \qquad \ldots (8)$$

எனவே,

$$f_{yx}(x + \theta_1 h, y + \theta_2 k) = f_{xy}(x + \theta_3 h, y + \theta_4 k)$$

$h \to 0$, $k \to 0$ என்க. பகுதி வகைக்கெழுக்கள் தொடர்ச்சி உள்ளன என எடுத்துக் கொண்டுள்ளதால்

$$\underline{f_{yx} = f_{xy}}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$u = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$-ஐக் கண்டுபிடி.

தீர்வு :

$$u = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x} - y^2 \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cdot \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} - y^2 \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) - 2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$= \frac{x^3}{x^2+y^2} + \frac{xy^2}{x^2+y^2} - 2y\tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$$= x - 2y\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[x - 2y\tan^{-1}\frac{x}{y}\right]$$

$$= 1 - 2y \cdot \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}} \frac{1}{y}$$

$$= 1 - \frac{2y^2}{x^2+y^2}$$

எனவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\ \partial y} = \frac{x^2 - y^2}{x^2+y^2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$ எனில்

$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r},\quad \frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\frac{\partial \theta}{\partial x}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta,$$

ஆகையால், $r = \sqrt{x^2+y^2},\quad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta = \frac{x}{r}$$

எனவே $$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial r}$$

மேலும் $$\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{1}{r}(-r\sin\theta)$$

$$= -\sin\theta$$

$$r\frac{\partial \theta}{\partial x} = -r\cdot\frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\cdot\frac{y}{x}$$

$$= -\frac{y}{r} = -\sin\theta.$$

எனவே,

$$\frac{1}{r}\frac{\partial x}{\partial \theta} = r\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ எனில்

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ எனவும்,

(ii) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + z\frac{\partial u}{\partial z} = -u$ எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$u = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

எனவே, $$\frac{\partial u}{\partial x} = -1/2(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\cdot 2x$$

$$= \frac{-x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

இவ்வாறாகவே,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} ; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{-z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{[(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \cdot 2x]}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}$$

$$= -\frac{(x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

இவ்வாறாகவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - x^2, - z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$$

எனவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \frac{2x^2 - y^2 - z^2 + 2y^2 - x^2 - z^2 + 2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$u = \log\left[\frac{x^2 + y^2}{xy}\right]$ எனில் $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$u = \log\left[\frac{x^2 + y^2}{xy}\right]$$

$$= \log(x^2 + y^2) - \log x - \log y \qquad \dots \text{(i)}$$

x-ஐப் பொறுத்து (i)-ஐப் பகுதி வகையீடு செய்ய,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot 2x - \frac{1}{x}$$

$$= \frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \qquad \dots \text{(ii)}$$

y-ஐப் பொறுத்து (i)-ஐப் பகுதி வகையிடு செய்ய,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x} \qquad \ldots \text{(iii)}$$

y-ஐப் பொறுத்து (ii)-ஐப் பகுதி வகையிடு செய்ய,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= 2x \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) = \frac{-2x}{(x^2 + y^2)^2} \cdot 2y$$

$$= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \ldots \text{(iv)}$$

x ஐப் பொறுத்து (iii) ஐப் பகுதி வகையிடு செய்ய,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{2y}{x^2 + y^2} - \frac{1}{y}\right]$$

$$= 2y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= 2y\left[\frac{-1}{(x^2 + y^2)} \cdot 2x\right]$$

$$= -\frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \qquad \ldots \text{(v)}$$

(iv), (v)-லிருந்து,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$v = (1 - 2xy + y^2)^{-1/2}$ எனில்

$x\frac{\partial v}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial y} = y^2 v^3$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$v = (1 - 2xy + y^2)^{-1/2} \text{ என்பதால்}$$

$$\log v = -\tfrac{1}{2}\log(1 - 2xy + y^2)$$

$$\therefore \frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2xy + y^2} \cdot (-2y)$$

$$= y \cdot v^2$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial x} = y \cdot v^3$$

$$\therefore x \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = xyv^3 \qquad \ldots\ldots (1)$$

மற்றும் $$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - 2xy + y^2} \cdot 2(y - x)$$

$$= (x - y)v^3$$

$$\therefore \frac{\partial v}{\partial y} = (x - y)v^3$$

$$\therefore y\frac{\partial v}{\partial y} = yxv^3 - y^2v^3 \qquad \ldots\ldots (2)$$

(1), (2) மூலம்

$$x\frac{\partial v}{\partial x} - y\frac{\partial v}{\partial y} = y^2v^3.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$u = \log r\,;\ r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$

எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{r^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது ... (i)

x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிடு செய்ய,

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2(x - a) \text{ அல்லது } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{(x - a)}{r} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

இவ்வாறாகவே $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{(y-b)}{r}$; $\dfrac{\partial r}{\partial z} = \dfrac{z-c}{r}$

இப்போது $u = \log r$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r}\left(\frac{x-a}{r}\right) \quad \text{... (ii) மூலம்}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x-a}{r^2}$$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{r^2}\right) = \frac{r^2(1) - (x-a)\,2r\,\frac{\partial r}{\partial x}}{r^4}$$

அல்லது, $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{r^2 - 2(x-a)^2}{r^4} \quad \text{... (ii) மூலம்}$$

இவ்வாறாகவே, $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{r^2 - 2(y-b)^2}{r^4}$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \dfrac{r^2 - 2(z-c)^2}{r^4}$

$$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{3r^2 - 2\{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2\}}{r^4}$$

$$= \frac{3r^2 - 2r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2} \quad \text{...(i)-ன் மூலம்}$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$u = f(r)$; $r^2 = x^2 + y^2$ எனில்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) + \frac{1}{r} f'(r)$$

என நிறுவுக.

தீர்வு :

$r^2 = x^2 + y^2$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. ... ... (i)

x-ஐப் பொறுத்து இருபுறமும் பகுதிவகையீடு செய்ய,

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x \text{ அல்லது } \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \quad \text{..... (ii)}$$

இவ்வாறாகவே

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \quad \text{... (iii)}$$

இப்போது $u = f(r)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\,\frac{x}{r} \quad \text{... (ii)-ன் மூலம்.}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{f'(r)\cdot x}{r}\right]$$

$$= \frac{r\left[f'(r)\cdot 1 + x f''(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right] - x f'(r)\cdot\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}$$

அல்லது $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{r^2}\left[r f'(r) + x^2 f''(r) - \frac{x^2}{r} f'(r)\right]$$

... ... (ii)-ன் மூலம்

இவ்வாறாகவே

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\left[r f'(r) + y^2 f''(r) - \frac{y^2}{r} f'(r)\right]$$

ஆகவே

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\left[2r f'(r) + (x^2+y^2) f''(r) - \frac{x^2+y^2}{r} f'(r)\right]$$

$$= \frac{1}{r^2}\left[2r f'(r) + r^2 f''(r) - r f'(r)\right]$$

... ... (i)-ன் மூலம்

$$= \frac{1}{r} f'(r) + f''(r).$$

பயிற்சிகள் 9(A)

1. $u = \sin(ax + by + cz)$ எனில்

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}$$ காண்க.

2. $u = (y - z)\ (z - x)\ (x - y)$ எனில்

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ என நிறுவுக.

3. $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$ எனில்

$$x\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = y\,\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = z\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$ என நிறுவுக.

4. $u = \tan^{-1} \dfrac{xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$ எனில்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{1}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}$$ எனவும்

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = = 15\, xy\, (1 + x^2 + y^2)^{-7/2}$$ எனவும்

நிறுவுக.

5. $u = \log_e \left[\dfrac{(1 + x^2)(1 + y^2)}{xy} \right]$ எனில்

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ கண்டு பிடிக்கவும்.

6. $u = e^{xyz}$ எனில் $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3\,xyz + x^2 y^2 z^2)\, e^{xyz}$ என நிறுவுக.

7. $u = x \sin y + y \sin x$ எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ என நிறுவுக.

8. $u = x^y$ எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ என நிறுவுக.

9. $u = \log(y \sin x + x \sin y)$ எனில்

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x}$ என நிறுவுக.

10. $u = \log \tan \left[\dfrac{y}{x}\right]$ எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ என நிறுவுக.

11. $u(x + y) = x^2 + y^2$ எனில்

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 4\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} - \right)\frac{\partial u}{\partial y}$$ என நிறுவுக.

12. $u = x^2 (y - z) + y^2 (z - x) + xz(x - y)$ எனில்

$\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$ என நிறுவுக.

13. $\tan u = \dfrac{\cos x}{\sinh y}$; $\tan v = \dfrac{\sin x}{\cosh y}$ எனில்

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ எனவும், $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ எனவும் நிறுவுக.

14. $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனில்

$\left(\dfrac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = 1$ என நிறுவுக.

15. $u = l^{my}\cos mx$ எனில் $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ என நிறுவுக.

16. $u = \dfrac{x^2 y^2}{x^2+y^2}$ எனில்

$x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} = 2\dfrac{\partial u}{\partial x}$ என நிறுவுக.

17. $u = \log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$ எனில்

(i) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)u = \dfrac{3}{x+y+z}$ எனவும்,

(ii) $\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial z}\right)^2 u = -\dfrac{9}{(x+y+z)^2}$

எனவும்,

(iii) $\dfrac{\partial x^2}{\partial^2 u} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\dfrac{3}{(x+y+z)^2}$ எனவும்

நிறுவுக.

18. $u = \phi(x+ay) + \psi(x-ay)$ எனில்

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ என நிறுவுக.

19. $z = \tan(y+ax) + (y-ax)^{3/2}$ எனில்

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$-ன் மதிப்பைக் கண்டுபிடி.

20. $v = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}}$ எனில்

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0$$ என நிறுவுக.

21. $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ எனில்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ என நிறுவுக.

22. $z = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$ எனில் n-ன் எந்த மதிப்பிற்கு

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial z}{\partial r}\right) = \frac{\partial z}{\partial t}$$ ஆக இருக்கும் ?

23. $u = (1 - 2xy + y2)^{-1/2}$ எனில்

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(1 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial y}\left[y^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right] = 0$$

என நிறுவுக.

24. $u = \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ எனில்

$$(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = 0$$

என நிறுவுக.

25. $z = \log (x^2 + y^2) + \tan^{-1} \dfrac{y}{x}$ எனில்

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$ என நிறுவுக.

26. $v = \dfrac{c}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}$ எனில் $\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ என நிறுவுக.

27. $x = r \cos \theta,\ y = \sin \theta$ எனில்

(i) $\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0$ எனவும்,

(ii) $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{1}{r}\left[\left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2 \left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2\right]$ எனவும் நிறுவுக.

28. $z = f(x,y)$; மேலும் $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$ · எனில்

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$

என நிறுவுக.

விடைகள் 9 (A)

1. $a\cos(ax + by + cz)$

$b\cos(ax + by + cz)$

$c\cos(ax + by + cz)$

5. $(1 + x^2 + y^2)^{-3/2}$

19. 0

22. $n = -\frac{3}{2}$.

§ 9-3 ஆய்லர் தேற்றம் (Euler's Theorem)

§ 9-3·1. சமச்சீர் சார்பலன்கள்

$3x^3 + 5x^2y + 6xy^2 + y^3$ என்ற சார்பலனில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் மூன்றுவது படியில் அமைந்துள்ளது. இவ்வாறு ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் உள்ள x, y-ன் படிகளின் கூட்டல் தொகை n ஆக இருக்குமாறு $f(x, y)$ என்ற சார்பலன் அமைந்திருந்தால் அதனைச் சமச்சீர் சார்பலன் (homogeneous function) என்கிறோம். அதாவது $f(x, y)$ என்ற சார்பலனை n படியில் சமச்சீராக அமைந்திருக்கிறது எனக் கூறுவதானால் அதனை, $x^n\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ என்ற அமைப்பிலோ $y^n\psi\left(\frac{x}{y}\right)$ என்ற அமைப்பிலோ எழுத முடியும். எடுத்துக் காட்டாக,

$$3x^3 + 5x^2y + 6xy^2 + y^3 = x^3\left(3 + 5\frac{y}{x} + 6\frac{y^2}{x^2} + \frac{y^3}{x^3}\right)$$

இது மூன்றும் படியில் உள்ளது. இவ்வாறே,

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = x\left[\frac{1}{y/x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]$$ ஆதலால் இது முதல் படியில் அமைந்த சமச்சீர் சார்பலன்.

இவ்வாறே $f(x, y, z)$ என்பது n படியில் சமச்சீராக இருந்தால் அதனை

$$x^n \phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right) \text{ அல்லது } y^n \psi\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right)$$

அல்லது $z^n \theta\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ என அமைக்கலாம்.

பொதுவாக $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ என்ற சார்பலன் k படியில் சமச்சீராக இருந்தால் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்,

$$x_1^k \phi\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots\ldots \frac{x_n}{x_1}\right) \text{ அல்லது } x_2^k \psi\left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2} \ldots\ldots \frac{x_n}{x_2}\right)$$

முதலியன.

சமச்சீர் பற்றிய வரையறையை வேறுவிதமாகவும் கூறலாம்' சமச்சீர் சார்பலனை

$$f(x, y, z) = x^n \phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right)$$

என்று எழுதக் கூடுமாதலால் t-ன் ஒவ்வொரு மிகை மதிப்பிற்கும்

$$f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z) \quad \ldots\ldots (1)$$

என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்வதே சமச்சீர் சார்பலன் எனக் கூறுவோம். எடுத்துக்காட்டாக,

$f(x, y, z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ என்பது -1 படியில் சமச்சீர் உடையது. ஏனெனில்,

$$f(tx, ty, tz) = t^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) = t^{-1} f(x, y, z)$$

§ 9-3·2. சமச்சீர் சார்பலனுக்கு ஆய்லர் தேற்றம்:

x, y-ல் n படியில் $u = f(x, y)$ என்பது தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக் கெழுக்களை உடைய சமச்சீர் சார்பலன் ஆனால்,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = n f(x, y)$$

நிறுவல் :

$u = f(x, y)$ என்பது n படியில் சமச்சீர்சார்பலன் ஆகையால்,

$$u = x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x} = n\, x^{n-1} \phi\left(\frac{y}{x}\right) + x^n \phi'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$

$$\therefore x \frac{\partial u}{\partial x} = n\, x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right) - x^{n-1} y\, \phi'\left(\frac{y}{x}\right)$$

மற்றும், $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x^n \phi'\left(\dfrac{y}{x}\right) \cdot \dfrac{1}{x} \quad \therefore \quad y \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^{n-1} y\, \phi'\left(\dfrac{y}{x}\right)$

எனவே $\quad x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = n\, x^n \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$

$$= nu$$

$$= n\, f(x, y)$$

இணைத் தேற்றம் :

u, என்பது x, y-ல் சமச்சீர்சார்பலனாக இருந்தால்,

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n(n-1)u$$

அல்லது

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 u = n(n-1)u.$$

[மேலே வரும் வகைக்கெழுக்கள் தொடர்ச்சி உடையன]

நிறுவல் :

u என்பது n படியில் சமச்சீர் சார்பலனாதலால் ஆய்லர் தேற்றத்தின் படி,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

(1)-ஐ x-ஐப் பொறுத்தும், பின் y-ஐப் பொறுத்தும் வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = n\frac{\partial u}{\partial x} \quad \ldots (2)$$

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = n\frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots (3)$$

(2)-ஐ x ஆலும், (3)-ஐ y-ஆலும் பெருக்கிக் கூட்டினுல்,

$$\left(x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$= n\left(x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial u}\right)$$

$$\therefore \quad x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= n \cdot nu - nu \ldots\ldots\ldots [\,(1) \text{ மூலம்}$$

$$= n(n-1)u.$$

குறிப்பு :

இரண்டுக்கு மேற்பட்ட தனித்த மாறிகளில் அமைந்த சமச்சீர் சார்பலன்களுக்கும் ஆய்லர் தேற்றத்தைப் பொதுமைப் படுத்திக் கூறலாம்.

n தனித்த மாறிகளில் m படியில் $f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ என்பது சமச்சீர் சார்பலனுல்,

$$x_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots\ldots + x_n\frac{\partial f}{\partial x_n} = m f(x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

இம்முடிவிற்குக் கிளைத்தேற்றமாக,

$$\left[x_1\frac{\partial}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots\ldots + x_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right]^n f$$

$$= m(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)f.$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} = -y\dfrac{\partial u}{\partial y}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இங்கே, $\sin u = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = f$ எனக் கொள்க.

ஆகவே f: அதாவது $\dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ ஆனது 0 படியில், x, y-ல் சமச்சீர் சார்பலன்.

$\sin u$-க்கு, அதாவது f-க்கு ஆய்லர் தேற்றப்படி,

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \cdot f \text{ என இருக்கவேண்டும்.}$$

$$x \frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y \frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = 0\,(\sin u), \because f = \sin u.$$

அல்லது

$$x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ அல்லது } x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

அதாவது

$$x \frac{\partial u}{\partial x} = -y \frac{\partial u}{\partial y}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ எனில் $x \dfrac{\partial u}{\partial x} + y \dfrac{\partial u}{\partial y} = \tan u.$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

இங்கே $\sin u = \dfrac{x^2 + y^2}{x + y} = f$ எனக் கொள்க.

ஆகவே f அதாவது $\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}$ ஆனது (2—1) அதாவது 1 படியில் x, y-ல் சமச்சீர் சார்பலன்.

f-க்கு ஆய்லர் தேற்றத்தின்படி

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = f \text{ அல்லது}$$

$$x \frac{\partial}{\partial x}(\sin u) + y \frac{\partial}{\partial y}(\sin u) = 1 \sin u \text{ ஆக}$$

இருக்க வேண்டும்.

$$x \cos u \frac{\partial u}{\partial x} + y \cos u \frac{\partial u}{\partial x} = \sin u$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\sin u}{\cos u} = \tan u.$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

u என்பது n படியில் x, y மாறிலிகளில் ஒரு சமச்சீர் சார்பலன் எனில்

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

u என்பது n படியில் x, y மாறிகளில் ஒரு சமச்சீர் சார்பலன் எனத் தரப்பட்டுள்ளது. ஆகவே ஆய்லர் தேற்றத்தின் படி,

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = nu \qquad \ldots \text{(i)}$$

x-ஐப் பொறுத்து (i)-ஐப் பகுதிவகையீடு செய்ய.

$$\left\{x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} 1\right\} + y \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = n \frac{\partial u}{\partial x}$$

அல்லது

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = n \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x}$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$$u = x f_1\left(\frac{y}{x}\right) + f_2\left(\frac{y}{x}\right)$$ எனில்

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$v = x f_1\left(\frac{y}{x}\right)$ எனவும் $w = f_2\left(\frac{y}{x}\right)$ எனவும் கொள்க.

ஆகவே $u = v + w$ ...(i)

இப்போது $v = xf_1\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பது x, y-ல், 1 படியில் சமச்சீர் சார்பலன். மேலும் f ஆனது x, y-ல், n படியில் சமச்சீர் சார்பலன் என்றால்

$$x^2 \frac{\partial f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = n(n-1) f$$ என அறிவோம்.

$$\therefore \quad x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 1(1-1)\, v = 0 \quad \text{...(ii)}$$

மேலும் $w = f_2\left(\frac{y}{x}\right)$ என்பது x, y-ல் 0 படியில் சமச்சீர் சார்பலன்.

ஆகவே

$$x^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0\,(0-1)\, w = 0 \quad \text{...(iii)}$$

(ii)-ஐயும் (vi)-ஐயும் கூட்ட,

$$x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}(v + w) + 2xy \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(v + w) + y^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}(v + w) = 0$$

ஆகவே $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ ((1) லிருந்து)

பயிற்சிகள் 9 (B)

1. ஆய்லர் தேற்றத்தை சரிபார்க்கவும்.

(i) $u = \dfrac{x - y}{y + x}$ (ii) $u = \dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$

(iii) $u = \dfrac{x\,(x^3 - y^3)}{x^3 + y^3}$ (iv) $y^n \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

2. $u = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$ எனில்

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial n}{\partial z} = 3u$$ என நிறுவுக.

3. $z = xy\,f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ எனில் $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$ என நிறுவுக.

4. $u = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிறுவுக.

5. $u = \sin^{-1}\dfrac{x}{y} + \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$ எனில்

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ என நிறுவுக.

6. $u = \log\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}\right)$ எனில் $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 1$ என நிறுவுக.

7. $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ எனில்

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\tan u$ என நிறுவுக.

8. $u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}\right)$ எனில்

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{20}\tan u$ என நிறுவுக.

9. $v = \cos^{-1}\left(\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ எனில்

$x\dfrac{\partial v}{\partial x} + y\dfrac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\cot v = 0$ என நிறுவுக.

10. $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$ எனில்

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \sin 2u$ என நிறுவுக.

11. $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ எனில்

$x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\sin 2u$ என நிறுவுக.

12. $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{x^3 + y^3}{x + y}\right)$ எனில்

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$= \sin 2u\,(1 - 4\sin^2 u)$$ என நிறுவுக.

13. $u = \dfrac{x^2 y^2}{x + y}$ எனில்

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x}$$ என நிறுவுக.

14. $F(x, y) = x^m f\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^n g\left(\dfrac{x}{y}\right)$ என்ற சார்பலன் ஆய்லர் தேற்றத்தின் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்கிறது எனக் கொண்டு

$$x^2 F_{xx} + 2xy\, F_{xy} + y^2 F_{yy}$$

$$= (m + n - 1)(x F_x + y F_y) - mnF$$ என நிறுவுக.

15. $u = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ எனில்

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^3} =$$ என நிறுவுக.

16. $u = \sin\left(\dfrac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)$ எனில்

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{1}{4} \frac{\sin u \,.\, \cos 2u}{\cos^3 u.}$$

என நிறுவுக.

§ 9-4. மொத்த வகையீட்டுக் கெழு (Total differential coefficient)

$u = f(x, y)$; இங்கே $x = \phi(t)$; $y = \psi(t)$ என்றவாறு சார்பலன்கள் இருந்தால் u என்பது t என்ற தனித்த மாறியில் கலவைச் சார்பலன் (composite function) எனப்படும்.

$u = f(x, y)$ என்ற சார்பலனை $x = \phi(t)$ $y = \psi(t)$ என்றிருந்தால் x-க்கும் y-க்கும் பிரதியிடுவதன் மூலம் t என்ற ஒரே மாறியில் சார்பலனாக u அமைவதாகக் கொண்டு $\dfrac{du}{dt}$ என்ற சாதாரண வகையீட்டுக் கெழுவைக் காணலாம்.

$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ என்ற பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்களிலிருந்து வேறுபடுத்திக் காட்டுவதற்காக $\frac{du}{dt}$ என்பதை u-ன் மொத்த வகையீட்டுக் கெழு (Total differential coefficient) எனக் கூறுகிறோம்.

$f(x, y)$-ல் x, y-க்குப் பிரதியிடாமலேயே நேரடியாக $\frac{du}{dt}$ - ஐக் காண முயல்வோம்.

தேற்றம் : $u = f(x, y)$; இங்கே $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது. x ஐப் பொறுத்து u-க்கு தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக் கெழுக்கள் உள்ளன. P ஐப் பொறுத்து y க்கு தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன. இவ்வாறிருந்தால்,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

நிறுவல் ;

Δt என்பது t-ல் கொடுக்கப்பட்ட சிறு கூடுந்தொகை இதன் பயனாக x, y, u-ல் கூடுந் தொகைகள் முறையே Δx, Δy, Δu எனவே,

$$x + \Delta x = \phi(t + \Delta t)\ ; \quad y + \Delta y = \psi(t + \Delta t)$$

எனவே,

$$\begin{aligned} u + \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) \\ \Delta u &= f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] \\ &\quad + [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] \end{aligned}$$

வலப்புறமுள்ள இரண்டு வேறுபாடுகளுக்கும் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்த,

$$\Delta u = \Delta x f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) + \Delta y f_y(x, y + \theta_2 \Delta y)$$

இங்கே $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$.

எனவே,

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} f_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) + \frac{\Delta y}{\Delta t} f_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \qquad \ldots (1)$$

$\triangle t \longrightarrow 0$ என்க. எனவே $\triangle x \longrightarrow 0$, $\triangle y \longrightarrow 0$; பகுதி வகைக் கெழுக்கள் தொடர்ச்சி உடையன ஆகையால்

$$\underset{(\triangle x, \triangle y) \longrightarrow (0, 0)}{\text{Lt}} f_x(x+\theta, \triangle x, y+\triangle y) = f_x(x, y)$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\underset{\triangle y \longrightarrow 0}{\text{Lt}} f_y(x, y+\theta_2 \triangle y) = f_y(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}$$

எனவே (i) என்ற சமன்பாடு பின்வருமாறு ஆகும்.

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

கிளை 1 : $u = f(x_1, x_2 \ldots \ldots x_n)$.

இங்கே $x_1, x_2 \ldots \ldots x_n$ என்பன t-ன் சார்பலன்களானுல்

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{dt} + \ldots \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{dx_n}{dt}$$

கிளை 2 : u என்பது x, y-ன் சார்பலன், y என்பது x-ன் சார் பலனுனல் $\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

நிறுவல் :

$u = f(x, y)$, y என்பது x-ன் சார்பலன்.

அதாவது $y = \phi(x)$ என்க.

எனவே $u = f[x, \phi(x)]$ என்பது x-ல் மட்டும் சார்பலன்.

தேற்றத்தில் (ii)-ஐ பயன்படுத்தி,

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\text{(அது)} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

குறிப்பு :

$$\frac{du}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dy}$$ என்றும் நிறுவலாம்.

இம் முடிவுகளைப் பொதுமைப் படுத்தியும் கூறலாம்.

இளை 3 : u என்பது x, y ஐப் பொறுத்து தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உள்ள x, y-ன் சார்பலன். இங்கே $x = f_1\ (t_1, t_2)$; $y = f_2\ (t_1, t_2)$ இவை இரண்டிற்கும் t_1, t_2-ஐப் பொறுத்துத் தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்கள் உண்டு. இவ்வாறிருப்பின்,

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

நிறுவல் :

t_2-ஐ மாறிலியாக எடுத்துக் கொண்டால் x, y என்பன t_1-ல் மட்டுமே சார்பலன்களாக இருக்கும். எனவே $\dfrac{\partial u}{\partial t_1}$ பெறலாம்.

எனவே தேற்றத்தில் (ii) சமன்பாட்டில் மொத்த வகையீட்டுக் கெழுக்களைப் பகுதி வகையீட்டுக் கெழுக்களாகப் பிரதியிட்டு, t-க்கு பதிலாக t_1 பிரதியிட,

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_1} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

இவ்வாறே

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t_2} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t_2}$$

இளை 4 : உள்படுசார்புகளை வகையீடு செய்தல் :

$f(x, y) = c$ என்ற சமன்பாடு y-ஐ xஆல் வகையீடு காணக் கூடிய சார்பலனாக அமைந்திருக்கிறது. f_x, f_y என்பன தொடர்ச்சியானவை.

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0 \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x}\Big/\frac{\partial f}{\partial x}$$

நிறுவல் : $f(x, y) = c$ என்பது y-ஐ x-ன் வகையீடு காணக் கூடிய சார்பலனாக வெளியிடுவதால் $f(x, y)$-ஐ, x-ன் கலவைச் சார்பலனாகக் கருதலாம். இதற்கு x-ஐப் பொறுத்து அதன் வகையீடாவது

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}$$

ஆனல் $f(x, y)$ என்பது x-ல் மட்டுமே சார்பலனுகக் கருதப் படுகிறது. $f(x, y)$ ஆனது c என்ற மாறிலிக்குச் சமமாக இருப் பதால் x-ஐப் பொறுத்து அதன் வகையீடு 0. எனவே,

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

எனவே,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}; \quad \text{இங்கே } \frac{\partial y}{\partial x} \neq 0.$$

கிளை 5 : உள்படு சார்பின் இரண்டாவது வரிசை வகையீட்டுக் கெழு

$$f(x, y) = c \text{ எனில் } \frac{d^2y}{dx^2} \text{ காணல்}$$

$$f(x, y) = c \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y} \qquad \text{...... (iii)}$$

என முன்பே கண்டோம்.

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ என்பன x-ல் கலவைச் சார்பலன்கள் எனக்கருதி (iii)-ஐ மீண்டும் x-ஐப் பொறுத்து வகையீடல் செய்வோம்.

கணிப்பு எளிமையை கருதி

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p, \ \frac{\partial f}{\partial y} = q, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = r, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = s, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = t$$

எனப் பிரதியிடுவோம்

இப்போது $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{p}{q}\right)$$

$$= -\left[\frac{q \cdot \left(\frac{dp}{dx}\right) - p\left(\frac{dq}{dx}\right)}{q^2}\right] \qquad \text{... (iv)}$$

ஆனால் $\frac{dp}{dx} = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$ (கிளை 2 காண்க)

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = r + s\left(-\frac{p}{q}\right)$$

$$\therefore \frac{dp}{dx} = \frac{rq - ps}{q} \quad \dots (v)$$

இவ்வாறே $\frac{dq}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = s + t\left(-\frac{p}{q}\right)$$

$$\therefore \frac{dq}{dx} = \frac{sq - p}{q} \quad \dots (vi)$$

(v), (vi)-ஐ (iv)-ல் பிரதியிட

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{q\,(rq-ps)/q - p(sq-p)q}{q^2}\right]$$

(அது) $$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{q^2r - 2pqs + p^2t}{q^3}\right)}$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$z = x^2y + y^2$; $x = \log_e t$; $y = e^t$ எனில் $\frac{dz}{dt}$ காண்க.

தீர்வு :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

$$= 2xy. \frac{1}{t} + (x^2 + 2y)e^t.$$

$$= \left(\frac{2}{t}\right) e^t \log t + \left[(\log t)^2 + 2\, e^t.\right] e^t.$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$u = x^2 - y^2$; $x = e^t \cos t$; $y = et \sin t$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

தீர்வு ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

ஆகவே $$\frac{dx}{dt} = -e^t \sin t + \cos t\, e^t.$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cos t + \sin t\, e^t.$$

$$\frac{du}{dt} = 2x\, e^t (\cos t - \sin t) - 2y\, e^t (\sin t + \cos t)$$

$$= 2\, e^t. \cos t\, e^t (\cos t - \sin t) - 2\, e^t. \sin t\, e^t (\sin t + \cos t)$$

$$= 2\, e^{2t} \{ \cos^2 t - \cos t \sin t - \sin^2 t - \sin t \cos t \}$$

$$= 2\, e^{2t} \{ \cos^2 t - \sin^2 t - 2\sin t \cos t \}$$

$$= 2\, e^{2t} (\cos 2t - \sin 2t).$$

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$f(x, y) = 0$, $\phi(y, z) = 0$ எனில்

$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\phi(y, z) = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$\frac{dz}{dy} = \frac{-\frac{\partial \phi}{\partial y}}{\frac{\partial \phi}{\partial z}} \qquad \text{...... (i)}$$

$f(x, y) = 0$ என்பதிலிருந்து,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \qquad \text{...... (ii)}$$

(i)-ஐயும் (ii)-ஐயும் பெருக்க,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}}$$

அல்லது

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$u = f(y - z, z - x, x - y)$ எனில்

$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$g = y - z, h = z - x, t = x - y$ என்றால் $u = f(g, h, t)$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial g} \cdot 0 + \frac{\partial u}{\partial h}(-1) + \frac{\partial u}{\partial t}(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial h} \qquad \dots \text{(i)}$$

இவ்வாறாகவே,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial g} - \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \dots \text{(ii)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial h} - \frac{\partial u}{\partial g} \qquad \dots \text{(iii)}$$

(i), (ii), (iii) இவைகளைக் கூட்ட,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில்

$\frac{d^2y}{dx^2}$ காண்க.

தீர்வு :

$$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ என்க.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(ax + hy + g)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2(hx + by + f)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 2h$$

இப்போது, $$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{[(f_y)^2 f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + (f_x)^2 f_{yy}]}{(f_y)^3}$$

$$= -8[(hx+by+f)^2 a - 2(ax+hy+g)(hx+by+f)h + b(ax+hy+g)]^2/8(hx+by+f)^3$$

$$= \{-(ab-h^2)[ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy] + af^2 + bg^2 - 2fgh\} \div (hx+by+f)^3$$

$$= -[(ab-h^2)(-c) + af^2 + bg^2 - 2fgh]/(hx+by+f)^3$$

$$= [abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2]/(hx+by+f)^3$$

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ என்பதைக் கோணதூர அமைப்பில் மாற்றி

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ என எடுத்துக்கொள்க. ... (i)

$r^2 = x^2 + y^2$ ... ... (ii)

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ ... (iii)

(ii)-லிருந்து, $2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x$

$$\therefore \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \frac{r\cos\theta}{r} \qquad \ldots \text{(i)-லிருந்து,}$$

ஆகவே $\dfrac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$ ... (iv)

இவ்வாறாகவே $\dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r} = \dfrac{r\sin\theta}{r} = \sin\theta$ ... (v)

(iii)-லிருந்து, $\dfrac{\partial\theta}{\partial x} = \dfrac{1}{1+(y/x)^2}\left(-\dfrac{y}{x}\right)$

$$= -\frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{r\sin\theta}{r^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{\sin\theta}{r} \qquad \ldots \text{(vi)}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2}$$

அல்லது $\dfrac{\partial\theta}{\partial y} = \dfrac{\cos\theta}{r}$

இப்போது $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial\theta}\cdot\dfrac{\partial\theta}{\partial x}$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}(\cos\theta) + \frac{\partial u}{\partial\theta}\left(-\frac{\sin\theta}{r}\right) \qquad \ldots \text{(iv), (vi)-ன் மூலம்}$$

அல்லது $\dfrac{\partial}{\partial x}(u) = \cos\theta\cdot\dfrac{\partial}{\partial r}(u) - \dfrac{\sin\theta}{r}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(u)$ ... (viii)

$$\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

... $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$-ஐ u-க்கு (viii)-ல் பிரதியிட,

$$= \cos\theta\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[\cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial\theta}\right]$$

$$- \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\cos\theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right]$$

$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right.$-ன் கோணதூர அமைப்புச் சமன்பாட்டை (viii)-லிருந்து பிரதியிட,$\left.\right)$

$$= \cos\theta\left[\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$- \frac{\sin\theta}{r}\left[\left(-\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\, \partial r}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]$$

$$= \cos\theta\left[\cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sin\theta\left\{\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial\theta}\right\}\right]$$

$$- \frac{\sin\theta}{r}\left[-\sin\theta \frac{\partial u}{\partial r} + \cos\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta}\right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\left(\sin\theta \frac{\partial^2 u}{\partial\theta} + \cos\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right)\right]$$

அல்லது $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \cos^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta}$$

$$+ \frac{\sin^2\theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$+ \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial\theta} \qquad \text{...... (ix)}$$

இவ்வாறாகவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \sin^2\theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r\, \partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}$$

$$+ \frac{\cos^2\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r} \frac{\partial u}{\partial\theta} \qquad \text{...... (x)}$$

(ix)-ஐயும் (x)-ஐயும் கூட்ட,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}(\sin^2\theta \cos^2\theta)\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

$$+ \frac{1}{r}(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}$$

ஆகவே,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$x^x y^y z^z = c$, $x = y = z$ எனில்

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -(x \log ex)^{-1}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$x^x y^y z^z = c \qquad \ldots\ldots(i)$$

z ஆனது x, y-ன் மூலம் விளக்கப்படலாம். அதாவது z ஆனது x, y-ல் சார்பலன்.

(i)-லிருந்து $z^z = \frac{c}{x^x y^y}$

ஆகவே $z \log z = \log c - x \log x - y \log y \qquad \ldots\ldots(ii)$

x-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, y-ஐப் பொறுத்து பகுதிவகையீடு செய்ய,

$$\left(z \cdot \frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial y} + \log z \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = -y \cdot \frac{1}{y} - \log y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1 + \log y}{1 + \log z}$$

$$= -\frac{\log_e ey}{\log_e ez} \quad [\because \log_e e = 1]$$

$\log e\, y$-ஐ மாறிலியாகக் கருதி x-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

ஆகவே $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[-\log ey/\log ez]$$

$$= \frac{\log ey}{(\log ez)^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(\log ez)$$

$$= \frac{\log ey}{(\log ez)^2} \cdot \frac{e}{ez} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \qquad \ldots\ldots \text{(iii)}$$

(ii)-ல் y-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு, x-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு செய்ய,

$$\left(z \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \log z \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = -x\frac{1}{x} - \log x.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1 + \log x}{1 + \log x}$$

$$= -\frac{\log ex}{\log ez}$$

இதனை (iii)-ல் பிரதியிட, $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{(\log ey)(\log ex)}{z(\log ez)^3}$$

$x = y = z$ எனில் $$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{1}{x \log ex} = -(x \log ex)^{-1}$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \text{ எனில்}$$

$u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 2(xu_x + yu_y + zu_z)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \text{ எனத் தரப்பட்டுள்ளது } \ldots\text{(i)}$$

இங்கே u ஆனது x, y, z-ல் சார்பலன்.

x-ஐப் பொறுத்து (i)-ஐப் பகுதி வகையீடு செய்ய,

$$\frac{2x}{a^2+u} - \left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

அல்லது
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{2x}{a^2+u}}{\left[\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+u)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]}$$

$$= \frac{\dfrac{2x}{(a^2+u)}}{\Sigma\left[\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}\right]}$$

இவ்வாறாகவே

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\dfrac{2y}{(a^2+u)^2}}{\Sigma\left[\dfrac{x^2}{a^2+u)^2}\right]}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\dfrac{2z}{(a^2+u)}}{\Sigma\left[\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}\right]}$$

$$\therefore \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) =$$

$$\frac{4\left[\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2} + \dfrac{y^2}{(b^2+u)^2} + \dfrac{z^2}{(c^2+u)^2}\right]}{\left[\Sigma\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}\right]^2}$$

$$u^2{}_x + u^2{}_y + u^2{}_z = \frac{4}{\left[\Sigma\dfrac{x^2}{(a^2+u)^2}\right]} \qquad \text{... (ii)}$$

மேலும்,

$$xu_x + yu_y + zu_z = x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + y\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{\Sigma\left[\dfrac{x^2}{a^2+u)^2}\right]}\left[\frac{2x^2}{(a^2+u)} + \frac{2y^2}{(b^2+u)} + \frac{2z^2}{(c^2+u)}\right]$$

((i), (ii) லிருந்து.)

$$= \frac{2}{\Sigma\left[\frac{x^2}{(a^2+u)^2}\right]} \quad \dots\dots \text{(iii)}$$

(ii), (iii)-லிருந்து,

$$u^2_x + u^2_y + u^2_z = 2\,(xu_x + yu_y + zu_z)$$

பயிற்சிகள் 9 (C)

1. $u = \sin(xy^2)$; $x = \log t$; $y = e^t$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

2. $u = x^2 + y^2$; $x = at^2$, $y = 2\,at$ எனில் $\frac{du}{dt}$ காண்க.

3. $u = x^2 y$; $x^2 + xy + y^2 = 1$ எனில் $\frac{du}{dx}$ காண்க.

4. $u = x^2 - y^2 + \sin yz$; $y = e^x$; $z = \log x$ எனில் $\frac{du}{dx} = 2x + e^x(-2y + z\cos yz) + \frac{y\cos yz}{x}$ என நிறுவுக.

5. $u = \sin(x^2 + y^2)$; $a^2 x^2 + b^2 y^2 = c^2$ எனில் $\frac{du}{dx}$ காண்க.

6. $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^3 + y^3 + 3axy = 5\,a^2$ எனில் $\frac{du}{dx}$ காண்க.

7. $f(x, y) = 0$; $\phi(x, y) = 0$ என்ற இரு வளைகோடுகள் தொட்டால், அந்தத் தொடும் புள்ளியில்

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}$$ ஆக இருக்கும் என நிறுவுக.

8. $z = xy\,f\left(\frac{y}{x}\right)$ எனில் $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$ என நிறுவுக. மேலும் z மாறிலி என்றால்

$$\left[f'\left(\frac{y}{x}\right)\Big/ f\left(\frac{y}{x}\right)\right] = \frac{x\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)}{y\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}$$ எனவும் நிறுவுக.

9. u, v என்பன x, y சார்பலன்களாகப் பின்வருமாறு அமைந்துள்ளன.

$$x = u + e^{-v} \sin u.$$

$$y = v + e^{-u} \cos u$$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x}$ என நிறுவுக.

10. $z = f(u, v)$; $u = x e^{y}$; $v = x e^{-y}$ எனில்

$x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - x \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\left(u^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + v^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$ என நிறுவுக.

11. $z = f(u, v)$; $u = x^2 - 2xy - y^2$; $v = y$ எனில்

$(x + y) \dfrac{\partial z}{\partial x} + (x - y) \dfrac{\partial z}{\partial y} = (x - y) \dfrac{\partial z}{\partial v}$ என நிறுவுக.

12. $z = f(u, v)$; $u = e^x \cos y$; $v = e^x \sin y$ எனில்

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (u^2 + v^2)\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)$ என நிறுவுக.

13. $u = x^2 + y^2$; $v = 2xy$, $V = f(u, v)$ எனில்

$x \dfrac{\partial V}{\partial x} - y \dfrac{\partial V}{\partial y} = 2(u^2 - v^2)^{1/2} . \dfrac{\partial V}{\partial u}$ என நிறுவுக.

14. $z = f(x, y)$; $x = e^{u} + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^{v}$ எனில்

$\dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{\partial z}{\partial v} = x \dfrac{\partial z}{\partial x} - y \dfrac{\partial z}{\partial y}$ என நிறுவுக.

15. $z = x^2 + y^3$; $x = \sin(u - v)$; $y = uv$ எனில்

$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}$-ன் மதிப்புக்களை u, v-ன் மதிப்புக்களாகக் காண்க.

16. $u = (A r^n + C r^{-n}) \sin n\theta$ ஆனது $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கோண தூர அமைப்பில் நிறைவு செய்யும் என நிறுவுக.

17. $a \sin x + b \sin y = c$

$a \cos x + b \cos z = c$ எனில்

$\dfrac{dy}{dz}$-ன் மதிப்பை y, z உறுப்புக்களால் காண்க.

18. $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ கண்டுபிடிக்கவும் :

(i) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(ii) $x^5 + y^5 = 5a^3x^2$

19. $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = a$ எனில்

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{a}{(1-x^2)^{3/2}} = 0$ என நிறுவுக.

விடைகள் 9(C)

1. $y^2(1/t + 2x) \cos (xy^2)$

2. $4a^2t^3 + 8a^2t$

3. $2xy - \dfrac{x^9(2x+y)}{x+2y}$

5. $2x \left\{ \cos (x^2+y^2) \left(1 - \dfrac{a^2}{b^2}\right)\right\}$

6. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \dfrac{y(x^2+ay)}{(y^2+ax)\sqrt{x^2+y^2}}$ — , 0

15. $3u^2v^2 + \sin 2(u-v)$, $3u^3v^2 - \sin 2(u-v)$

17. $\dfrac{\sin z\,(c-b \cos z)}{\cos y\,(c-b \sin y)}$

18. (i) $\dfrac{-2a^3xy}{(y^2-ax)^3}$ (ii) $\dfrac{6a^3x^2(a^3+x^3)}{y^9}$

9-5. மொத்தக் கூடுந்தொகை (Total Increment) ; மொத்த வகையீடு (Total differential)

இருமாறிகளில் அமைந்த சார்பலனுக்கு மொத்தக் கூடுந் தொகையாவது

x, y என்ற இருமாறிகளில் அமைந்த சார்பலனின் கூடுந் தொகையாவது ஒரே சமயத்தில் x-ம் y-ம் மாற்றங்கள் பெறுவ தாலுல் சார்பலனில் ஏற்படும் மொத்த மாற்றமாகும்.

x, y-ல் முறையே $\triangle x$, $\triangle y$ கூடுந்தொகை மாற்றங்களுக்கேற்ப $u = f(x, y)$-ல் ஏற்படும் மொத்தக் கூடுந்தொகையைக் காணல் :

$u = f(x, y)$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது ...... (1)

x, y-ல் முறையே $\triangle x$, $\triangle y$ கூடுந்தொகைகளுக்கேற்ப u-ல் உண்மை யான கூடுந்தொகை $\triangle u$ என்க.

எனவே,

$$u + \triangle u = f(x + \triangle x,\ y + \triangle y) \quad \ldots\ldots (2)$$

(2)-லிருந்து (1)-ஐக் கழிக்க,

$$\triangle u = f(x + \triangle x,\ y + \triangle y) - f(x, y) \quad \ldots\ldots (3)$$

$$= [f(x + \triangle x, y + \triangle y - f(x, y + \triangle y)]$$

$$+ [f(x, y + \triangle y) - f(x, y)] \quad \ldots\ldots (4)$$

பகுதி வகைக் கெழுக்களைத் தொடர்ச்சி உடையதெனக் கருதி, லெக்ராஞ்சியின் இடைமதிப்புத் தேற்றத்தை (4)-ன் வலப் பக்கத்தில் உள்ள இரண்டு வேறுபாடுகளுக்கும் பயன் படுத்துவோம்.

$$\triangle u = (\triangle x) f_x (x + \theta_1 \triangle x, y + \triangle y) + \triangle y\, f_y (x, y + \theta_2 \triangle y). \quad \ldots\ldots (5)$$

இங்கே $0 < \theta_1 < 1$; $0 < \theta_2 < 1$

எடுத்துக் கொள்ளப்பட்டுள்ள எல்லா x, y-க்கு f_x தொடர்ச்சி உடையதாகக் கருத $\triangle x \longrightarrow 0$, $\triangle y \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் $\text{Lt}\, f_x (x + \theta_1 \triangle x, y + \triangle y) = f_x (x, y)$

எனவே,

$$f_x\,(x + \theta_1 \triangle x, y + \triangle y) = f_x\,(x, y) + \epsilon_1$$

என எழுதலாம். இங்கே $\triangle x \longrightarrow 0,\ \triangle y \longrightarrow 0$ எனில் $\epsilon_1 \longrightarrow 0.$

இவ்வாறே, $f_y\,(x, y + \theta_2 \triangle y) = f_y\,(x, y) + \epsilon_2$

இங்கே $\triangle x \longrightarrow 0,\ \triangle y \longrightarrow 0$ எனில் $\epsilon_2 \longrightarrow 0.$

எனவே (5) என்ற சமன்பாடு பின் வருமாறு ஆகிறது.

$$\triangle u = (\triangle x)\, f_x\,(x, y) + (\triangle y)\ f_y\,(x, y) + \epsilon_1 \triangle x + \epsilon_2 \triangle y.$$

இங்கே $\triangle x \longrightarrow 0,\ \triangle y \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் $\epsilon_1 \longrightarrow 0,\ \epsilon_2 \longrightarrow 0$.

எனவே

$$\triangle u = \left[\frac{\partial n}{\partial x} \cdot \triangle x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \triangle y\right] + [\epsilon_1 \triangle x + \epsilon_2 \triangle y] \ \ldots\ldots (6)$$

இதனையே, x, y-ல் $\triangle x, \triangle y$ என்ற கூடுந்தொகைக்கிணைந்த u-ன் மொத்த கூடுந்தொகை எனக் கூறுகிறோம்.

குறிப்பு : $\triangle u$ என்ற மொத்தக் கூடுந்தொகையின் தலையாய மதிப்பு (Principle value) என $\frac{\partial u}{\partial x} \triangle x + \frac{\partial u}{\partial y} \triangle y$ என்ற பகுதியைக் குறிப்பிடுகிறோம்.

இந்தப் பிரதான பகுதியையே u-ன் வகையீடு எனக்கூறுகின்றோம்; d^u என்ற அடையாளத்தால் குறிப்பிடுகிறோம். ஆகவே,

$$d^u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \triangle x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \triangle y \qquad (7)$$

இதனை மொத்த வகையீடு என்றும் கூறுவதுண்டு.

தேற்றம் :

x, y என்ற இருமாறிகளில் முதல்வரிசைத் தொடர்ச்சியான பகுதி வகைக்கெழுக்களைக் கொண்ட சார்பலன் u என்றால் u-ன் மொத்த வகையீடான

$$d^u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

இங்கே dx, dy என்பன x, y-ல் தனித்த நுண் மாற்றங்கள்,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \triangle x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \triangle y$$ என அறிவோம்.

$u = x$ எனில் $du = dx = 1. \quad \triangle x = \triangle x.$

இவ்வாறே $u = y$ எனில் $\triangle y = dy$ எனவே

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy.$$

குறிப்பு 1: மேற்கண்ட முடிவைப் பொதுமைப் படுத்திக் கூறலாம்.

குறிப்பு 2: $dx. dy$ என்ற வகையீடுகள் x, y என்ற தனித்த மாறிகளில் மெய்யான மாற்றங்கள் ஆனுல் du என்ற வகையீடு u-ல் மெய்யான மாற்றமல்ல. du என்பது $\triangle u$ என்ற மாற்றத்தில் தலையாய பகுதியையே குறிக்கிறது.

கிளை: தோராயமான கணிப்புகள்:

x, y-ல் நுண்மாற்றங்களான $\triangle x$, $\triangle y$-க்கு இயைந்து u-ல் ஏற்படும் தோராய மாற்றமான du ஆனது

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 20:

ஒரு கோபுரத்தின் அடிமட்டத்திலிருந்து வரையப்பட்ட நேர் கோட்டில் இடையே a தூரம் உள்ள இரு புள்ளிகளில் இருந்து கோபுர உச்சியின் ஏற்றக் கோணங்கள் θ, ϕ ஆகும். $\delta\theta$, $\delta\phi$ என்னும் சிறு பிழைகள் காரணமாக உயரத்தைக் கணக்கிடுவதில் ஏற்படும் பிழை தோராயமாக

$$a(\sin^2\theta\ \delta\theta - \sin^2\phi\ \delta\theta) \operatorname{cose} c^2(\theta-\phi)$$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

AB என்ற கோபுர உயரம் h என்க. P, Q என்ற புள்ளிகளிலிருந்து படத்தில் குறிப்பிட்டுள்ளபடி கோபுர உச்சி A-ன் ஏற்றக் கோணங்கள் முறையே ϕ, θ.

QB $= x$ என்க.

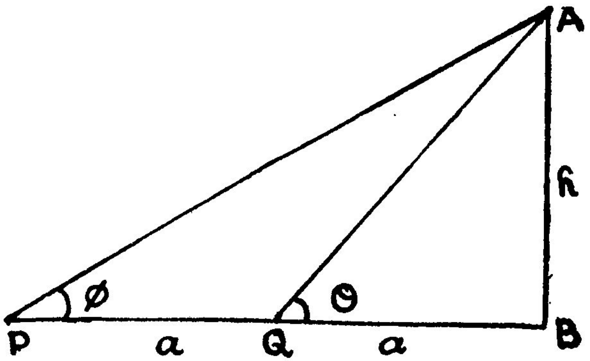
PQ $= a$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad x = h \cot \theta \qquad \dots (1)$$

$$x+a = h \cot \phi \qquad \dots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து x நீக்க

$$h = \frac{a}{\cot \phi - \cot \theta} = \frac{a \sin \phi \sin \theta}{\sin(\theta-\phi)}$$



படம் 9·2.

$$\therefore \quad \delta h = \frac{\partial h}{\partial \theta} \delta\theta + \frac{\partial h}{\partial \phi} \delta\phi$$

$$= \frac{a \sin \phi}{\sin^2 (\theta-\phi)} \left[\sin(\theta-\phi) \delta\theta \cos \theta - \sin \theta \cos(\theta-\phi) \right]$$

$$= \frac{a \sin \theta}{\sin^2(\theta-\phi)} \left[\sin(\theta-\phi) \cos \phi - \sin \phi \cos(\theta-\phi) \right] \delta\phi$$

$$= \frac{-a \sin^2 \phi}{\sin^2 (\theta-\delta)} \delta\theta + \frac{a \sin^2 \theta}{\sin^2 (\theta-\phi)} \delta\theta$$

$$= a(\sin^2 \theta \, \delta\phi - \sin^2 \phi \, \delta\theta) \operatorname{cosec}^2 (\theta-\phi).$$

எடுத்துககாட்டு 21 :

ஒரு கூம்பின் உயரம் h, அரை உச்சிக்கோணம் α அடிப்பாகம் உள்ளிட்ட மொத்த மேற்பரப்பு A. δh, $\delta\alpha$ என்பன முறையே h, α வில் ஏற்பட்ட சிறு பிழைகள் எனில், பரப்பில் ஏற்படும் பிழை என்ன ? மேலும் $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ஆக இருக்கும் போது h-இல் ஏற்படும் $+1\%$ பிழை α வில் ஏற்படும் $-0^\circ\cdot33$ பிழையினுல் சமன் செய்யப் படும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

கூம்புக்கு அடிப்பாகப் பரப்பு $= \pi h^2 \tan^2 \alpha$.

வளைமேற்பரப்பு $= \frac{1}{2}\, 2\pi h \tan\alpha\, h \sec\alpha$

$= \pi h^2 \tan\alpha \sec\alpha$

எனவே A $= \pi h^2(\tan^2\alpha + \tan\alpha\sec\alpha)$

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial h}\delta h + \frac{\partial A}{\partial \alpha}\delta\alpha \text{ தோராயமாக}$$

$$= 2\pi h \tan\alpha(\tan\alpha + \sec\alpha)\delta h + \pi h^2(2\tan\alpha\sec^2\alpha + \sec^3\alpha + \tan^2\alpha\sec\alpha)\,\delta\alpha$$

இதிலிருந்து δh, $\delta\alpha$ என்ற h, α பிழைகளுக்கு ஏற்ப A-ல் பிழை யானது δA-ஐ காணலாம்.

$\alpha = \pi/6$, $\delta h = h/100$ என மதிப்பிட

$\delta A = 2\pi h^2 \times 0\cdot01 + \pi h^2 \times 3\cdot4646\ \delta\alpha$

$\therefore\ \delta A = 0$ ஆக வேண்டுமாஞல்

$$\delta\alpha \text{ ஆரையன்} = \frac{-2\times0\cdot01}{3\cdot4646} \text{ ஆரையன்}$$

$$= \frac{-2\times0\cdot01\times57\cdot3}{3\cdot4646} \text{ பாகைகள்}$$

$$= -0^\circ\cdot33.$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

ஒரு முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட ஆரம் மாற்றமடையாத வாறு அதன் பக்கங்களும் கோணங்களும் மாறிஞல் $\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$ என நிறுவுக. இங்கே a, b, c என்பன பக்கங்கள். da, db, dc என்பன இவைகளின் சிறு கூடுந்தொகைகள்.

தீர்வு :

R சுற்றுவட்ட ஆரம் என்க.

$$\therefore \quad R = \frac{a}{2 \sin A}$$

$$\therefore \quad 0 = -\frac{a \cos A}{2 \sin^2 A}\, dA + \frac{da}{2 \sin A}$$

எனவே $\dfrac{da}{\cos A} = \dfrac{a}{\sin A}\, dA = 2R\, dA$

$$\therefore \quad \frac{da}{\cos A} = 2\, R\, dA$$

இவ்வாறே $\dfrac{db}{\cos B} = 2\, R\, dB$

$$\frac{dc}{\cos C} = 2\, R\, dC$$

எனவே $\dfrac{da}{\cos A} + \dfrac{db}{\cos B} + \dfrac{dc}{\cos C}$

$$= 2\, R\, (d A + d B + dC) = 0$$

ஆனால் $A + B + C = 0$

ஆதலால் $dA + dB + dC = 0$

எனவே

$$\frac{da}{\cos A} + \frac{db}{\cos B} + \frac{dc}{\cos C} = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

R என்பது ஒரு எறிபொருளின் வீச்சு. v, துவக்க திசை வேகம். α வீச்சின் கோணம். $R = \dfrac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. v-ல் 1% பிழையும் α-ல் $\frac{1}{2}$% பிழையும் இருப்பின் R-ன் பிழையின் சதவீதம் காண்க.

தீர்வு :

v-ல் பிழை 1% $\quad \therefore \dfrac{\Delta v}{v} \times 100 = 1$

α-ல் பிழை $\frac{1}{2}$% $\quad \therefore \dfrac{\Delta \alpha}{\alpha} \times 100 = \frac{1}{2}$

R-ன் பிழையின் சதவீதம் $\frac{\triangle R}{R} \times 100.$

$$R = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{g}$$ ஆதலால்

$$\log R = 2 \log v + \log \sin 2\alpha - \log g$$

எனவே இருபுறமும் வகையிடல் கண்டால்

$$\frac{dR}{R} = 2\frac{dv}{v} + \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \cos 2\alpha \cdot 2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{\alpha}$$

வகையீடுகளை கூடுந்தொகையால் மாற்ற தோராய பிழைச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{\triangle R}{R} \times 100 = 2\frac{\triangle v}{v} \times 100 + 2 \cot 2\alpha \cdot \frac{\triangle \alpha}{\alpha} \times 100$$

$$= 2.\ 1 + 2\alpha \cot 2\alpha \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= 2 + \alpha \cot 2\alpha$$

எனவே R-ன் பிழையின் சதவீதம்

$$= (2 + \alpha \cot 2\alpha)\ \%$$

பயிற்சிகள் 9 (D)

1. ஒரு நீள் வட்டத்தின் பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவற்றை அளப்பதில் ஏற்படும் 1% பிழையினால் பரப்பில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையினைக் கணக்கிடுக.

2. $T = 2\pi \sqrt{l/g}$ என்பது தனி ஊசலின் அலைவு காலத்தைக் குறிக்கும்.

(i) l, g-யில் பிழைகள் dl, dg ஆனால் T-யில் பிழை என்ன ?

(ii) l, g-யில் 1% பிழையானால் T-யில் உச்ச சதவீதப்பிழை என்ன ?

(iii) l, T ஆகியவற்றின் மதிப்புகளில் முறையே 1%, 0.5% பிழைகள் ஏற்பட வாய்ப்பு உண்டானால் g-யில் உச்சப்பிழை 2%க்கு மேல் இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

3. ஒரு கூம்பின் ஆரை 4 செ.மீ. உயரம் 6 செ.மீ. அளவுகோலில் 1 செ.மீ.க்கு 0.01 செ.மீ. பிழையிருந்தால் பருமத்திலும்

(அடிப்பாகம் உள்ளிட்ட) மொத்த மேற்பரப்பிலும் பிழை என்ன?

4. $\tan\frac{1}{2}E = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\tan\frac{1}{2}V$ என்ற சமன்பாட்டில் e, V என்பன முறையே δe, δV சிறுபிழைகள் பெறுவதற்கு இடம் உண்டானால் முதல் நிலைத்தோராயமாக E-ல்

$\sin E\left(\frac{\delta v}{\sin v} - \frac{\delta e}{1-e^2}\right)$ என்ற பிழை ஏற்பட இடம் இருக்கிறது என நிறுவுக.

5. $N = \frac{8\pi I l}{t^2 r^4}$ என்ற வாய்ப்பாட்டில் l, 2% குறைய r, 2% அதிகரிக்க t, 1·5% அதிகரிக்க N-ன் மதிப்பு தோராயமாக 13% குறையும் என நிறுவுக. (I மாறிலி)

6. ஒரு வட்டத்துண்டின் நாணின்நீளம் a, உச்ச உயரம் b, இவற்றைக் கொண்டு வட்டத்தின் விட்டம் கணக்கிடப்படுகிறது. a, b அளவை ஒவ்வொன்றிலும் p% குறைவுப் பிழை ஏற்படுவதால் விட்டக் கணிப்பில் ஏற்படும் சதவீதப் பிழையைக் கணக்கிடுக.

7. $z = 2xy^2 - 3x^2y$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது. z மாறாமலிருக்க வேண்டுமானால் x ஆனது $x = 3$ என்ற மதிப்பைக் கடக்கும் போது விநாடிக்கு 2 அங். அதிகரிக்கும் எனில் y ஆனது $y = 1$ என்னும் மதிப்பைக் கடக்கும்போது விநாடிக்கு $2\frac{2}{15}$ அங். குறையும் என நிறுவுக.

8. ABC என்ற குறுங்கோண முக்கோணத்தில் BC நிலையானது BC-க்கு இணையாக A என்னும் உச்சி δx என்ற சிறுதூரம் நகர b, c, A, B என்பன முறையே δb, δc, δA, δB சிறு கூடுதொகைகள் மாற்றம் பெற்றால் $c\delta b + b\delta c + bc\cot A\cdot\delta A = 0$ என்று $c\delta B + \sin B\delta x = 0$ என்றும் நிறுவுக.

9. ஒரு முக்கோணத்தில் பக்கம் a, கோணங்கள் B, C இவைகளைக் கொண்டு $\triangle$ ABC யின் பரப்பு தீர்மானிக்கப்படுகிறது. B, C யின் மதிப்புக்களில் சிறு பிழைகள் இருந்தால் பரப்பு கணக்கிடும்போது $\frac{1}{2}(b^2\,\delta C + c^2\,\delta B)$ என்ற பிழை ஏற்படும் என நிறுவுக.

10. ஒரு முக்கோணத்தில் a, b, c பக்கங்களைக் கொண்டு கோணங்கள் கணக்கிடப்படுகின்றன. பக்கங்களில் δa, δb, δc சிறு மாற்றங்கள். $\triangle$, முக்கோணப் பரப்பு என்றால் தோராயமாக

$\delta A = \frac{1}{2} a \frac{(\delta a - \delta b \cos C - \delta c \cos B)}{\triangle}$ என்றும் $\delta A + \delta B + \delta C = 0$ என்றும் நிறுவுக.

11. b என்னும் பக்கமும் A, C கோணங்கள் கொண்டு பரப்பு கணக்கிடப்படுகிறது. A அளக்கும்போது δA என்ற சிறு பிழை ஏற்பட்டால் $\frac{100\,\delta A . \sin C}{\sin A \cdot \sin (A + C)}$. என்ற சதவீதப் பிழை பரப்பில் தோராயமாக ஏற்படும் என நிறுவுக.

12. முக்கோணம் ABC-யில் முக்கோணப் பரப்பும், C என்னும் பக்கமும் மாற்றம் பெறுதவாறு கோணங்களும் a, b என்னும் பக்கங்களும் மாறுகின்றன. a, b என்பன முறையே δa, δb எனும் சிறு அளவுகளால் மாறினல் $\cos A \cdot \delta a + \cos B\, \delta b = 0$ என நிறுவுக.

13. ABC என்ற முக்கோணத்தின் பரப்பு $\triangle$, b, c, A என்பன வற்றின் சார்பலனுனல்

$$\frac{d\triangle}{\triangle} = \frac{db}{b} + \frac{dc}{c} + \cot A \cdot dA$$ என நிறுவுக.

14. $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$ மாறிலியாக இருக்குமாறு ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களான A, B, C அமைந்திருந்தால்

$$\frac{dA}{dB} = \frac{\tan C - \tan B}{\tan A - \tan C}$$ என நிறுவுக.

15. ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு $\triangle$ ஆனது a, b, c பக்கங்களால் கணக்கிடப்படுகிறது.

(i) λ என்ற ஒரே சிறு அளவால் a குறைய, b அதிகரிக்க பரப்பில் ஏற்படும் மாற்றமானது $\frac{\delta\triangle}{\triangle} = \frac{2(a-b)\lambda}{c^2-(a-b)^2}$ என நிறுவுக.

(ii) $2s = a+b+c$ எனில் c-ஐ அளப்பதனுல் ஏற்படும் சிறு பிழை காரணமாகப் பரப்பில் ஏற்படும் சிறு பிழையானது

$$\frac{\triangle}{4}\left[\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} - \frac{1}{s-c}\right] \triangle c$$ என நிறுவுக.

16. குறுங்கோண முக்கோணம் ABC-யின் பக்கங்கள் அளக்கப்படுகின்றன. a, b, c-யில் சிறு கூடுந்தொகைகளின் பயனாக A-யின் கூடுந்தொகை $bc \sin A \, \delta A = -a(\cos C \cdot \delta b + \cos B \, \delta c - \delta a)$ என்பதால் பெறப்படும் என நிறுவுக.

எந்தப் பக்கத்தின் நீளத்திற்கும் $\pm \mu \%$ எல்லைகளுக்குட்பட்டுப் பிழை அமையுமானால் A-யின் பிழைக்கு எல்லைகள் தோராயமாக $\pm 1 \cdot 15 \left(\dfrac{\mu a^2}{bc \sin A} \right)$ பாகைகள் என நிறுவுக.

விடைகள் 9(D)

1. 2%   2. (i) $\dfrac{T}{2}\left[\dfrac{\delta l}{l} - \dfrac{\delta g}{g}\right]$ (ii) 1%

3. 3·02 க. செ. மீ., 2·82 க. செ. மீ.   6. $2p$.

10. வளைவு

§ 10-0. அறிமுகம்

சாதாரணமாக வளைகோடு குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் வளைந்திருக்கிறது அல்லது தட்டையாக இருக்கிறது எனக் கூறுவது உண்டு. இதற்குக் கணித விளக்கம் தந்து, புள்ளியில் வளைகோடு பெற்றுள்ள "வளையும் தன்மையை" அளந்து காண முயல்வதே இப்பகுதியின் குறிக்கோள். நாம் அளக்க முற்படும் வளைகோட்டின் இத்தன்மையை வளைவு (curvature) எனக் கூறுவோம். இதற்கு நாம் மனதில் கொண்டுள்ள வளையும் தன்மையைப் பிரதிபலிக்குமாறு ஒரு வரையறை கூறுவோம்.

§ 10-1. வரையறைகள்

ஒரு வளைகோட்டில் P-க்கு அணுக்கமான Q என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்க. வளைகோட்டில் A என்பது ஒரு நிலைப்புள்ளி என்க. வில் $AP = s$ எனவும், வில் $AQ = s + \Delta s$ எனவும், எடுத்துக் கொண்டால் $PQ = \Delta s$.

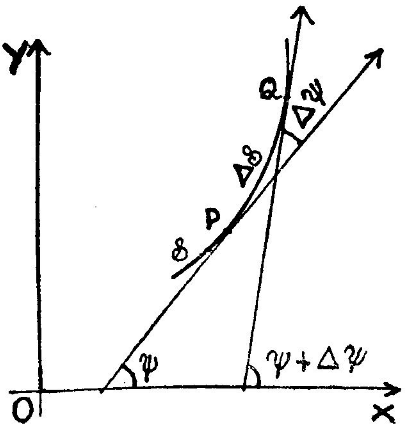
P, Q என்ற புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் வரைந்தால் அவை ஒரு நிலையான கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணங்கள் முறையே ψ, $\psi + \Delta\psi$ என்க.

பின்வரும் வரையறைகளைக் கூறுகிறோம்.

(i) ஒரு புள்ளி வளைகோட்டு வழியே P-லிருந்து Q-க்கு Δs தூரம் நகருகையில் தொடுகோடு நகர்ந்த கோண அளவு $\Delta\psi$-க்குச் சமம். $\Delta\psi$ என்பதை PQ என்ற வில்லின் மொத்த வளைவு (Total curvature) என்கிறோம்.

(ii) PQ-ன் சராசரி வளைவு (Average curvature) என $\dfrac{\Delta\psi}{\Delta s}$ என்ற விகிதத்தைக் கூறுகிறோம்.

(iii) P என்ற புள்ளியில் வளைவு (curvature) என வில் $\Delta s \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் சராசரி வளைவின் எல்லை மதிப்பைக் கூறுகிறோம்.



படம் 10·1.

அதாவது

$$\boxed{\text{P-ல் வளைவு}} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \boxed{\frac{d\psi}{ds}}$$

§ 10-3·0. வட்டத்தின் வளைவு

முதலில் வளைவுக்கு நாம் கொடுத்த வரையறைப்படி வட்டத்தின் எந்தப் புள்ளியிலும் வளைவு மாறிலி என நிறுவுவோம். c-ஐ மையமாகவும், r-ஐ ஆரையாகவும் உள்ள வட்டத்தில் P, Q என்பன அணுக்கமான இரு புள்ளிகள். வில் PQ $= \Delta s$ என்க. P, Q-ல் தொடுகோடுகள் OX உடன் உண்டாக்கும் கோணங்கள் முறையே, ψ, $\psi + \Delta\psi$ எனில்

$\angle$PCQ = P, Q தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம்.

$= \Delta\psi$ (ஆரையன்)

எனவே,

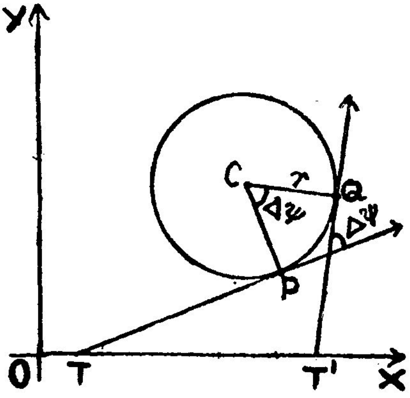
வில் PQ $= \Delta s = r\,\Delta\psi$ (வடிவ கணிதம் மூலம்.)

எனவே,

$$\frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{1}{r}$$

ஆகையால்,

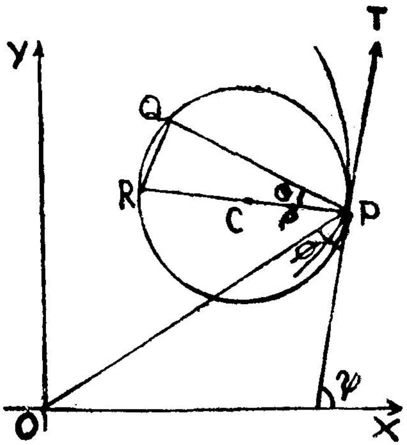
$$\underset{\Delta s \to 0}{\mathrm{Lt}} \frac{\Delta\psi}{\Delta s} = \frac{d\psi}{ds} = \frac{1}{r}$$



படம் 10·2

எனவே வட்டத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளைவு மாறிலி என்பதும், அது ஆரையின் தலை கீழ் பின்னத்திற்குச் சமம் என்பதும் தெரிய வருகிறது.

§ 10-3·1. வளைவு வட்டம் :



படம் 10·3.

இனி வளைவு வட்டம் (circle of curvature) என்பதற்கு வரையறை தருவோம்.

வளைகோட்டில் P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. P-ல் வளைவானது $\frac{d\psi}{ds} = k$ எனக் கொள்க.

$$\rho = \frac{1}{k} = \frac{ds}{d\psi} \qquad \ldots (1)$$

என அமையுமாறு ρ என்ற மதிப்பைக் காண்க.

ρ என்ற ஆரையும், C என்ற மையைத்தையும் கொண்ட வட்டத்தை அவ்வட்டமும் வளைகோடும் P-ல் பொதுவான தொடுகோட்டைப் பெற்றிருக்குமாறு வரைக. வளைகோடு, தொடுகோட்டின் எப்பக்கத்தில் அமைந்துள்ளதோ அதே பக்கத்தில் அமையுமாறு அவ்வட்டம் வரையப்பட வேண்டும். (1)-ன் படி P-ன் வட்டத்தின் வளைவும் வளைகோட்டின் வளைவும் ஒன்றே. இவ்வட்டத்தை P-ல் வளைவு வட்டம் (circle of curvarure) என்போம்.

இவ்வட்டத்தின் மையத்தை P-ல் தொடுகோட்டிற்கு வளைவு மையம் (centre of curvature) என்போம். CP = ρ என்ற ஆரத்தை (இது வளை கோட்டிற்கு வரைச் செங்கோடாக உள்ளது.) P-ல் வளைகோட்டிற்கு வளைவாரை (radius of curvature) என்போம்.

P-லிருந்து குறிப்பிட்ட திசையில் ஒரு கோடு வரைய, அது வளைவு வட்டத்திஞல் துண்டாடப்படும் நீளத்தை அத்திசையில் வளைவு நாண் (Chord of curvature) என்போம். எடுத்துக் காட்டாக PQ என்ற நாண் PC உடன் θ கோணத்திலமைந்திருந்தால் அத்திசையில் வளைவு நாணின் நீளம்

$$= PR \cos\theta$$

வளைவு நாண் $= 2\rho\cos\theta$.

§ 10.4 வளைவாரைக்கு வாய்பாடுகள்.

1. உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு : $s = f(\psi)$

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் குறிப்பிட்ட நிலைப் புள்ளியிலிருந்து அளந்த வில் நீளம் (s), இவ்வில்லின் இரு முனைகளிலும் வரைந்த தொடுகோடுகளுக்கு இடையில் உள்ள கோணம் ψ. இவை இரண்டையும் தொடர்பு படுத்தும் சமன்பாட்டை, வளைகோட்டின் உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு (Intrinsic equation of the curve) எனக் கூறுகிறோம். இத்தகைய அமைப்பில் வளைகோட்டின்

சமன்பாடு தரப்பட்டால், $\rho = \frac{\Delta s}{\Delta \psi}$ ... ... (1) என்ற வளைவாரைக்கு வாய்பாடு எளிதாகப் பயன்படுத்தும் முறையில் கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$s = a \log(\sec \psi + \tan \psi) + a \sec \psi \tan \psi$ என்ற வளை கோட்டின் வளைவாரையை (s, ψ) என்ற புள்ளியில் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு :

$$s = a \log(\sec \psi + \tan \psi) + a \sec \psi \tan \psi.$$

$$\therefore \text{ வளைவாரை } = \frac{ds}{d\psi} = \frac{a}{\sec \psi + \tan \psi}(\sec \psi \tan \psi + \sec^2 \psi) + a \sec^3 \psi + a \sec \tan^2 \psi.$$

$$= \frac{a \sec \psi.(\tan \psi + \sec \psi)}{(\sec \psi + \tan \psi)} + a \sec \psi (\sec^2 \psi + \tan^2 \psi)$$

$$= a \sec\psi + a \sec\psi (2 \sec^2\psi - 1) \quad [\because \tan^2\psi = \sec^2\psi - 1]$$

$$= 2 a \sec^3 \psi$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$s^2 = 8ay$ என்ற வளைகோட்டிற்கு

$\rho = 4a \sqrt{1 - \frac{y}{2a}}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$s^2 = 8ay$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது ... (1)

s-ஐப் பொறுத்து வகையிடு செய்ய,

$$2s = 8a \frac{dy}{ds}$$

$$(\text{அது}) \quad s = 4a \frac{dy}{ds}$$

$$= 4a \sin \psi \quad \ldots \ldots \left[\because \frac{dy}{ds} = \sin \psi\right]$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{ds}{d\psi} = 4a \cos\psi$$

$$= \sqrt{1-\sin^2\psi}$$

$$= 4a\sqrt{1-\left(\frac{s}{4a}\right)^2} \qquad \left[\because s = 4a \sin\psi\right]$$

$$= 4a\sqrt{1-\frac{s^2}{16a^2}}$$

$$= 4a\sqrt{1-\frac{8ay}{16a^2}} \quad \ldots\ldots \text{(i)-ன் மூலம்}$$

$$= 4a\sqrt{1-\frac{y}{2a}}$$

2. கார்ட்டிஷியன் அமைப்பு : *(வெளிப்படைச் சார்பு)*

$$y = f(x)$$

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டின் (x, y) எனும் புள்ளியில் தொடுகோடு ψ எனும் கோணத்தை x அச்சுடன் உண்டாக்கினால்

$$\tan\psi = \frac{dy}{dx} = y_1$$

எனவே s-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$\sec^2\psi \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\right)$$

$$= \frac{d^2y}{dx^2}\cdot\cos\psi$$

$$\rho = \frac{ds}{d\psi} = \frac{\sec^3\psi}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{\left\{1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\therefore \quad \boxed{\rho = \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2}} \qquad \ldots\ldots(2)$$

குறிப்பு 1 : வாய்பாட்டில் $y_2 \neq 0$ ஆக இருக்கவேண்டும்.

குறிப்பு 2 : வாய்பாடு (2)-ல் பின்னமேல் பகுதிக்கு மிகைத் தீர்வு எடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே y_2 மிகையாக இருக்கும்போது வளைவரை மிகையாக இருக்கிறது ;

y_2 குறையாக இருக்கும்போது வளைவரை குனறவாக இருக்கிறது. நடைமுறையில் ρ-ன் எண் மதிப்பையே பயன்படுத்துவோம்.

குறிப்பு 3 : ρ-ஐ வரையறை செய்யும்போது அச்சுக்களின் தேர்வை எவ்விதத்திலும் பயன்படுத்தவில்லை. எனவே x, y அச்சுக்களைப் பரிமாற்றம் செய்தால் ρ-ன் மதிப்பு மாறுபடாது. எனவே

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2x}{dy^2}}$$

(அது)
$$\boxed{\rho = \frac{\{1 + x_1^{\,2}\}^{3/2}}{x_2}}$$

$x = f(y)$ எனத் தரப்பட்டிருந்தாலும் $y_2 = 0$ ஆக இருந்தாலும் மேற்கூறிய வாய்பாடை ($x_2 \neq 0$ எனில்) பயன்படுத்தலாம்.

3. கார்ட்டிஷியன் அமைப்பு (உட்படுச் சார்பு) : $f(x, y) = 0$

$f_y(x, y) \neq 0$ ஆக இருக்கும் புள்ளியில்

$$f_x + f_y \frac{dy}{dx} = 0$$

மறுபடியும் x-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{\psi f_x}{\psi x} + \frac{\psi f_x}{\psi y} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\psi f_y}{\psi x} + \frac{\psi f_y}{\psi y} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + f_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$f_{xy} = f_{xy}$ எனக் கொண்டு,

$$(\text{அ.து})\ f_{xx} + 2f_{yx}\frac{dy}{dx} + f_{yy}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + f_y \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

$\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ என்பனவற்றிற்கு (2)-ல் பிரதியிட,

$$\rho = \frac{\left(1 + \frac{f_x^2}{f_y^2}\right)^{3/2} f_y}{f_{xx} + 2f_{yx}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right) + f_{yy}\left(-\frac{f_x}{f_y}\right)^2}$$

$$\boxed{\rho = \frac{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{yx} \cdot f_x \cdot f_y + f_{yy} f_x^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

வளைவாரை காண்க.

$$y = c \log \sec \frac{x}{e}$$

தீர்வு :

$$y = c \log \sec \frac{x}{c}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{c}{\sec \frac{x}{e}} \sec \frac{x}{c} \cdot \tan \frac{x}{c} \cdot \frac{1}{c}$$

$$= \tan \frac{x}{c}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{c} \sec^2 \frac{x}{c}$$

$$\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{y_2}$$

$$= \frac{\left(1 + \tan^2 \frac{x}{c}\right)^{3/2}}{\frac{1}{c} \sec^2 \frac{x}{c}}$$

$$= \frac{c \sec^3 . \frac{x}{c}}{\sec^2 \frac{x}{c}}$$

$$= c \sec \frac{x}{c}.$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$y = 4 \sin x - \sin 2x$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $x = \dfrac{\pi}{2}$ என்ற புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

தீர்வு :

$y = 4 \sin x - \sin 2x$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\dfrac{dy}{dx} = 4 \cos x - 2 \cos 2x$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\pi/2} = 0 + 2 \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \cos \pi = -1\right.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4 \sin x + 4 \sin 2x$$

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{x=\frac{\pi}{2}} = -4 + 0.$$

எனவே

$$\rho = \frac{(1 + y_1^2)^{3/2}}{|y_2|}$$

$$= \frac{(1 + 4)^{3/2}}{|-4|}$$

$$= \frac{+(5)^{3/2}}{|-4|}$$

$$\therefore \rho = \frac{5\sqrt{5}}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$y = a \cosh \dfrac{x}{a}$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவாரை வளைகோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டுத் துண்டத்திற்குச் சமமாக இருக்கும் என்றும் நிலைத்தூரத்தின் வர்க்கத்திற்கு ஏற்ப மாறும் என்றும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \text{ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\frac{dy}{dx} = a \sinh\left(\frac{x}{a}\right)\frac{1}{a}$$

$$= \sinh\frac{x}{a}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}$$

$$\rho = \frac{(1+y_1^2)^{3/2}}{y_2} = \frac{\left(1+\sinh^2\frac{x}{a}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a}\cosh\frac{x}{a}}$$

$$= a\frac{\cosh^3\frac{x}{a}}{\cosh\frac{x}{a}} = a\cosh^2\frac{x}{a}$$

வளைகோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங் கோட்டுத்துண்டம்.

$$= y\sec\psi = y\sqrt{1+\tan^2\psi}$$

$$= y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\sqrt{1+\sinh^2\psi}$$

$$= a\cosh\frac{x}{a}\cdot\cosh\frac{x}{a} = a\cosh^2\frac{x}{a}$$

மேலும் $\rho = a\cosh^2\frac{x}{a} = \dfrac{a^2\cosh^2\frac{x}{a}}{a} = \dfrac{y^2}{a}$

$$\therefore\quad \rho \propto y^2$$

4 துணையலகுச் சமன்பாடுகள் ; $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ t-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்வதற்கு கீறு (Dash) அடையாளத்தால் குறிப்போம்.

இங்கே $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt} \Big/ \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{y'}{x'}$; $x' \neq 0$ எனில்

எனவே,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{x'\,y'' - y'\,x''}{(x')^2} \cdot \frac{1}{x'} = \frac{x'\,y'' - y'\,x''}{(x')^3}$$

$$\rho = \left[1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2\right]^{3/2} \frac{(x'\,y'' - y'\,x'')}{(x')^3}$$

$$= \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'\,y'' - y'\,x''}; \quad x'\,y'' - y'\,x'' \neq 0 \text{ எனில்}$$

$$\boxed{\rho = \frac{[\{\phi'(t)\}^2 + \{\psi'(t)\}^2]^{3/2}}{\phi'(t)\,\psi''(t) - \phi''(t)\cdot\psi'(t)};}$$

$$(\phi'(t)\cdot\psi''(t) - \phi''(t)\cdot\psi'(t) \neq 0 \text{ எனில்})$$

எடுத்துக்காட்டு 6 ;

ஒரு நீள் வளையத்தின் இரு இணைவிட்டங்களின் (conjugate diameters) முனைகளில் ρ, ρ_1 என்பன வளைவாரைகள் எனில்

$$(\rho^{2/3} + \rho'^{2/3})(ab)^{2/3} = a^2 + b^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

P (t), Q $(t+90°)$ என்பன இரு இணைவிட்டங்களின் முனைப் புள்ளிகள். முதலில் P $(a\cos t,\ b\sin t)$ என்ற புள்ளியில் ρ காண்போம்.

$$x' = -a\sin t \quad ; \quad x'' = -a\cos t$$

$$y' = b\cos t \quad ; \quad y'' = -b\sin t.$$

எனவே

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''} = \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab(\sin^2 t + \cos^2 t)}$$

P-ல் $\rho = \dfrac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$ ... (i)

(i)-ல் t-க்குப் பதிலாக $90°+t$-ஐப் பிரதியிட, Q-ல் வளைவாரை, அதாவது ρ'-ஐப் பெறுகிறோம்.

எனவே,

$$\rho' = \frac{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)^{3/2}}{ab}$$

$$(\rho^{2/3} + \rho'^{2/3})(ab)^{2/3} = a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
$$= a^2 + b^2$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவாரை x அச்சுக்கும், வளைகோட்டிற்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டுத் துண்டத்தைப் போல் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

தீர்வு :

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது

எனவே $x' = a(1 - \cos t)$, $x'' = a(\sin t)$

$$\therefore \quad y' = a \sin t, \qquad y'' = a \cos t.$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)}$$

$$y_2 = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{x'}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \left(\frac{x'y'' - y'x''}{(x')^2}\right)\frac{dt}{dx}$$

$$= \left\{\frac{a^2 \cos t\,(1 - \cos t) - a^2 \sin^2 t}{a^2(1 - \cos t)^2}\right\} \frac{1}{a(1 - \cos t)}$$

$$= \frac{a^2 \cos^2 t - a^2}{a^3(1 - \cos t)^3}$$

$$= -\frac{a^2\,(1 - \cos t)}{a^3\,(1 - \cos t)^3}$$

$$= -\frac{1}{a\,(1 - \cos t)^2}$$

$$\therefore \rho = \frac{\left\{1 + \dfrac{a^2 \sin^2 t}{a^2 (1 - \cos t)^2}\right\}^{3/2}}{y^2}$$

$$= \frac{[a^2 (1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2 \cos t)]^{3/2}}{y^2}$$

$$= \frac{[2a^2 (1 - \cos t)]^{3/2}}{\left(-\dfrac{1}{a}\right) \cdot \dfrac{1}{(1 - \cos t)^2} a^3 (1 - \cos t)^3}$$

$$= - 2^{3/2} \cdot a (1 - \cos t)^{1/2}$$

$$= 2^{3/2} a (1 - \cos t)^{1/2}$$

$$= 2^{3/2} a \left[2 \sin^2 \frac{t}{2}\right]^{1/2} = 4a \sin \frac{t}{2}$$

வளைகோட்டிற்கும் x அச்சிற்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டுத் துண்டம்.

$$= y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= a (1 - \cos t) \sqrt{1 + \left(\frac{y'}{x'}\right)^2}$$

$$= a (1 - \cos t) \sqrt{1 + \left[\frac{a \sin t}{a (1 - \cos t)}\right]^2}$$

$$= a (1 - \cos t) \sqrt{\frac{a^2 (2 - 2 \cos t)}{a^2 (1 - \cos t)^2}}$$

$$= \frac{a (1 - \cos t)}{a (1 - \cos t)} \cdot a \sqrt{2 (1 - \cos t)}$$

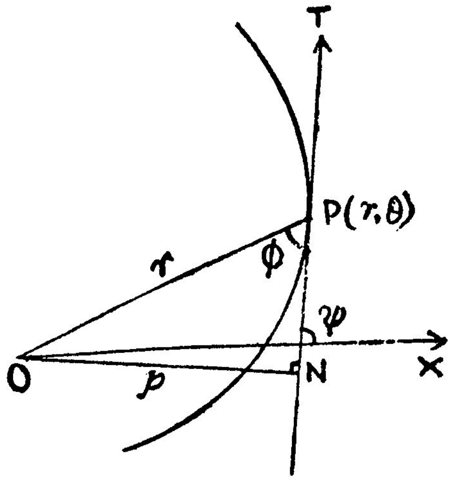
$$= \sqrt{2}\, a \cdot \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{1/2}$$

$$= 2a \sin \frac{t}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \rho$$

5. பாதச் சமன்பாடு : $p = f(r)$

படத்தில்



படம் 10·4.

$$\psi = \theta + \phi, \quad p = r \sin \phi.$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds}$$

$$= \frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{ds} \cdot \frac{dr}{ds}$$

$$\therefore \frac{1}{\rho} = \frac{\sin \phi}{r} + \cos \phi \frac{d\phi}{dr} \qquad \left(\because \sin \phi = r \frac{d\theta}{ds} \quad \cos \phi = \frac{dr}{ds} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \left(\sin \phi + r \cos \phi \cdot \frac{d\phi}{ds} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \sin \phi) = \frac{1}{r} \frac{dp}{dr}$$

எனவே,

$$\boxed{\rho = r\frac{dr}{dp}} \quad \ldots\ldots (5)$$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$p = \frac{r^{n+1}}{a^n}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவாரையானது ஆரை வெக்டரின் $n-1$ படிக்கு நேர்மாறு விகிதத்தில் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$p = \frac{r^{n+1}}{a^n}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

r-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{dp}{dr} \cdot a^n = (n+1)\, r^n$$

$$\therefore \quad \rho = r \cdot \frac{dr}{dp}$$

$$= r\, \frac{a^n}{(n+1)\, r^n}$$

$$= \frac{a^n}{(n+1)\, r^{n-1}}$$

எனவே

$p = \frac{r^{n+1}}{a^n}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வளைவாரையானது ஆரை வெக்டரின் $n-1$ படிக்கு நேர்மாறு விகிதத்தில் அமைகிறது.

6(A) கோணதூரச் சமன்பாடு : $r = f(\theta)$

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 \text{ என அறிவோம்.}$$

r-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^3}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^4}\cdot 2\cdot\frac{dr}{a\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{d\gamma}$$

(அ-து)

$$-\frac{2}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr} = -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{2}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

இதிலிருந்து

$$\rho = r\frac{dr}{dp} = r\frac{1}{p^3}\Big/\frac{1}{r^5}\left\{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right\}$$

$$\boxed{\rho} = \frac{r^6\left\{\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

ஆகையால்

$$\boxed{= \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}} \quad \ldots (6)$$

6(B) கோண தூரச் சமன்பாடு: $u = \frac{1}{r} : u = f(\theta)$

$$r = \frac{1}{u} \text{ ஆதலால் } \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta};$$

$$\frac{dr^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$= -\frac{1}{u^2}\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{2}{u^3}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$$

(அது) $\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2,$

$$-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{1}{u}\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{2}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2.$$

$$\therefore \quad \rho = \frac{r^3\left\{1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{1+\frac{2}{r^2}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}}$$

என்பது

$$\rho = \frac{\left[1+\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{u\left\{1+\frac{2}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{u}\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{2}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}}$$

அ-து
$$\boxed{\rho = \frac{\left\{u^2+\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{u^2\left\{u+\frac{d^2u}{d\theta^2}\right\}}} \quad \ldots \quad (6)$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$r = a\,e^{m\theta}$ என்னும் வளைகோட்டில் $(r\theta)$ என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

தீர்வு :

$r = a\,e^{m\theta}$. எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே, $\dfrac{dr}{d\theta} = a\,e^{m\theta}\,.\,m = rm$

$$\therefore \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{dr}{d\theta}\,m = rm^2$$

எனவே

$$\rho = \frac{\left[r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{\left[r^2-2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\right]}$$

$$\therefore \rho = \frac{[r^2 + r^2 m^2]^{3/2}}{r^2 + 2r^2 m^2 - r^2 m^2}$$

$$= (r^2 + m^2)^{1/2}$$

$m = \cot \alpha$ எனில்

$$\rho = r(1 + \cot^2 \alpha)^{1/2}$$

$$= r \operatorname{cosec} \alpha$$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$\theta = (a^{-1})(r^2 - a^2)^{1/2} - \cos^{-1}\frac{a}{r}$ என்ற வளைகோட்டில் (r, θ) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை $(r^2 - a^2)^{1/2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\theta = (a^{-1})(r^2 - a^2)^{1/2} - \cos^{-1}\frac{a}{r}$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

r ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\ \frac{2r}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2}}\left(-\frac{a}{r^2}\right)$$

அது $$\frac{d\theta}{dr} = \frac{r}{a\sqrt{r^2 - a^2}} - \frac{a}{r\sqrt{r^2 - a^2}}$$

$$= \frac{r^2 - a^2}{ar\sqrt{r^2 - a^2}} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}}{ar}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - a^2}}$$

மறுபடி θ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{\sqrt{r^2 - a^2}.a - ar\ \frac{2r}{2\sqrt{r^2 - a^2}}}{r^2 - a^2}\ \frac{dr}{d\theta}.$$

$$= \frac{a(r^2 - a^2) - ar^2}{(r^2 - a^2)^{3/2}}\left(\frac{rr}{\sqrt{r^2 - a^2}}\right)$$

$$= -a^4 r/(r^2 - a^2)^2$$

$$\therefore \rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}.$$

$$= \frac{\left[r^2 + \frac{a^2r^2}{(r^2 - a^2)}\right]^{3/2}}{r^2 + \frac{2a^2r^2}{r^2 - a^2} + \frac{a^4r^2}{(r^2 - a^2)^2}}$$

$$= \frac{[r^4 / (r^2 - a^2)]^{3/2}}{\{r^2(r^2 - a^2)^2 + 2a^2r^2(r^2 - a^2) + a^4r^2\} / (r^2 - a^2)^2}$$

$$= \frac{r^6 (r^2 - a^2)^{1/2}}{r^6}$$

$$= (r^2 - a^2)^{1/2}$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

ஒரு வளைகோட்டில் ρ என்பது வளைவாரை எனில் $\frac{r}{\rho} = \sin\phi \left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

வழக்கமான குறியீடுகளுடன்

$\psi = \theta + \phi$ என அறிவோம்.

$$\frac{d\psi}{d\theta} = 1 + \frac{d\phi}{d\theta}$$

$\sin\phi$ ஆல் இருபுறமும் பெருக்க,

$$\sin\phi\left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right) = \sin\phi\left(\frac{d\psi}{d\theta}\right)$$

$$= r\frac{d\theta}{ds}\cdot\frac{d\psi}{d\theta}\left[\because\ r\frac{d\theta}{ds} = \sin\phi.\right]$$

$$= r\cdot\frac{d\psi}{ds}$$

$$= \frac{r}{\rho}. \qquad \left[\because\ \rho = \frac{ds}{d\psi}\right]$$

எனவே $\frac{r}{\rho} = \sin\phi\left(1+\frac{d\phi}{d\theta}\right)$.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$r = a(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் கோண ஆதி வழியே செல்லும் நாண் ஒன்றின் இரு முனைகளிலும் வளைவாரைகள் ρ_1, ρ_2 எனில் $\rho_1^2+\rho_2^2 = \frac{16a^2}{9}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$r = a(1+\cos\theta) \qquad \ldots\ldots (1)$$

என்பது வளைகோடு

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta; \quad \frac{d^2r}{d\theta^2} = -a\cos\theta$$

$$\therefore \rho = \frac{[r^2+(dr/d\theta)^2]^{3/2}}{[r^2+2(dr/d\theta)^2-r(d^2r/d\theta^2)]}$$

$$= \frac{[a^2(1+\cos\theta)^2+a^2\sin^2\theta]^{3/2}}{a^2(1+\cos\theta)^2+2a^2\sin^2\theta+a^2\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{a[2(1+\cos\theta)]^{3/2}}{3(1+\cos\theta)} = \frac{2\sqrt{2}}{3}a(1+\cos\theta)^{1/2}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2}\ a\cdot\left(\frac{r}{a}\right)^{1/2} \qquad \ldots (1) \text{ மூலம்}$$

$$\rho^2 = \frac{8}{9}ar \qquad \ldots (2)$$

ஆதி வழி செல்லும் நாண் ஒன்று வளைகோட்டை P (r_1, θ_1) Q $(r_2, \theta_1+\pi)$ எனும் புள்ளிகளில் சந்திக்கும் என்றும், P, Q எனும் புள்ளிகளில் வளைவாரை ρ_1, ρ_2 என்றும் கொள்க.

$$r_1 = a(1+\cos\theta_1)$$

$$r_2 = a(1+\cos\overline{\theta_1+\pi}) = a(1-\cos\theta_1)$$

$$\rho_1^2 = \frac{8}{9}ar_1 = \frac{8}{9}a\,[a\,(1+\cos\theta_1)]\,;$$

$$\rho_2^2 = \frac{8}{9}a\,[a(1-\cos\theta_1)]$$

$$\therefore\ \rho_1^2+\rho_2^2 = \frac{8a^2}{9}\,[1+\cos\theta_1 = +\ 1 - \cos\theta_1] \ \frac{16a^2}{9}.$$

7. தொடுகோட்டுக் கோணதூரச் சமன்பாடு : $p = f(\psi)$.

$$p = r\sin\phi \qquad \dots \quad (1)$$

என அறிவோம்.

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr}\cdot\frac{dr}{ds}\cdot\frac{ds}{d\psi} \qquad \dots \quad (2)$$

ஆனால்

$\dfrac{dr}{ds} = \cos\phi$ எனத்தெரியும். அத்தோடு

$$\frac{ds}{d\psi} = \rho = r\,\frac{dr}{dp}$$

எனவே (2)-லிருந்து

$$\frac{dp}{d\psi} = \frac{dp}{dr}\cos\phi\ .\ r\,\frac{dr}{dp} = r\cos\theta \qquad \dots \quad (3)$$

(1)-ஐயும் (3)-ஐயும் வர்க்கமாக்கிக் கூட்ட,

$$r^2 = p^2 + \left(\frac{dp}{d\psi}\right)^2 \qquad \dots \quad (4)$$

(4)-ன் இருபக்கத்தையும் p-ஐப் பொருத்து வகையீடு செய்ய,

$$2\,r\,\frac{dr}{dp} = 2p + 2\,\frac{dp}{d\psi}\cdot\frac{d^2p}{d\psi^2}\cdot\frac{d\psi}{dp}$$

$$r\frac{dr}{dp} = p + \frac{d^2p}{d\psi^2}$$

$$\boxed{\rho = p + \frac{d^2p}{d\psi^2}}$$

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ என்ற வளைகோட்டில் வளைவாரை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு ;

$p^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது. ... (1)

வகையீடுசெய்ய,

$$2p\frac{dp}{d\theta} = -2a^2\cos\theta \cdot \sin\theta + 2b^2\sin\theta \cdot \cos\theta.$$

(அ-து) $p\dfrac{dp}{d\theta} = (b^2-a^2)\sin\theta \cdot \cos\theta$ ... (2)

மறுபடி வகையீடு செய்ய,

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2} + \left(\frac{dp}{d\theta}\right)^2 = (b^2-a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

(2)-லிருந்து $\dfrac{dp}{d\theta}$-க்கு பிரதியிட,

$$p\frac{d^2p}{d\theta^2} + (b^2-a^2)^2\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta \cdot \frac{1}{p^2} = (b^2-a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$p^3\frac{d^2p}{d\theta^2} = (b^2-a^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)p^2 - (b^2-a^2)^2\sin^2\theta\cos^2\theta.$$

$$= (b^2-a^2)[(\cos^2\theta-\sin^2\theta)(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta) - (b^2-a^2)\sin^2\theta \cdot \cos^2\theta]$$

$$= (b^2-a^2)(a^2\cos^4\theta - b^2\sin^4\theta)$$

p^4-ஐ இடப்பக்கமும், அதன் மதிப்பை வலப்பக்கமும் கூட்ட,

$$p^3 \frac{d^2p}{d\theta^2} + p^4 = (b^2 - a^2)(a^2 \cos^4 \theta - b^2 \sin^4 \theta) + (a^2 \cos^2\theta + b^2 \sin^2 \theta)^2$$

$$(\text{அ-து})\ p^3\left(\frac{d^2p}{d\theta^2} + p\right) = a^2 b^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^2$$

$$= a^2b^2$$

எனவே $\dfrac{d^2p}{d\theta^2} + p = \dfrac{a^2b^2}{p^3}$

எனவே

$$\rho = p + \frac{d^2p}{d\theta^2} = \frac{a^2b^2}{p^3}.$$

8. ρ-க்கு மற்றும் சில வாய்பாடுகள் :

(i) $\dfrac{1}{\rho^2} = \left(\dfrac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\dfrac{d^2y}{ds^2}\right)^2$ என நிறுவல்.

$\dfrac{dx}{ds} = \cos\psi$, $\dfrac{d^2x}{ds^2} = -\sin\psi \cdot \dfrac{d\psi}{ds} = -\dfrac{\sin\psi}{\rho}$

என அறிவோம்.

மேலும், $\dfrac{dy}{ds} = \sin\psi$, $\dfrac{d^2y}{ds^2} = \cos\psi \cdot \dfrac{d\psi}{ds} = \dfrac{\cos\psi}{\rho}$

வர்க்கமாக்கிக் கூட்ட,

$$\boxed{\frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2} \quad \ldots \ (8)$$

(ii) $\rho = \dfrac{r}{\sin\phi\left(1 + \dfrac{d\phi}{d\theta}\right)}$ என நிறுவல்.

இங்கே, $\sin\phi\left(1 + \dfrac{d\phi}{d\theta}\right) = \sin\phi + \dfrac{d\phi}{d\theta} \cdot \sin\phi$

$$= r\frac{d\theta}{ds} + \frac{d\phi}{d\theta}\left(r\ \frac{d\theta}{ds}\right) = \frac{d}{ds}(\theta + \phi)$$

$$= r\ \frac{d\psi}{ds} = \frac{r}{\rho}$$

$$\therefore \boxed{\rho = \frac{r}{\sin\phi\left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right)}} \qquad \dots\ \dots\ (9)$$

(iii) ஆதியில் வளைவாரை :

$$\rho = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$ என்ற வாய்பாட்டில்

$x = 0, y = 0$ எனப் பிரதியிடுவதன் மூலம் ஆதியில் வளைவாரையைக் காணலாம். ஆனால்

$$y = px + \frac{qx^2}{2!} + \quad \dots\ \dots$$

என்ற அமைப்பில் இயற்கணித அல்லது வடிவ கணித முறைகளில் y-ஐ விரித்தெழுத முடியுமானால் வளைகோடு ஆதிவழிச் செல்வதையும், எனவே

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0,\ 0)} = p\ ; \quad \left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]_{(0,\ 0)} = q$$

என்பதையும் அறியலாம்.

எனவே ஆதியில்

$$\boxed{\rho = \frac{[1 + p^2]^{3/2}}{q}}$$

குறிப்பு : ஆதிவழிச் செல்லும் வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரையைக் காண அதன் சமன்பாடான $y = f(x)$-ல், $f(x)$-ஐ விரித்தெழுத மெக்லாரின் தொடரைப் பயன்படுத்தலாம். அதாவது

$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots$ என்பதைப் பயன்படுத்தலாம். இங்கே $f(0) = 0, p = f'(0), q = f''(0)$.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$a(y^2 - x^2) = x^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

தீர்வு :

$$a(y^2 - x^2) = x^3 \text{ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a} + x^2$$

$$y = \pm \sqrt{1 + \frac{x}{a}} = \pm \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2}$$

$$= \pm x\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \ldots \ldots\right)$$

இது $y = px + \frac{qx^2}{2!} + \ldots$ என்ற அமைப்பில் உள்ளது.

இங்கே $p = 1$, $q = \frac{1}{a}$, அல்லது $p = -1$, $q = -\frac{1}{a}$

எனவே ஆதியில்

$$\rho = \frac{(1+p^2)^{3/2}}{q}$$

$$= \frac{(1+1)^{3/2}}{\pm 1/a}$$

$$= \pm 2a\sqrt{2}.$$

§ 10-5. ஆதியில் வளைவாரையைக் காண நியூட்டன் முறை :

1. $y = f(x)$ அல்லது $f(x, y) = 0$ என ஆதிவழிச் செல்லும் வளைகோடு ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது. இதற்கு x அச்சு ஆதியில் தொடு கோடாக இருக்கிறது. இவ்வாறு இருப்பின் வளைவாரையைக் காணும் முறை பின்வருமாறு :-

ஆதியில் x அச்சு தொடுகோடு.

ஆதலால்

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = 0. \text{ (அ.து) } y_1(0) = 0 \quad \dots (1)$$

மெக்லாரின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி, ஆதியின் அயலில் (Neighbour hood) y-ஐ விரித்த தெழுதினல்

$$y = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots \dots$$

$$y = y(0) + xy_1(0) + \frac{x^2}{2!} y_2(0) + \dots \dots$$

$$= 0 + 0 + \frac{x^2}{2!} y_2(0) + \dots \dots \qquad \{(1)\text{-ன் மூலம்}\}$$

இருபுறமும் x^2-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{y}{x^2} = \frac{1}{2!} y_2(0) + \dots \dots$$

$x \longrightarrow 0$ அதனல் $y \longrightarrow 0$ எல்லையைக் கண்டுபிடித்தால்,

$$\underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{Lt}} \frac{y}{x^2} = \frac{1}{2!} y_2(0)$$

x-ம் அதன்படிகளும் வருகின்ற எஞ்சிய உறுப்புகள் பூச்சியத்திற்குச் சமமாகும். எனவே,

$$(y_2)_0 = \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{Lt}} \cdot \frac{2y}{x^2}$$

எனவே ஆதியில் வளைவாரை,

$$\rho = \frac{[1 + \{y_1(0)\}^2]^{3/2}}{y_2(0)} = \frac{1}{y_2(0)}$$

எனவே ஆதியில்
$$\boxed{\rho = \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{Lt}} \frac{x^2}{2y}}$$

2. $y = f(x)$ அல்லது $f(x, y) = 0$ என ஆதி வழிச் செல்லும் வளைகோடு ஒன்று தரப்பட்டுள்ளது. அதற்கு y அச்சு ஆதியில் தொடு

கோடாக இருக்கிறது. இவ்வாறிருப்பின் வளைவாரை காணல் முன்பு கூறிய முறைக்கொத்த முறையைக் கையாண்டு ρ கண்டுபிடிக்கலாம்.

ஆதியில் வளைவாரை $\rho = \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{Lt}} \dfrac{y^2}{2x}.$

குறிப்பு: $r = f(\theta)$ அல்லது $f(r, \theta) = 0$ என்ற அமைப்பில் ஆதிவழிச் செல்லும் வளைகோட்டின் சமன்பாடு அமைந்து. அவ்வளை கோட்டிற்கு ஆதியில் தொடுகோடாகத் துவக்கக்கோடு இருந்தால் ஆதியில் வளைவாரையைக் காணும் முறை :-

துருவ ஆதியை ஆதியாகவும், துவக்கக் கோட்டை x அச்சாகவும், எடுத்துக் கொள்க.

எனவே,

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

துருவ ஆதியில் வளைவாரை,

$$\rho = \underset{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}}{\text{Lt}} \frac{x^2}{2y}$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{r^2\cos^2\theta}{2r\sin\theta}.$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{r}{2\theta} \cdot \frac{\theta}{\sin\theta} \cdot \cos^2\theta\right)$$

$$\rho = \underset{\theta \to 1}{\text{Lt}} \left(\frac{r}{2\theta}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$5x^3 + 7y^3 + 4x^2y + xy^2 + 2x^2 + 3xy + y^2 + 4x = 0$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

தீர்வு :

$$5x^2+7y^2+4x^2y+xy^2+2x^3+3xy+y^2+4x = 0 \qquad \ldots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

இந்த வளைகோடு (0, 0) வழியே செல்லுகிறது.

சமன்பாட்டில் குறைந்த படியுள்ள உறுப்பை பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்த, ஆதியில் தொடுகோடு $x = 0$. அதாவது y அச்சு. எனவே ஆதியில்

$$\therefore \quad \rho = \underset{x \longrightarrow 0}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{y^2}{2x}\right)$$

(1)-ஐ $2x$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{5}{2}x^2 + 7y\left(\frac{y^2}{2x}\right) + 2yx + \frac{1}{2}y^2 + x + \frac{3}{2}y + \frac{y^2}{2x} + 2 = 0$$

$x \longrightarrow 0, \quad y \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில்

$$0 + 0 + 0 + 0 + \underset{x \longrightarrow 0}{\mathrm{Lt}} \left[\frac{y^2}{2x} + 2\right] = 0$$

அதாவது $\rho = -2$

அதாவது எண்மதிப்பில் $\rho = 2$.

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$r = a \sin n\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

தீர்வு :

$r = a \sin n\theta$ என்பது வளைகோடு.

θ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$\frac{dr}{d\theta} = a \cos n\theta \cdot n$$

$$\text{அது} \tan \phi = r\frac{d\theta}{dr} = \frac{1}{n} \tan n\theta$$

$\theta = 0$ எனில் $r = 0, \ \phi = 0$ என்பதைக் கவனிக்கவும். எனவே வளைகோட்டுக்கு, துவக்கக்கோடு ஆதியில் தொடுகோடாகவும் இருக்கிறது.

$$\therefore \quad \rho \text{ (ஆதியில்)} = \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{r}{2\theta}\right)$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \left(\frac{a \sin n\theta}{2\theta}\right)$$

$$= \underset{\theta \to 0}{\text{Lt}} \frac{na \sin n\theta}{2na}$$

$$= \frac{1}{2} na$$

எடுத்துக்காட்டு 17 :

$y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை $\pm a\sqrt{2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

$$y^2 (a - x) = x^2 (a + x)$$

$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x}$$

$$\therefore \quad y = \pm x \sqrt{\frac{a + x}{a - x}}$$

$$= \pm x \left(1 + \frac{x}{a}\right)^{1/2} \cdot \left(1 - \frac{x}{a}\right)^{-1/2}$$

$$= \pm x \left(1 + \frac{x}{2a} + \dots\right)\left(1 + \frac{x}{2a} + \dots\right)$$

$$= \pm x \left(1 + \frac{x}{a} + \dots\right)$$

$$= \pm \left(x + \frac{x^2}{a} + \quad\right)$$

$$= \pm \left(px + \frac{1}{2} qx^2 + \dots\right)$$

இங்கே $p = 1$ & $q = \frac{2}{a}$

எனவே ஆதியில்

$$\rho = \frac{(1 + p^2)^{3/2}}{q}$$

$$= \frac{2^{3/2}}{\pm \frac{2}{a}} = \pm \frac{a}{2} 2\sqrt{2}$$

$$= \pm a\sqrt{2}$$

பயிற்சிகள் 10 (A)

1. கீழ் தரப்பட்டுள்ள வளைகோடுகளின் வளைவாரையை (s, ψ) என்ற புள்ளியில் கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $s = 4a \sin \psi$

(b) $s = c \tan \psi$

(c) $s = a \log \sec \psi$

2. $s = \frac{c}{2}\left[e^{\frac{x}{c}} - e^{-\frac{x}{c}}\right]$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\rho = \frac{y^2}{c}$ என நிறுவுக.

3. $s = ce^{\frac{x}{c}}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு

$$\rho = \frac{s\sqrt{s^2 - c^2}}{c}$$ என நிறுவுக.

4. கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைகோடுகளுக்கு (x, y) என்ற புள்ளியில் வளைவாரையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(a) $xy = c^2$ (b) $ay^2 = x^3$ (c) $y^2 = 4ax$

5. கீழ் கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைகோடுகளுக்கு (x, y) என்ற புள்ளியில் வளைவாரையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(i) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

6. வளைவாரை காண்க (குறிப்பிடப்பட்ட புள்ளிகளில்) :

(a) $\sqrt{x}+\sqrt{y} = 1$; $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ என்ற புள்ளி

(b) $y^2(2-x) = x^3$; $(1, 1)$ என்ற புள்ளி

(c) $y^2 = 4ax$; $(4, 4)$, $(0, 0)$ என்ற புள்ளிகள்

7. வளைவாரை காண்க (குறிப்பிடப்பட்ட புள்ளிகளில்) :

(a) $x^3+y^3 = 3axy$; $\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ என்ற புள்ளி

(b) $y = e^x$; y அச்சு வெட்டும் புள்ளி.

(c) $(x^2+y^2)^2 = a^2(y^2-x^2)$; $(0, a)$ என்ற புள்ளி

8. $y^2 = 8x$ என்ற பரவளையத்தில் எந்தப் புள்ளிகளில் வளைவாரை $7\frac{13}{16}$ ஆக இருக்கும் ?

9. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் P என்னும் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் ρ-ன் மதிப்பு வளைகோட்டுக்கும் இயக்குவரைக்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டுத் துண்டத்தின் நீளத்தின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

10. $x^2 = 4ay$ என்ற பரவளையத்தில் θ என்பது ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டிற்கும் ஆதியில் தொடுகோட்டிற்கும் இடையே உள்ள கோணம் எனில் $\rho = 2a\sec^3\theta$ என நிறுவுக.

11. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் மேலுள்ள P என்ற புள்ளிக்கு SP என்பது குவிய தூரம். ρ வளைவாரை எனில் $\rho = \frac{2(SP)^{3/2}}{a^{1/2}}$ என நிறுவுக.

12. செவ்வகலம் l உடைய ஒரு பரவளையத்தின் குவிய நாண் ஒன்றின் இரு முனைகளிலும் வளைவாரைகள் ρ_1, ρ_2 எனில் $(\rho_1)^{-2/3}+(\rho_2)^{-2/3} = l^{-2/3}$ என நிறுவுக.

13. $y^2 = 2x(3-x^2)$ என்னும் வளைகோட்டில் எப்புள்ளிகளில் தொடுகோடுகள் x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கின்றனவோ அப்புள்ளிகளில் வளைவாரை $1/3$ என நிறுவுக.

14. $x^3 = y(x-a)^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு எத்தப் புள்ளியில் நிலைத்தூரம் சிறுமமாக உள்ளதோ அப்புள்ளியில் வளைவாரை $8a/9$ என நிறுவுக.

15. $y = e^x$ என்னும் வளைகோட்டின் எந்தப் புள்ளியில் வளை வாரை சிறுமம் எனக் கண்டுபிடிக்கவும். மற்றும் அப்புள்ளியில் தொடுகோடானது அச்சுக்களை வெட்டுவதால் உருவாகும் முக் கோணம் $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$ என்ற பக்க விகிதமுடையது என நிறுவுக.

16. $y = \log \cos x$ என்ற வளைகோட்டில் (x, y) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரையின் y அச்சு வீச்சு மாறிலி என நிறுவுக.

17. $y = a e^{\frac{x}{a}}$ என்ற வளைகோட்டில் $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{a}\right)$ எனில் $\rho = a \sec^2 \theta \operatorname{cosec} \theta$ என நிறுவுக.

18. $y^3 = x(x + 2y)$ என்னும் வளைகோட்டிற்கு $x = 1$-ல் சிறும நிலைத்தூரம் என நிறுவி, அப்புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

19. $y = \frac{a}{2}\left[e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right]; \quad y = \frac{a}{2}\left[2 + \frac{x^2}{a^2}\right]$ என்னும் வளைகோடுகள் $(0, a)$ என்னும் புள்ளியில் சம வளை வாரை உடையன என நிறுவுக.

20. $x = a\left(\cos t + \log \tan \frac{t}{2}\right); \quad y = a \sin t$ என்ற வளை கோட்டின் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் வளைவாரையானது புள்ளிக்கும், x அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட வரைச் செங்கோட்டுத் துண்டத்திற்கு நேர்மாறு விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

21. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டில் (x, y) என்னும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் மீது ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட செங்குத்துக்கோட்டின் நீளத்தைப்போல் மூன்று மடங்காக (x, y)-ல் வளைவாரை இருக்கும் என நிறுவுக.

22. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தில் பேரச்சின் ஒரு முனையில் வளைவாரை பாதிச் செவ்வகலத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

23. $y = \frac{ax}{a + x}$ என்ற வளைகோட்டில் பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

(i) $\frac{2\rho}{a} = \left(\frac{y}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{x}\right)^2$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{a^2}{(a+x)^2} = \frac{y^2}{x^2}$ (iii) $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a^3}{(a+x)^3} = \frac{2y^3}{ax^3}$

24. $y^{2m}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = a^{2m} - y^{2m}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வரைச் செங்கோடானது வளைவாரையைப் போல் m மடங்கு என நிறுவுக.

25. பின்வரும் வளைகோட்டின் புள்ளிகளில் வளைவாரையைக் காண்க :

(a) $x = 6t^2 - 3t^4$; $y = 8t^3$; t என்னும் புள்ளி.

(b) $x = c \sin 2\theta(1+\cos 2\theta)$; $y = c \cos 2\theta (1 - \cos 2\theta)$

(c) $x = 3a \cos t - a \cos 3t$

$y = 3a \sin t - a \sin 3t$

(d) $x = a \sin t - b \sin\left(\frac{at}{b}\right)$

$y = a \cos t - b \cos\left(\frac{at}{b}\right)$

26. $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ என்ற வளைகோட்டின் புள்ளிகளில் வளைவாரையைக் காண்க.

27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வளையத்தில் மேலுள்ள ஒரு புள்ளியில் தொடுகோட்டின் மீது ஆதியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில் அப்புள்ளியில் $\rho = \frac{a^2b^2}{p^3}$ என நிறுவுக.

28. CP, CD என்பன நீள்வளையம் ஒன்றின் இணை விட்டங்கள் 0. a, b என்பன அரை அச்சுக்கள் எனில் P-ல் வளைவாரை $\frac{CD^3}{ab}$ என நிறுவுக.

29. $x = \left(\frac{3a}{2}\right) (\sinh u \cdot \cosh u + u)$

$y = a \cosh^3 u$ என்ற வளை கோட்டிற்கு $P(x, y)$ என்னும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட வரைச் செங்கோடு x அச்சை G-ல் சந்திக்கிறது. P-ல் வளைவாரை 3 PG-க்குச் சமம் என நிறுவுக.

30. $x = \log t ; y = \frac{t + t^{-1}}{2}$ என்ற வளைகோட்டில் $\frac{d^2y}{dx^2} = y$ என நிறுவி (x, y) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

31. $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}$ என்ற நீள் வளையத்தின் ஒரு புள்ளியில் வளைவாரையானது $\frac{a^2 b^2}{p^3}$ என நிறுவுக.

32. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு (p, r) என்னும் புள்ளிகளில் வளைவாரை காண்க.

(a) $pr = a^2$ (b) $r^3 = 2a p^2$

33. பின்வரும் வளைகோடுகளில் (r, θ) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

(a) $r = a(1 - \cos \theta)$

(b) $r = a(1 + \cos \theta)$

34. பின்வரும் வளைகோடுகளில் (r, θ) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

(a) $r^2 \cos 2\theta = a^2$

(b) $r^3 = a^3 \sin 3\theta$.

35. பின்வரும் வளைகோடுகளில் (r, θ) என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை காண்க.

(a) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$

(b) $r^n = a^n \cos n\theta$

(c) $\frac{2a}{r} = 1 - \cos \theta$.

36. $r = a\theta, r\theta = a$ என்ற சுருள்கள் வெட்டும் புள்ளிகளில் அவற்றின் வளைவாரைகள் 3 : 1 என்ற விகிதத்தில் இருக்கும் என நிறுவுக.

37. $r = a . e^{\theta \cot \lambda}$ என்ற சம கோணச் சுருளின் புள்ளி ஒன்றில் வளைவாரை $r \operatorname{cosec} \lambda$ என்றும் அது கோண ஆதியில் செங்கோணத்தைத் தாங்கும் என்றும் நிறுவுக.

38. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற வளை கோட்டின் ஒரு புள்ளியில் வளைவாரை ஆரைவெக்டரின் வர்க்க மூலத்திற்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

39. $r = a e^{\theta \cot \lambda}$ என்ற வளைகோட்டை ஏதேனும் ஆரைவெக்டர் $P_1, P_2 \ldots\ldots P_n, P_{n+1} \ldots\ldots$ என்ற அடுத்தடுத்த புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P_n என்னும் புள்ளியில் ρ_n என்பது வளைவாரையானல் m, n என்ற எல்லா முழு எண் மதிப்புக்களுக்கும் $\frac{1}{m-n} \log\left(\frac{\rho_m}{\rho_n}\right)$ என்பது மாறிலி என நிறுவுக.

40. $\frac{2a}{r} = (1 + \cos\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் வளைவாரையின் வர்க்கமானது குவிய தூரத்தின் மூன்றும் படிக்கேற்ப மாறும் என நிறுவுக.

41. $xy = k^2$ என்ற செவ்வக அதிபர வளைவில் ஒரு புள்ளியில் r என்பது மைய ஆரைவெக்டர் எனில் $\rho = \frac{\frac{r^3}{2}}{k^2}$ என நிறுவுக.

42. $r^2 = a^2 \cos 2\theta + b^2 \sin 2\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு (r, θ) என்னும் புள்ளியில் ρ வளைவாரையானல் $9r^2\rho^2 = a^4 + b^4$ என நிறுவுக.

43. வளைகோடுகளில் பின்வரும் முடிவுகளை நிறுவுக.

(a) $\frac{r}{\rho} \sin\phi \left(1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right)$

(b) $\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{\sin^2\phi}{r} - \frac{\sin\phi}{\rho}$

(c) $\rho = \frac{r \operatorname{cosec}\theta}{\left[1 + \frac{d\phi}{d\theta}\right]}$

44. $r = f(\theta)$, $u = 1/r$ என்ற சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைகோட்டில் ϕ என்பது வழக்கமான பொருள் உடையது ஆனால் $\left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right]\sin^3\phi$ என்பது வளைவாரை என நிறுவுக.

45. வளைவாரை கண்டுபிடி.

(a) $p = a(1+\sin\psi)$.

(b) $p = a\sin\psi\cos\psi$.

(c) $p = a\sin b\psi$.

46. எந்த ஒரு வளைகோட்டிற்கும்

(a) $\frac{1}{\rho} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{ds}\right)$ என நிறுவுக.

(b) $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}\cos^3\psi$ என நிறுவுக.

47. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

(a) $3x^2 + 4x^3 - 12y = 0$

(b) $y^4 + x^3 + a(x^2 + y^2) = a^2y$

(c) $x^3 + y^3 - 2x^2 + 6y = 0$

(d) $y^3 - 3xy + 2x^2 + y^4 - x^3 = 0$.

48. $2x^4 + 3y^4 + 4x^2y + xy - y^2 + 2x = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

49. $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைகோட்டின் ஆதியில் வளைவாரை $\frac{3a}{2}$ என நிறுவுக.

50. $x = t - \frac{t^3}{3}$, $y = t^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் வளைவாரை $\frac{1}{2}$ என நிறுவுக.

51. $x = a(\theta + \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையில் ஆதியில் வளைவாரையை நியூட்டன் முறை மூலம் காண்க.

52. நியூட்டன் முறை மூலம் $ay^2 = (x - h)(x - k)^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(h, 0)$ என்னும் புள்ளியில் வளைவாரை $\frac{(h - k)^2}{2a}$ என நிறுவுக.

53. நியூட்டன் முறையின் மூலம் $y = c \cosh \frac{x}{c}$ என்ற சங்கிலியத்தின் அடிப்புள்ளியில் வளைவாரை c என நிறுவுக.

54. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு ஆதியில் வளைவாரை காண்க.

(a) $r = a\theta$

(b) $r = a(\theta + \sin\theta)$

(c) $a(y^2 - x^2) = x^3$

(d) $y = 2x + 3x^2 - 2xy + y^2$

(e) $y^3 - 6x^3 + 2xy^2 + 5xy = 0.$

விடைகள் 10 (A)

1. (a) $4a \cos\psi$ (b) $c \sec^2\psi$ (c) $a \tan\psi$

4. (a) $\frac{1}{2c^3}(x^2 + y^2)^{3/2}$ (b) $\frac{1}{6a}\sqrt{x}\,(4a + 9x)^{3/2}$

(c) $\frac{2}{\sqrt{a}}(x + a)^{3/2}$

5. (a) $3(axy)^{1/3}$ (b) $(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}/a^4 b^4$

6. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\frac{3\sqrt{5}}{25}$ (c) $\frac{2(a + 4)^{3/2}}{\sqrt{a}}$; $2a$

7. (a) $\frac{3a\sqrt{2}}{16}$ (b) $\sqrt{8}$ (c) $\frac{a}{3}$

8. $\left(\frac{9}{8}, 3\right)\left(\frac{9}{8}, -3\right)$ 18. $\frac{1}{2}$

25. (a) $6t(1 + t^2)^2$ (b) $4c \cos 3\theta$ (c) $3a \sin t$

(d) $\frac{4ab}{a + b} \sin\left(\frac{a - b}{2b} t\right)$

26. $\dfrac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$

30. $\dfrac{(t^2 - 1)^2}{4 t^2}$ 32. (a) $\dfrac{r^3}{a^2}$ (b) $\dfrac{2}{3} \sqrt{2 ar}$

33. (a) $\dfrac{2}{3} \sqrt{2 ar}$ (b) $\dfrac{2}{3} \sqrt{2 ar}$

34. (a) $\dfrac{r^3}{a^2}$ (b) $\dfrac{a^3}{4r^2}$

35. (a) $\dfrac{a^2}{3r}$ (b) $\dfrac{a^n}{(n + 1) r^{n-1}}$ (c) $\dfrac{4a}{3} \cos \dfrac{\theta}{2}$

45. (a) a (b) $3p$ (c) $(1 - b^2) p$

47. (a) 2 (b) $\dfrac{a}{2}$ (c) $\dfrac{3}{2}$ (d) $-\sqrt{2}$, $\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$

48. 1. 51. $4a$

54. (a) $\dfrac{a}{2}$ (b) a (c) $\pm 2\sqrt{2}a$ (d) $\dfrac{5\sqrt{5}}{18}$

(e) $\dfrac{5\sqrt{5}}{6}$

§ 10-6. வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாட்டையும், வளைவு மையத்தின் ஆயத் தொலைகளையும் காணல் :

வளைகோட்டில் P (x, y) என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. அதற்கிணைந்த வளைவு மையம் c $(\bar{x}, \bar{y})$ என்க. PC வளைகோட்டுக்கு, வரைச் செங்கோடு ஆதலால் இதன் சமன்பாடு

$Y - y = -\dfrac{1}{y_1}(X - x)$; இங்கே $y_1 = \dfrac{dy}{dx}$ இச் சமன்பாட்டை

$$(X - x) + y_1 (Y - y) = 0 \qquad (1)$$

என எழுதலாம். இதில் $(\bar{x}, \bar{y})$ அமைவதால்

$$(\bar{x} - x) + y_1 (\bar{y} - y) = 0 \qquad \ldots\ldots (2)$$

CP $= \rho$ ஆதலால்,

$$\rho^2 = PC^2 = (\bar{x} - x)^2 + (\bar{y} - y)^2$$

$$= \frac{\{1 + y_1^2\}^3}{y_2^2} \qquad \ldots (3)$$

(2), (3)-லிருந்து $(\bar{x} - x)$-ஐ நீக்கம் செய்ய

$$y_1^2 (\bar{y} - y)^2 + (\bar{y} - y)^2 = \frac{(1 + y_1^2)^3}{y_2^2}$$

$$(\bar{y} - y)^2 = \frac{(1 + y_1^2)^2}{y_2^2}$$

$$\bar{y} - y = \frac{1 + y_1^2}{y_2}$$

$$\boxed{\bar{y} = y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}}$$

$\bar{y} - y$-க்குக் கிடைக்கும் மேற்கூறிய மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட,

$$\bar{x} - x = -y_1 \left(\frac{1 + y_1^2}{y_2}\right)$$

$$\therefore \boxed{\bar{x} = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2)}$$

எனவே வளைவுமையம்,

$$\boxed{\left[x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2),\ y + \frac{1 + y_1^2}{y_2}\right]}$$

குறிப்பு 1 : $y_1 = \tan \psi$ ஆதலால்,

$$\rho = \frac{\{1 + y_1^2\}^{3/2}}{y_2}$$

$$= \frac{\sec^3 \psi}{y_2}$$

அல்லது $\frac{1}{y_2} = \rho \cos^3 \psi.$

எனவே $\bar{x} = x - \tan\psi \cdot \sec^2\psi \cdot \rho \cos^3\psi$

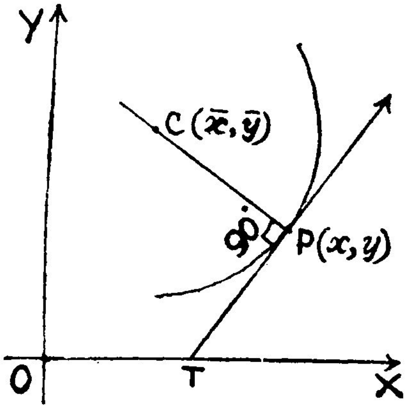
$\bar{x} = x - \rho \sin\psi$

$\bar{y} = y + \sec^2\psi \cdot \rho \cos^3\psi$

$\bar{y} = y + \rho \cos\psi$

எனவே வளைவு மையம்

$$(x - \rho \sin\psi, \quad y + \rho \cos\psi$$



படம் 10·5.

குறிப்பு 2 : P (x, y) என்னும் புள்ளியில் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 = \rho^2$$

குறிப்பு 3 : ஒரு வளைகோட்டின் வளைவு மையங்களது நியமப் பாதை வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவி (evolute) வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவிக்கு மற்றுமொரு வரையறை 'சூழியும் வரைச் செங்கோட் டுத்தழுவியும்' என்ற அத்தியாயத்தில் (11) கூறப்படும். வரைச் செங்கோட்டுத்தழுவி குறித்து விரிவான ஆய்வும் மேற்கொள்ளப் படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 18 :

$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு θ என்ற புள்ளியில் வளைவு மையம் காண்க. (அதன் மூலம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வளையத்தில் $(0, b)$ என்னும் புள்ளியில் வளைவு வட்டச் சமன்பாடு காண்க.)

தீர்வு :

$x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே $\frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$; $\frac{dy}{d\theta} = b\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right) = -\frac{b}{a}\cot\theta$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = +\frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2\theta \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \frac{b}{a}\operatorname{cosec}^2\theta \cdot \left(\frac{-1}{a\sin\theta}\right)$$

$$= -\frac{b}{a^2} \cdot \operatorname{cosec}^3\theta.$$

வளைவு மையம் (α, β) எனில்

$$\alpha = x - \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]\left[\frac{dy}{dx}\right]}{(d^2y/dx^2)}$$

$$= x - \frac{\left\{1 + \frac{b^2}{a^2}\cot^2\theta\right\}\left\{-\frac{b}{a}\cos\theta\right\}}{-\frac{b}{a^2}\cdot\operatorname{cosec}^3\theta.}$$

$$= a\cos\theta - \frac{1}{a}(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)\cos\theta$$

$$= \frac{a^2(\cos\theta - \sin^2\theta\cdot\cos\theta) - b^2\cos^3\theta}{a}$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta$$

$$\beta = y + \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{d^2y/dx^2}$$

$$= y + \frac{\left[1 + \left(\frac{b^2}{a^2}\right)\cot^2 \theta\right]}{-\frac{b}{a^2}\ \text{cosec}^3\theta}$$

$$= b \sin \theta - \frac{(a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta)\sin \theta}{b}$$

$$= \frac{1}{b} \sin \theta \ [b^2 - a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta]$$

$$= \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 \theta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3 \theta.$$

வளைவு மையம் (α, β). இங்கே

$$\alpha = \frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 \theta ; \quad \beta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin^3\theta.$$

எடுத்துக்காட்டு 19 :

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் $(am^2, 2am)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 - 6\,am^2 x - 4ax + 4a\,m^3 y - 3\,a^2 m^4 = 0$ என நிறுவி, அது வளைகோட்டை மீண்டும் $(9\,am^2, -6\,am)$ என்னும் புள்ளியில் வெட்டும் என காண்பிக்கவும்.

தீர்வு :

$y^2 = 4\,ax$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

$x = a\,m^2 ; y = 2\,am.$

எனவே $\frac{dx}{dm} = 2\,am,$

$\frac{dy}{dm} = 2a.$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{m}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\right) \div \frac{dx}{dm}$$

$$= -\frac{1}{m^2} \div 2am = -\frac{1}{2am^3}$$

எனவே $\rho = \left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2} \div \frac{d^2y}{dx^2}$

$$= -2a\,(1+m^2)^{3/2}$$

$$\therefore \quad X = x - \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= am^2 - \frac{\left(1+\frac{1}{m^2}\right)\frac{1}{m}}{-\frac{1}{2am^3}}$$

$$= 2a + 3am^2$$

$$Y = y + \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= 2am + \frac{1 + \frac{1}{m^2}}{-\frac{1}{2am^2}}$$

$$= -2am^3$$

ஆகையால் வளைவு மையம் $(2a+3am^2,\ -2am^3)$

$\therefore$ வளைவு வட்டச் சமன்பாடு

$$(x - 2a - 3am^2)^2 + (y + 2am^3)^2$$

$$= [-2a(1+m^2)^{3/2}]^2$$

(அது) $x^2+4a^2+9a^2m^4-4ax-6am^2x+12a^2m^2$

$$+y^2+4a^2m^6+4aym^3 = 4a^2+12a^2m^2-12a^2m^4+4a^2m^6$$

(அது) $x^2+y^2-6am^2x-4ax+4am^3y-3a^2m^4 = 0.$ ... (1)

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்துக்கும் (1)-க்கு பொதுவான புள்ளிகாண $x = y^2/4a$ என (1)-ல் பிரதியிடுக

$$\frac{y^4}{16a^2}+y^2-\frac{6am^2y^2}{4a}-4a\frac{y^2}{4a}+4am^3y-3a^2m^4 = 0$$

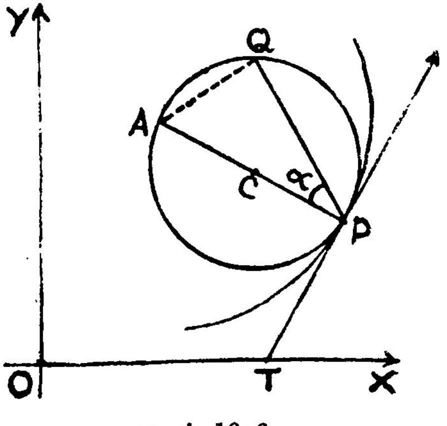
$$y^4-24a^2m^2y^2+64a^3m^3y-48a^4m^4 = 0$$

$y = -6am$ என்பது ஒரு தீர்வென சோதனை மூலம் அறியலாம். இதற்கிணைந்து $x = 9am^2$

$\therefore$ $(9am^2, -6am)$ ஆனது (1) வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளி.

§ 10-7. வளைவு நாண் :

வளைகோட்டில் P என்பது ஒரு புள்ளி. P-ஐப் பொறுத்து C, வளைவு மையம். CP என்ற வரைச் செங்கோட்டுடன் α கோணத்தில் அமைந்துள்ள வளைவு நாணின் நீளத்தைப் பின்வருமாறு காணலாம்.



படம் 10·6.

படத்தில் P-ஐப் பொறுத்து C வளைவு மையம். CP, வளைவாரை ρ. C-ஐ மையமாகவும், ρ-ஐ ஆரமாகவும் கொண்டு வரையப்பட்ட வளைவு வட்டம் வளைகோட்டைப் P-ல் தொடும்.

PC என்ற வரைச் செங்கோடு, வளைவு வட்டத்தை மீண்டும் A-ல் சந்திக்கும்.

வளைவு வட்டத்தின் விட்டமான PA = 2ρ, PQ என்ற வளைவு நாண் PCA உடன் λ என்ற கோணத்தை உண்டாக்குகிறது.

P Q A என்ற செங்கோண முக்கோணத்திலிருந்து PQ = PA cos λ.

எனவே,

$$PQ = 2\rho \cos \lambda$$

கிளை 1 :

x அச்சுக்கு இணையான வளைவு நாண்

$= 2\rho \sin \psi$; ஏனெனில் $\lambda = 90^\circ - \psi$

கிளை 2 :

y அச்சுக்கு இணையான வளைவு நாண்

$= 2\rho \cos \psi$, ஏனெனில் $\lambda = \psi$.

கிளை 3 :

துருவ ஆதி வழியே செல்லும் வளைவு நாண்

$= 2\rho \sin \phi$; ஏனெனில் $\lambda = 90^\circ - \phi$.

கிளை 4 :

$p = f(r)$ என்பது வட்டத்தின் சமன்பாடானல் துருவ ஆதி வழியே செல்லும் வளைவு நாண் $= 2\rho \sin \phi = 2r \dfrac{dr}{dp} \cdot \dfrac{p}{r}$

$$= 2p \cdot \frac{dr}{dp}$$

$$= \frac{2 f(r)}{f'(r)}$$

கிளை 5 :

ஆரை வெக்டருக்குச் செங்குத்தான வளைவு நாண் $= 2\rho \cos \phi$; ஏனெனில் $\lambda = \phi$.

எடுத்துக்காட்டு 20 :

$y = a \log \sec \frac{x}{a}$ என்ற வளைகோட்டின் y அச்சுக்கு இணையான வளைவு நாண் மாறுத நீளம் உடையது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$y = a \log \sec \frac{x}{c}$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டு உள்ளது.

எனவே $$y_1 = a \frac{\frac{1}{a} \sec \frac{x}{a} \tan \frac{x}{a}}{\sec \frac{x}{a}}$$

$$= \tan \frac{x}{a}.$$

$$y_2 = \frac{1}{a} \sec^2 \frac{x}{a}$$

(x, y)-ல் y அச்சுக்கு இணையான கோட்ட நாண்

$$= \frac{2(1 + y_1^2)}{y^2}$$

$$= \frac{2\left(1 + \tan^2 \frac{x}{a}\right)}{\frac{1}{a} \sec^2 \frac{x}{a}} = 2a \text{ (மாறிலி)}.$$

எனவே, தரப்பட்டுள்ள வளைகோட்டின் y அச்சுக்கு இணையான கோட்ட நாண் மாறுத நீளம் $2a$ உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 21 :

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட வளைவு நாணைக் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோடு $r^n = a^n \cos n\theta$ ... (i)

log எடுக்க, $n \log r = n \log a + \log \cos n\theta$.

வகையீடு செய்ய,

$$\frac{n}{r}\ \frac{dr}{d\theta} = -n\tan n\theta.$$

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} = -\cot n\theta$$

$$= \tan(\tfrac{1}{2}\pi + n\theta)$$

$$\text{எனவே, } \phi = \tfrac{1}{2}\pi + n\theta.$$

(அது) $\sin\phi = \sin(\tfrac{1}{2}\pi + n\theta).$

$$= \cos n\theta$$

$$= \left(\frac{r}{a}\right)^n \quad \text{...... (i)-ன் மூலம்.}$$

எனவே (i)-ன் பாதச்சமன்பாடு,

$$p = r\sin\phi.$$

$$p = r\left(\frac{r}{a}\right)^n$$

$$p\,a^n = r^{n+1}$$

வகையீடு செய்ய,

$$a^n\frac{dp}{dr} = (n+1)\,r^n$$

$$\therefore\quad \rho = r\frac{dr}{dp} = r\left[\frac{a^n}{(n+1)r^n}\right]$$

$$= \frac{a^n}{(n+1)r^{n-1}}$$

$\therefore$ தேவையான கோட்ட நாண் $= 2\rho\sin\phi$

$$= 2\,\frac{a^n}{(n+1)x^{n-1}}\left(\frac{x^n}{a^n}\right) = \frac{2r}{(n+1)}$$

எடுத்துக்காட்டு 22 :

$2xy = a^2$ என்ற வளைகோட்டுக்கு வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க.

தீர்வு :

$y = \frac{a^2}{2x}$ என்பது வளைகோடு

$\therefore \quad y_1 = -\frac{a^2}{2x^2}\ ;\ y^2 = \frac{a^2}{x^3}$

(x, y) என்ற புள்ளிக்கு வளைவு மையம் (X, Y) எனில்

$$X = x - \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2) = x + \frac{x}{2}\left(1 + \frac{a^4}{4x^4}\right) = \frac{3x}{2} + \frac{a^4}{8x^3}.$$

$$Y = y + \frac{y_1}{y_2}(1 + y_1^2) = \frac{a^2}{2x} + \frac{x^3}{a^2}\left(1 + \frac{a^4}{4x^4}\right) = \frac{3a^2}{4x} + \frac{x^3}{a^2}$$

$$\therefore \quad X + Y = \frac{12a^2x^4 + a^6 + 6a^4x^2 + 8x^6}{8a^2x^3} = \frac{(a^2 + 2x^2)^3}{8a^2x^3}$$

$$\therefore \quad (X + Y)^{2/3} = \frac{(a^2 + 2x^2)^2}{4a^{4/3}x^2}$$

இவ்வாறே

$$(X - Y)^{2/3} = \frac{(a^2 - 2x^2)^2}{4a^{4/3}x^2}$$

$$\therefore \quad (X + Y)^{2/3} - (X - Y)^{2/3} = \frac{8a^2x^2}{4a^{4/3}x^2} = 2a^{2/3}$$

X, Y என்பன x, y என மாற, வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியின் சமன்பாடு

$$(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = 2a^{2/3}.$$

எடுத்துக்காட்டு 23 :

சமகோணச் சுருளி ஒன்றின் வரை செங்கோட்டுத் தழுவியும் சமகோணச் சுருளி என நிறுவுக.

தீர்வு :

சமகோணச் சுருளி $r = a e^{\theta \cot \alpha}$ (1)

என எடுத்துக் கொள்க. (1)-ல் $P(r, \theta)$ ஒரு புள்ளியெனில், அதன் வளைவு மையம் C என்க.

$\therefore \quad PC = r \operatorname{cosec} \alpha$

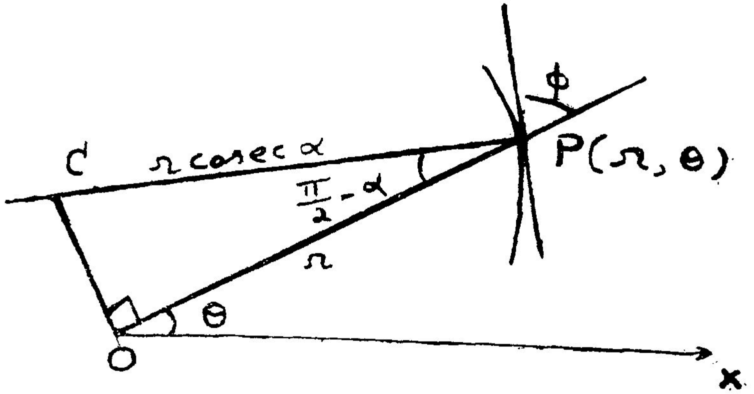
மேலும் சமகோணச் சுருளியில் $\phi = \alpha$

$\therefore \quad \angle OPC = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\triangle$ OPC-ல், $OP = r$, $\angle OPC = \pi/2 - \alpha$, $PC = r \operatorname{cosec} \alpha$

எனவே $\triangle$ OPC செங்கோண $\triangle$;

$\angle POC = 90°$



படம் 10·7

எனவே $OC = OP \tan \angle OPC = r \tan (\pi/2 - \alpha) = r \cot \alpha$,

மற்றும் $\angle XOC = \pi/2 + \theta$

C-ன் ஆயத்தொலைகள் (r', θ') என்க.

$$r' = OC = r \cot \alpha = ae^{\theta \cot \alpha} \cdot \cot \alpha \qquad \ldots\ldots \quad (2)$$

$$\theta' = \angle XOC = \pi/2 + \theta \qquad \ldots\ldots \quad (3)$$

(2), (3)-லிருந்து θ நீக்கம் செய்யக் கிடைக்கும் சமன்பாடு r', θ'-ல் இருக்கும். அதுவே தேவைப்படும் நியமப்பாதையான வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி.

(3)-லிருந்து $\theta = \theta' - \pi/2$

எனவே (2)-ல், $r' = ae^{(\theta' - \pi/2) \cot \alpha} \cot \alpha$

இதனை $a \cot \alpha \cdot e^{-\pi/2 \cot \alpha}$ என்ற மாறிலியை A என எடுத்துக் கொள்ள சமன்பாடு

$$r' = Ae^{\theta' \cot \alpha}$$

இதன் அமைப்பிலிருந்து இதுவும் சமகோணச் சுருளி என்பது தெளிவு.

பயிற்சிகள் 10 (B)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் வளைவு மையம் காண்க.

(a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ என்ற புள்ளி.

(b) $xy = c^2$; (x, y) என்ற புள்ளி

(c) $y \cosh \frac{x}{c}$ (x, y) என்ற புள்ளி

(d) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$; (x, y) என்ற புள்ளி.

2. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தில் (x_1, y_1) என்ற புள்ளியில் $(\bar{x}, \bar{y})$ என்பது வளைவு மையமானால் $\bar{x} = 2a + 3x_1$;

$\bar{y} = -2\left(\frac{x_1^{3/2}}{\sqrt{a}}\right)$ என நிறுவுக.

3. $27\,a\,y^2 = 4x^3$ என்ற வளைகோட்டில் (x, y) என்னும் புள்ளியில், (ξ, η) வளைவு மையம் எனில் $3a.\ (\xi + x) + 2x^2 = 0$; $\eta = 4y + 9a\ \frac{y}{x}$ என நிறுவுக.

4. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் வளைவு வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

(a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ என்ற புள்ளியில்.

(b) $y = mx + \frac{x^2}{a}$, $(0, 0)$ என்ற புள்ளியில்.

(c) $y = x^2 - 6x + 10$; $(3, 1)$ என்ற புள்ளியில்.

(d) $x + y = ax^2 + by^2 + cx^3$; $(0, 0)$ என்ற புள்ளி.

5. $y^2 = 4x$ என்ற பரவளையத்தில் $(t^2, 2t)$ என்ற புள்ளியில் வளைவு வட்டம் மீண்டும் பரவளையத்தை $-6t$ கிடைத்தூரம் உள்ள புள்ளியில் வெட்டுகிறது என நிறுவுக. வளைவு மையத்தின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.

6. $y = a e^{\frac{x}{a}}$ என்ற வளைகோட்டின் ஒரு புள்ளியில் இரு அச்சுக்களுக்கும் இணையான வளைவு நாண்கள் முறையே C_x, C_y எனில் $\frac{1}{C_x^2} + \frac{1}{C_y^2} = \frac{1}{2a\,C_x}$ என நிறுவுக.

7. $y = a \cosh \frac{x}{a}$ என்ற வளைகோட்டில் y அச்சுக்கு இணையான வளைவுநாண் நிலைத்தூரத்தைப் போல் இரு மடங்கு என்றும், x அச்சுக்கு இணையான வளைவு நாண் நீளம் $c \sinh \frac{2x}{c}$ என்றும் நிறுவுக.

8. $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் ஒரு புள்ளியில் தொடுகோடு x அச்சுடன் ψ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கினால் இதன் வளைவு (curvature) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\cos^3 \psi$ எனவும், (x, y) என்னும் புள்ளியில் வளைவு மையம் $\left(x - \frac{dy}{d\psi},\ y + \frac{dx}{d\psi}\right)$ எனவும் நிறுவுக.

9. ஒரு பரவளையப் புள்ளிக்குக் குவியத்தின் வழியே செல்லும் வளைவு நாண், அப்புள்ளியின் குவிய தூரத்தைப் போல் நான்கு மடங்கு உள்ளது எனவும், அச்சுக்கு இணையான வளைவு நாணுக்குச் சமமாக உள்ளது எனவும் நிறுவுக.

10. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு கோண ஆதியிலிருந்து வரையப்பட்ட வளைவு நாண்கள் காண்க:

(a) $r = a e^{m\theta}$

(b) $r = a(1+\cos$

(c) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

11. $p = f(r)$ என்ற வளைகோட்டுக்கு கோண ஆதி வழியே கோட்ட நாண் $\frac{2\lambda(r)}{}$ என நிறுவுக.

12. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க.

(a) $xy = c^2$ (b) $x^2 = 4ay$

13. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற உருள் வளையின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியும் மற்றொரு உருள் வளையே என நிறுவுக.

14. ஒரு வளைகோட்டில் ஒரு புள்ளி, வளைகோட்டில் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியில் அதற்கிசைந்த புள்ளி, ஆகியவற்றில் ρ, ρ' என்பன முறையே வளைவாரைகள் ; x-ஐப் பொறுத்து y-ன் முதல் இரண்டாம் மூன்றும் வகைக் கெழுக்கள் முறையே p, q, r எனில் $\frac{\rho'}{\rho} = \frac{3pq^2 - r(1+p^2)}{q^2}$ என நிறுவுக.

விடைகள் 10 (B)

1. (a) $\left\{\frac{3a}{4}, \frac{3a}{4}\right\}$ (b) $\left[\left(\frac{3x}{2} + \frac{c^4}{2x^3}\right), \left(\frac{3c^2}{2x} + \frac{x^3}{2c^2}\right)\right]$

(c) $\left\{x - y\left(\frac{y^2}{c^2} - 1\right)^{1/2}, 2y\right\}$ (d) $\{x - 3x^{1/3}y^{2/3}$

$y + 3x^{2/3}y^{1/3}\}$

4. (a) $8x^2 + 8y^2 - 12ax - 12ay + 5y^2 = 0$

(b) $x^2 + y^2 = a(1 + m^2)(y - mx)$

(c) $x^2 + y^2 - 6x - 3y + 11 = 0$

(d) $(a + b)(x^2 + y^2) = 2(x + y)$

5. $(2 + 3t^2, -2t^3)$

10. (a) $2r$ (b) $\frac{4r}{3}$ (c) $\frac{2r}{\theta}$

12. (a) $(x + y)^{2/3} + (x - y)^{2/3} = (4c)^{2/3}$

(b) $4(y - 2a)^3 = 27ax^2$

11. சூழியும் வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியும்

§ 11-0. வளைகோட்டுத் தொகுதிகள் :

$y = mx + \frac{a}{m}$ என்ற சமன்பாடு m-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் தரப்படும்போது வெவ்வேறு நேர்கோடுகளைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறு m-ன் பல மதிப்புகளால் கிடைக்கும் நேர்கோடுகளையெல்லாம் சேர்த்து வளைகோட்டுத்தொகுதி family of curves) எனக் கருதுகிறோம்; m என்பது இத்தொகுதியின் துணையலகு (parameter) எனக் கூறப்படுகிறது.

பொதுவாகக் கூறுவதானால் $f(x, y, \lambda)$ என்பது மூன்று மாறிகளில் ஒரு சார்பலன் எனில், λ-ன் ஒவ்வொரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கும் $f(x, y, \lambda) = 0$ என்ற சமன்பாடு ஒரு வளைகோட்டைத் தீர்மானம் செய்கிறது. இவ்வாறு λ-ன் பல மதிப்புகளால் கிடைக்கக்கூடிய வளைகோடுகள் எல்லாவற்றையும் தொகுத்து ஓர் துணையலகு வளைகோட்டுத்தொகுதி (One parameter family of curves) எனக்கூறுகிறோம் ; λ என்ற மாறி துணையலகு எனக் கூறப்படுகிறது.

§ 11-1. சூழி (Envelope) :

ஆயத்தொலை வடிவ கணிதத்திலிருந்து $y = mx + \frac{a}{m}$ என்பது $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் தொடுகோடு என அறிவோம். m-க்கு வேறுபட்ட மதிப்புக்களைத் தருவதனால் பரவளையத்துக்கு தொடுகோடுகள் தொகுதி கிடைக்கிறது. மேலும் பரவளையத்தில் எந்தப் புள்ளியை எடுத்துக்கொண்டு தொடுகோடு வரைந்தாலும் அது $y = mx + \frac{a}{m}$ என்ற அமைப்பில் இருக்கிறது எனவே $y^2 = 4ax$ ஆனது $y = mx + \frac{a}{m}$ என்ற நேர்கோடுகள் தொகுதியின் ஒவ்

வொரு உறுப்பையும் தொடுவதாகவும், $y^2 = 4ax$-ன் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும், நேர்கோடுகளின் தொகுதியின் ஒரு உறுப்பால் தொடப்படுவதாகவும் அமைந்துள்ளது.

இவ்வாறு ஒரு வளைகோட்டுத் தொகுதியைப் பொறுத்து ஒரு வளைகோடு பின் வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்வதால் வளைகோடு சூழி எனப்படும்.

(i) வளைகோடு, வளைகோட்டுத் தொகுதியில் அமையும் உறுப்பு ஒவ்வொன்றையும் தொடவேண்டும்.

(ii) வளைகோட்டுப் புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றிலும் அப்புள்ளியில் தொடுவதாக அமைந்த வளைகோட்டுத் தொகுதி உறுப்பு ஒன்று இருக்கவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டில் $y = mx + \frac{a}{m}$ என்ற நேர்கோட்டுத் தொகுதியின் சூழி $y^2 = 4ax$.

இவ்வாறே $y = mx + a\sqrt{1 + m^2}$ என்ற நேர்கோட்டுத் தொகுதியின் சூழி $x^2 + y^2 = a^2$.

சூழியை வேறு வகையாகவும் வரையறை செய்யலாம்.

$\phi(x, y, \lambda) = 0$ என்பது λ என்ற துணையலகு ஒன்றுடைய வளைகோட்டுத் தொகுதி என்க. துணையலகின் λ, $\lambda + \delta\lambda$ என்ற இரு மதிப்புகளுக்கு இயைந்து வளைகோட்டுத் தொகுதி உறுப்புகள் $\phi(x, y, \lambda) = 0$; $\phi(x, y, \lambda + \lambda\delta) = 0$. இவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளியானது $\delta\lambda \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் P என்ற குறிப்பிட்ட புள்ளியை அணுகுவதாகக் கொண்டால், λ-ன் மாற்றங்களுக்கேற்ப P-ன் நியமப்பாதையைச் சூழி என வரையறை செய்கிறோம்.

குறிப்பு : சூழியின் இரு வரையறைகளும் ஒன்றே என்பது விரைவில் தெளிவாகும்.

§ 11-2. சூழி காணும் முறை

λ துணையலகாக உள்ள வளைகோட்டுத் தொகுதியின் இரு அடுத்தடுத்த உறுப்புகள்

$$\phi(x, y, \alpha) = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\phi(x, y, \alpha + h) = 0 \qquad \ldots (2)$$

என்க. (1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள்

$$\phi(x, y, \alpha + h) - \phi(x, y, \alpha) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டையும், எனவே

$$\frac{\phi(x, y, \alpha + h) - \phi(x, y, \alpha)}{h} = 0 \qquad \ldots (3)$$

என்ற சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்யும்.

$h \longrightarrow 0$ என்ற எல்லையில் (3) ஆனது

$$\operatorname*{Lt}_{h \to 0} \frac{\phi(x, y, \alpha + h) - \phi(x, y, \alpha)}{h} = 0$$

அல்லது $\dfrac{\partial}{\partial \alpha} \phi(x, y, \alpha) = 0 \qquad \ldots (4)$

என ஆகும். இதுவே (1), (2) வளைகோடுகளுக்கு பொதுவான புள்ளிகளின் எல்லை நிலைகள் நிறைவு செய்யும் சமன்பாடு ஆகும்.

எனவே சூழியின் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (1), (4) சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும். எனவே (1), (4)-லிருந்து α-ஐ நீக்கம் செய்ய $\phi(x, y, c) = 0$ என்ற தொகுதியின் சூழியின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

செயல் முறை விதி :

$\phi(x, y, \alpha) = 0$ என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சூழியின் சமன்பாடு காண

α என்ற துணையலகை

$$\phi = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial c} = 0$$

எனும் சமன்பாடுகளில் இருந்து நீக்கம் செய்க.

குறிப்பு : (1), (4) சமன்பாடுகளை x, y-க்கு தீர்வு காண

$$x = f(\alpha) \qquad \ldots (5)$$

$$y = g(\alpha) \qquad \ldots (6)$$

எனச் சமன்பாடுகள் கிடைத்தால் (5), (6) என்பன சூழியின் துணை யலகுச் சமன்பாடுகளாம். (λ, துணையலகு).

§ 11-3. வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சமன்பாட்டைத் துணையலகில் இருபடிச் சமன்பாடாக அமைக்க முடியுமானால், சூழி கண்டு பிடிக்கும் முறை :

வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சமன்பாடு

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0 \qquad \cdots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது என்க. இங்கே, A, B, C, என்பன x, y-ன் சார்பலன்கள்.

(1) ஐ λ-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு கண்டால்

$$2\lambda A + B = 0 \qquad \cdots (2)$$

எனக்கிடைக்கும்.

(1), (2)-லிருந்து λ-ஐ நீக்கம் செய்தால்

$$A\left(-\frac{B}{2A}\right)^2 + B\left(-\frac{B}{2A}\right) + C = 0.$$

$$\text{அல்லது} \qquad B^2 - 4AC = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

எனவே

$$B^2 - 4AC = 0 \qquad \cdots (3)$$

என்பது சூழியாகும்,

குறிப்பு : வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சமன்பாடு துணை யலகில் இருபடிச் சமன்பாடாகத் தரப்பட்டிருந்தால், சமன்பாடு சமமானத் தீர்வுகளைப் பெறுவதற்கான நிபந்தனையே சூழியின் சமன்பாடாகும்.

§ 11-4. வளைகோடுகளின் தொகுதிக்கும், சூழிக்கும் உள்ள தொடர்பு:

தேற்றம் 1. $\phi(x, y, \lambda) = 0$ என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சூழி வளைகோட்டுத் தொகுதியின் உறுப்பு ஒவ்வொன்றையும் தொடு கிறது.

நிறுவல் :

α துணையலகாக உள்ள வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சமன்பாடு

$$\phi(x, y, \alpha) = 0. \qquad \dots (1)$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது. இதன் சூழியானது α-ஐ (1)-லிருந்தும்

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \phi(x, y, \alpha) = 0 \qquad \dots (2)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்தும் நீக்கம் செய்வதால் கிடைக்கிறது என அறிவோம்.

x, y-ஐ α மூலம் (1), (2)-லிருந்து தீர்வு காண சூழியின் துணையலகுச் சமன்பாடு

$$\left.\begin{array}{l} x = f_1(\alpha) \\ y = f_2(\alpha) \end{array}\right\} \qquad \dots (3)$$

எனக் கிடைப்பதாகக் கொள்க.

α-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் (3) சமன்பாடு, (1) சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் (1)-ஐ, α-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்து. x, y என்பன α-ன் சார்பலனகக் கருத

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial d} \cdot \frac{dy}{d\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0$$

எனக் கிடைக்கும். (2)-ஐப் பயன்படுத்தினல்

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{d\alpha} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{d\alpha} = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

அதாவது $\frac{\partial \phi}{\partial x} f_1'(\alpha) + \frac{\partial \phi}{\partial y} f_2'(\alpha) = 0$

$$(\text{அ-து}) \quad -\frac{\partial \phi / \partial x}{\partial \phi / \partial y} = \frac{f_2'(\alpha)}{f_1'(\alpha)} \qquad \dots (4)$$

எனவே $\phi(x, y, \alpha) = 0$ என்ற தொகுதியில் குறிப்பிட்ட உறுப்பில் (x, y) எனும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \quad (\lambda \text{ மாறிலி})$$

$$= \frac{f_2'(\lambda)}{f_1'(\lambda)} \quad (4) \text{ மூலம்}$$

எனக்கிடைக்கும்.

(3) என்ற சூழிக்கும் அதே புள்ளியில் தொடுகோட்டின் சாய்வு விகிதம்

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f_2'(\lambda)}{f_1'(\lambda)}$$

எனக் கிடைக்கும்.

எனவே (x, y) என்ற பொதுவான புள்ளியில் இரு சாய்வு விகிதங்களும் ஒன்றே என்பது தெளிவாகிறது. அதாவது பொதுவான புள்ளியில் வளைகோடும் சூழியும் ஒரே தொடுகோட்டைக் கொண்டிருக்கின்றன. இதனையே வேறு விதமாகக் கூறுவதானால் வளைகோடும் சூழியும் பொதுவான புள்ளியில் ஒன்றையொன்று தொடுகின்றன.

குறிப்பு : எந்தப் புள்ளியிலாவது $\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} =$ எனில் மேற் கூறிய வாதம் பொருந்தாது ; அப்புள்ளியில் தேற்றம் பொய்த்து விடும் ; அப்புள்ளியில் சிறப்புப்புள்ளி (singular point) அமைந் திருக்கும்.

தேற்றம் 2 : $x = f_1(\lambda)$, $y = f_2(\lambda)$ எனும் வளைகோடு, அதன் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் $\phi(x, y, \lambda) = 0$ என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் உறுப்பில் ஏதோ ஒன்றை தொடும் வகையில் அமைந் திருந்தால். அவ்வளைகோடு, $\phi(x, y, \lambda) = 0$ என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் சூழியாகும்.

நிறுவல் :

$x = f_1(\lambda)$, $y = f_2(\lambda)$ என்ற வளைகோட்டில் (x, y) எனும் புள்ளியில் λ-ன் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு $\phi(x, y, \lambda) = 0$. என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் ஒரு உறுப்புத் தொடுவதாக வைத்துக் கொள்வோம்.

எனவே இப்புள்ளியில்

$$\phi \{ f_1(\lambda), f_2(\lambda), \lambda \} = 0$$

இதனை λ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} f_1'(\lambda) + \frac{\partial \phi}{\partial y} f_2'(\lambda) + \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \qquad \ldots (1)$$

எனக் கிடைக்கும்.

ஆனால் (x, y)-ல் $\phi(x, y, \lambda) = 0$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடும் $x = f_1(\lambda)$, $y = f_2(\lambda)$ என்ற வளைகோட்டின் தொடுகோடும் ஒன்றே எனத் தெரியும். எனவே

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\dfrac{\partial \phi}{\partial y}} = \frac{f_2'(\lambda)}{f_1'(\lambda)}$$

(அது) $$\frac{\partial \phi}{\partial x} f_1'(\lambda) + \frac{\partial \phi}{\partial y} f_2'(\lambda) = 0 \qquad \ldots (2)$$

எனவே (1), (2) மூலம் $$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0$$

எனவே $\phi(x, y, \lambda) = 0$ $\dfrac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0$

என்ற சமன்பாடுகளில் இருந்து $x = f_1(\lambda)$, $y = f_2(\lambda)$ என்பது சூழியின் சமன்பாடு என்பது தெரிகிறது; ஏனெனில் λ-ன் ஒவ்வொரு மதிப்புகள் சமன்பாடுகள் ஒருங்கமைந்து நிறைவு செய்யப் படுகின்றன.

தேற்றம் 3 : கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டுத் தொகுதியின் ஒவ்வொரு வளைகோட்டின் ஒவ்வொரு சிறப்புப் புள்ளியும் சூழியில் அமைந்து இருக்கும்.

நிறுவல் :

$$\phi(x, y, \lambda) = 0 \qquad \ldots (1)$$

என்ற வளைகோட்டுத் தொகுதியின் ஒரு வளைகோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியில் $\dfrac{\partial \phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ ஆக இருந்தால் (சிறப்புப் புள்ளி நிபந்தனை) அப்புள்ளியில்

$$\frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0$$

ஆக இருக்கும் என நிறுவ வேண்டும்.

(1)-லிருந்து

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial \alpha} d\alpha = 0$$

எனக் கிடைக்கும். இதில்

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \text{ என பிரதியிட}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \alpha} = 0 \text{ எனக் கிடைக்கிறது.}$$

எனவே வளைகோடுகளது சிறப்புப் புள்ளிகள் யாவும் சூழியில் அமைந்துள்ளன,

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

α-ஐ $x \cos\alpha + y \sin\alpha = l \sin\alpha \cos\alpha$ என்ற நேர்கோட்டுத் தொகுதியின் சூழி காண்க.

தீர்வு :

$$x \cos\alpha + y \sin\alpha = l \sin\alpha \cos\alpha \qquad \dots \quad (1)$$

$\sin\alpha \cos\alpha$ ஆல் (1)-ன் இருபுறமும் வகுக்க

$$x \operatorname{cosec}\alpha + y \sec\alpha = l \qquad \dots \quad (2)$$

α என்ற துணையலகைப் பொறுத்து பகுதி வகைக்கெழு காண

$$x(-\operatorname{cosec}\alpha \cot\alpha) + y(\sec\alpha \tan\alpha) = 0$$

(அது) $\tan\alpha = x^{1/3}\, y^{1/3}$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{1 + \cot^2\alpha}$$

$$= \sqrt{1 = \frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}$$

$$= \sqrt{\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{x^{2/3}}} \qquad \dots \quad (3)$$

$$\sec\alpha = \sqrt{1 + \tan^2\alpha}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^{2/3}}{y^{2/3}}}$$

$$+\sqrt{\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{y^{2/3}}} \qquad \ldots \quad (4)$$

λ-ஐ (2), (3), (4)-லிருந்து நீக்கம் செய்ய

$$x\left(\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{x^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}}+y\left(\frac{x^{2/3}+y^{2/3}}{y^{2/3}}\right)^{\frac{1}{2}}=l$$

எனவே தேவைப்படும் சூழியாவது

$$(x^{2/3}+y^{2/3})^{\frac{1}{2}}\ (x^{2/3}+y^{2/3})=l$$

அது $x^2l^3+y^2l^3=l^{2/3}$.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

m-ஐ துணையலகாகக் கொண்ட $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ என்ற வரைகோட்டுத் தொகுதியின் சூழி காண்க.

தீர்வு :

$$y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

என்பது கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y-mx=\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

$$(y-mx)^2=a^2m^2+b^2$$

எனவே $y^2+m^2x^2-2myx-(a^2m^2+b^2)=0$

$$m^2(x^2-a^2)-2myx+(y^2-b^2)=0$$

என்பது துணையலகு m-ல் இருபடிச் சமன்பாடு

எனவே சூழியின் சமன்பாடு

$$4y^2x^2=4(x^2-a^2)(y^2-b^2)$$

(அ-து) $y^2x^2=x^2y^2-a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2$

(அ-து) $b^2x^2+a^2x^2=a^2b^2$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x\cos\lambda+y\sin\lambda=f(\lambda)$ என்ற நேர் கோடுகளின் தொகுதியின் சூழிக்கு வளைவாரை $f(\lambda)+f''(\lambda)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = f(\alpha) \qquad \ldots (1)$$

α-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையீடு காண

$$-x \sin \alpha + y \cos \alpha = f'(\alpha) \qquad \ldots (2)$$

(1), (2)-லிருந்து α-ஐ நீக்கம் செய்து சூழி காண்போம்

(1), (2)-லிருந்து

$$x = \cos \alpha \cdot f(\alpha) - \sin \alpha \cdot f'(\alpha)$$

$$y = \sin \alpha \cdot f(\alpha) + \cos \alpha \cdot f'(\alpha)$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{d\alpha} = \cos \alpha \cdot f'(\alpha) - \sin \alpha \cdot f(\alpha)$$

$$- \sin \alpha \cdot f''(\alpha) - f'(\alpha) \cos \alpha$$

$$= -[f(\alpha) + f''(\alpha)] \sin \alpha$$

இதேபோல் $\dfrac{dy}{d\alpha} = [f(\alpha) + f''(\alpha)] \cos \alpha$

$$\therefore \quad \frac{d^2x}{d\alpha^2} = -[f''(\alpha) + f'''(\alpha)] \sin \alpha - [f(\alpha) + f''(\alpha)] \cos \alpha;$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = [f'(\alpha) + f'''(\alpha)] \cos \alpha - [f(\alpha) + f''(\alpha)] \cos \alpha$$

ஆனால் $\rho = \dfrac{\left[\dfrac{d^2x}{d\alpha^2} + \dfrac{d^2y}{d\alpha^2}\right]^{3/2}}{\left[\dfrac{dx}{d\alpha}\dfrac{d^2y}{d\alpha^2} - \dfrac{dy}{d\alpha}\dfrac{d^2x}{d\alpha^2}\right]}$

இதன் பின்னமேல் பகுதியில் பிரதியிட $[f(\alpha) + f''(\alpha)]^3$
கீழ்ப்பகுதியில் பிரதியிட

$$-\{f(\alpha) + f''(\alpha)\}\{f'(\alpha) + f'''(\alpha)\} \cos \alpha \sin \alpha + \{f(\alpha) + f''(\alpha)^2\} \sin^2 \alpha$$

$$+ \{f(\alpha) + f''(\alpha)^2 \cos^2 \alpha + \{f(\alpha) + f''(\alpha)\}\{f'(\alpha) + f'''(\alpha)\} \sin \alpha \cos \alpha$$

$$= \{f(\alpha) + f''(\alpha)\}^2$$

எனவே $\rho = f(\alpha) + f''(\alpha)$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் மேல்மையம் கொண்டு அதன் உச்சி வழியே செல்கின்ற வட்டங்களின் சூழி காண்க.

தீர்வு ;

பரவளையப்புள்ளி $(at^2, 2at)$ என்க.

இதுவே நகரும் வட்ட மையம் எனத்தரப்பட்டுள்ளது. வட்டம் ஆதிவழி செல்லுகிறது.

எனவே ஆரம் $= \sqrt{(at^2 - 0)^2 + (2at - 0)^2}$

$= \sqrt{a^2t^2 + 4a^2t^2}$

வட்டச்சமன்பாடு

$$(x - at^2)^2 + (y - 2at)^2 = a^2t^4 + 4a^2t^2$$

(அது) $x^2 + y^2 - 2axt^2 - 4ayt = 0$

(அது) $2ax\,t^2 - 4\,ay\,t - (x^2 + y^2) = 0$

இது t-ல் இருபடிச் சமன்பாடு

ஆகவே சூழி

$$16a^2y^2 = -8ax\,(x^2+y^2)$$

அது $2ay^2 = -x^3 - xy^2$

எனவே சமன்பாடு

$$x^3 + y^2\,(x+2a) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

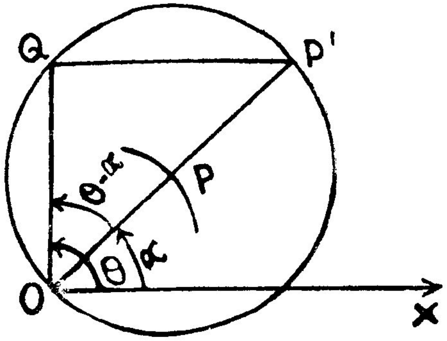
ஆதி வழியே செல்வதும், $r^2 \cos 2\theta = c^2$ என்ற வளைகோட்டில் மையங் கொள்வதுமான வட்டங்களின் சூழியின் சமன்பாடு காண்க.

தீர்வு :

P (OP, α) என்ற புள்ளி $r^2 \cos 2\theta = c^2$ எனும் வளைகோட்டில் உள்ளது என்க. இதனை மையமாகவும் O வழி செல்வதுமான வட்டம் காணவேண்டும். OP-ஐ P'-க்கு OP' = 2 OP எனுமாறு நீட்டவும்.

P' (2 OP, α) ஆகும்.

$OP^2 \cos 2\alpha = c^2$ ஆதலால் $OP = c/\sqrt{\cos 2\alpha}$ நமக்குத் தேவையான வட்டத்தில் $Q\ (r, \theta)$ என்பது ஓர் புள்ளியெனில்
$OQ = OP' \cos P'OQ$



படம் 11·1.

(அது) $r = \dfrac{2c}{\sqrt{\cos 2\alpha}} \cdot \cos(\theta - \alpha)$ ... (1)

இங்கே α துணையலகு.

log எடுத்து α-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்வோம்.

$\log r = \log 2c + \cos(\theta - \alpha) - \frac{1}{2}\log\cos 2\alpha$

$$O = O + \frac{1}{\cos(\theta - \alpha)} - \sin(\theta - \alpha)(-1)$$
$$- \frac{1}{2}\frac{1}{\cos 2\alpha}(-\sin 2\alpha)(2)$$

(அது) $\tan(\theta - \alpha) = -\tan 2\alpha = \tan(-2\alpha)$

(அது) $\theta - \alpha = k\pi - 2\alpha$

(அது) $\alpha = k\pi - \theta$

(1)-ல் பிரதியிட்டு வர்க்கமாக்க

$$r^2 = \frac{(2c)^2}{[\sqrt{\cos 2(k\pi - \theta)}]^2}[\cos(2\theta - k\pi)]^2$$

அது $r^2 = 4c^2 \cos 2\theta$.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

ஒரு நீள்வளையத்தில் இணைவிட்டங்கள் இரண்டின் முனைகளை இணைக்கும் கோடுகளுக்கு சூழி மற்றொரு வடிவொத்த நீள்வளையம் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, என்பது நீள்வளையமெனில் P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$, Q $(a\cos\phi, b\sin\phi)$ என்பன இணைவிட்டங்கள் இரண்டின் முனைகள் என்க. $\phi = \theta + \pi/2$

PQ-ன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$\text{அது } \frac{x}{a}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{y}{b}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$

θ என்ற துணையலகைப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$-\frac{x}{a}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{y}{b}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \qquad \dots (2)$$

$(1)^2 + (2)^2$ கண்டால் θ நீக்கம் பெறும்.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$$

என்பது சூழி

இது எடுத்துக்கொண்ட நீள் வளையத்துக்கு வடிவொத்தது.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டின் ஆரை வெக்டர்களது முனைகளில் வரைந்து செங்குத்துக் கோடுகளின் சூழி காண்க. மற்றும் அதே வளைகோட்டிற்கு ஆரைவெக்டர்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சூழி காண்க.

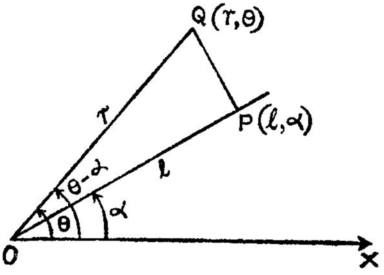
தீர்வு :

முதல் பகுதி

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டில் (l, α) என்பது ஒரு புள்ளியெனில்

$$l^n = a^n \cos n\alpha \quad (\text{அது})\ l = a(\cos n\alpha)^{1/n} \qquad \dots (1)$$

$p\ (l, \alpha)$ என்ற புள்ளி வழியே, OP-க்கு செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 11.2.

$$\frac{l}{r} = \cos(\theta - \alpha)$$

[விளக்கம் படத்தில் காண்க.]

(அது) $l = r\cos(\theta - \alpha)$

(அது) $a(\cos n\alpha)^{1/n} = r\cos(\theta - \alpha)$ ... (1) மூலம்

α துணையலகாக, log எடுக்க

$$\log a + \frac{1}{n}\log\cos(n\alpha) = \log r + \log\cos(\theta - \alpha)$$

இருபுறமும் α-ஐப் பொறுத்து வகையீடு காண

$$-\frac{1}{n}\cdot n\tan n\alpha = \tan(\theta - \alpha)$$

$$\therefore\ \theta - \alpha = -n\alpha \quad (\text{அது})\ \alpha = \frac{\theta}{1-n}$$

இம்மதிப்பினை (1)-ல் பயன்படுத்த

$$a\left[\cos\frac{n\theta}{1-n}\right]^{1/n} = r\cos\left(\frac{n\theta}{1-n}\right)$$

(அது) $a\left\{\cos\frac{n\theta}{1-n}\right\}^{\frac{(1-n)}{n}} = r$

(அது) $r^{\frac{n}{1-n}} = a^{\frac{n}{1-n}}\cos\left(\frac{n\theta}{1-n}\right)$ என்பது சூழி

இரண்டாம் பகுதி :

$r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைகோட்டில் $P(l, \lambda)$ என்பது புள்ளியெனில்

$$l^n = a^n \cos n\lambda \quad \text{(அது)} \quad l = a(\cos n\lambda)^{1/n} \quad \ldots (1)$$

OP-ஐ விட்டமாகக் கொண்டு ஒரு விட்டம் வரைக.

அதில் $Q(r, \theta)$ என்பது ஒரு புள்ளியெனில்

$$OQ = OP \cos(\theta - \lambda)$$

$$r = l \cos(\theta - \lambda) \quad \ldots (2)$$

எனவே $$r = a(\cos n\lambda)^{1/n} \cos(\theta - \lambda) \quad \ldots (3)$$

(அது) $$\log r = \log a + \frac{1}{n} \cos n\lambda + \log \cos(\theta - C)$$

λ-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகையிடு காண

$$0 = -\frac{1}{n} n \tan n\lambda + \tan(\theta - \lambda)$$

$$\tan(\theta - \lambda) = \tan n\lambda$$

$$\theta - \lambda = m\pi + n\lambda$$

(அ-து) $$(n + 1)\lambda = \theta - m\pi$$

(அ-து) $$\lambda = \frac{\theta - m\pi}{n + 1}$$

இதனை (3)-ல் பிரதியிட

$$r = a \cos\left\{\frac{n(\theta - m\pi)}{n + 1}\right\}^{1/n} \cos\left[\theta - \frac{\theta - m\pi}{n + 1}\right]$$

என்ற சூழி கிடைக்கின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

செங்குத்தாக உள்ள இருநிலையான நேர் கோடுகளின் மேல், முனைகள் அமையுமாறு வழுக்கிச் செல்லும். கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய நேர்கோட்டின் சூழி காண்க.

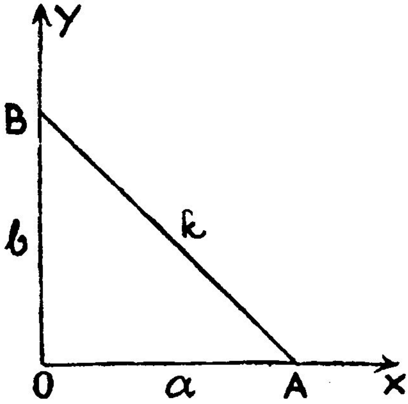
தீர்வு :

k நீளமுடைய நேர்கோடு, இருமுனைகளும் முறையே OX, OY என்ற செங்குத்துக்கோடுகளில் தொடுமாறு வழுக்கிச் செல்கிறது. ஒரு நிலையில் அது AB என, $OA = a$ $OB = b$ எனுமாறு அமைந்தால் அதன் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \ldots (1)$$

ஆனால் $$a^2 + b^2 = k^2 \qquad \ldots (2)$$

a, b துணை அலகுகள்; அவை t என்ற மாறியின் சார்பலன்கள் என்க. (1)-ஐயும், (2)-ஐயும், x, y-ஐ மாறிலியாகக் கருதி, t-ஐப் பொறுத்து வகையிடு செய்க.



படம் 11·3.

$$\frac{x}{a^2}\frac{da}{dt} + \frac{y}{b^2}\frac{db}{dt} = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} = 0 \qquad \ldots (4)$$

$$\frac{da}{dt}\Big/\frac{db}{dt} = -\left(\frac{y}{b^2}\right)\Big/\left(\frac{x}{a^2}\right) = -\left(\frac{2b}{2a}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{x/a^2}{2} = \frac{y/b^2}{2b} \qquad \text{அது} \quad \frac{x/a}{a^2} = \frac{y/a}{b^2}$$

எனவே $$\frac{x/a}{a^2} = \frac{y/b}{b^2} = \frac{x/a + y/b}{a^2 + b^2} = \frac{1}{k^2} \qquad \ldots (1), (2) \text{ மூலம்}$$

(அது) $$\frac{x}{a^2} = \frac{1}{k^2}; \qquad \frac{y}{b^2} = \frac{1}{k^2}$$

எனவே $a = x^{1/3}\ k^{2/3}$; $b = y^{1/3}\ k^{2/3}$

(2)-ல் பிரதியிட

$$x^{2/3}\ k^{4/3} + y^{2/3}\ k^{4/3} = k^2$$

(அது) $$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$, என்ற வளைகோடுகளின் தொகுதிக்கு a, b துணையலகுகள். அவை, $a^2 + b^2 = c^2$ (c மிகை மாறிலி) என்ற தொடர்புடன் விளங்குகின்றன. நீள்வளையத் தொகுதிக்குச் சூழி காண்க.

தீர்வு :

முதலில் ஓர் துணையலகை நீக்குவோம்

$$b^2 = c^2 - a^2$$

எனவே $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad \ldots (1)$$

என்பது a என்ற ஓர் துணையலகுடைய தொகுதிக்குச் சமன்பாடு

a-ஐப் பொறுத்து பகுதி வகைக் கெழு காண

$$x^2\left(\frac{-2}{a^3}\right) + y^2\left[\frac{-1}{(c^2 - a^2)} - 2a\right] = 0$$

$$\therefore \quad \frac{(c^2 - a^2)^2}{a^4} = \frac{y^2}{x^2}$$

(அது) $$\frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{y}{x}$$

(அது) $$\frac{c^2}{a^2} - 1 = \frac{y}{x}$$

(அது) $$\frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{y}{x} = \left(\frac{x + y}{x}\right)$$

(அது) $a^2 = c^2\ x/x + y$

எனவே $c^2 - a^2 = a^2 \cdot \frac{y}{x} = c^2 y/(x + y)$

(1)-ல் பிரதியிட $$\frac{x^2(x + y)}{c^2 x} + \frac{y^2(x + y)}{c^2 y} = 1$$

(அது) $(x + y)^2 = c^2$ அல்லது $x + y = c$

பயிற்சிகள் 14 (A)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குச் சூழி காண்க.

(a) $x^2 + y^2 - 2ax\cos\lambda - 2ay\sin\lambda = c^2$; λ துணையலகு

(b) $x = a\sin(\theta - \lambda)$; $y = b\cos\theta$; λ துணையலகு

(c) $\dfrac{a^2\cos\theta}{x} - \dfrac{b^2\sin\theta}{y} = c$; θ துணையலகு.

(d) $x\cos t + y\sin t = a + a\cos t\log\tan\dfrac{t}{2}$

t துணையலகு.

(e) $y\cos\theta - x\sin\theta = a - a\sin\theta\log\tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; துணையலகு.

2. சூழி காண்க.

(a) $y = mx + am^3$; m துணையலகு.

(b) $ax\sec\lambda\ by\operatorname{cosec}\lambda = a^2 - b^2$; λ துணையலகு.

(c) $y = mx + am^p$; m துணையலகு.

(d) $(x - a)^2 + y^2 = 4\lambda$; λ துணையலகு.

(e) $\dfrac{x^2}{\lambda^2} + \dfrac{y^2}{(k^2 - \lambda^2)} = 1$; λ துணையலகு.

(f) $y = x\tan\theta - \dfrac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}$; θ துணையலகு.

3. λ என்பது துணையலகாகவும், A, B, C, D என்பன x, y-ன் சார்பலன்களாகவும் இருந்தால் $A\lambda^3 + 3B\lambda^2 + 3C\lambda + D = 0$ என்ற வளைகோடுகளில் தொகுதியின் சூழி $(BC - AD)^2 = 4(BD - C^2)(AC - B^2)$ என நிறுவுக.

4. $x\cos^3\theta + y\sin^3\theta = c$ என்ற நேர்கோடு θ-ன் எந்த மதிப்பிற்கும் தொடுகோடாக அமையுமாறு உள்ள வளைகோட்டின் சமன்பாடு $x^2y^2 = c^2(x^2 + y^2)$ என நிறுவுக.

5. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{2\lambda xy}{ab} + \dfrac{y^2}{b^2} = (1 - \lambda^2)$ என்னும் சமன்பாட்டில் λ-ஐ மாற்றுவதால் கிடைக்கும் கூம்பு வளைகளின் தொகுதியின்

சூழி $x = \pm a$; $y = \pm b$ பக்கங்களைக் கொண்ட இணைகரம் என நிறுவுக.

6. $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையத்தின் இரட்டை நிலைத்தூரங்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டத் தொகுதியின் சூழி $y^2 = 4a(x + a)$ என நிறுவுக.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தின் மைய ஆரை வெக்டர்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சூழி காண்க.

8. செவ்வக அதிபரவளையம் ஒன்றின் மைய ஆரை வெக்டர்களை விட்டங்களாகக் கொண்டு வரைந்த வட்டங்களின் சூழி ஒரு சூழி ஒரு ஞாணி (lemniscate) ஆகும் என நிறுவுக.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தைப் பொறுத்து $\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{k^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தின் புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகளின் (polar) சூழி $\frac{x^2h^2}{a^4} + \frac{y^2k^2}{b^4} = 1$ என நிறுவுக.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்தின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அச்சுக்களின் மேல் செங்குத்துக் கோடுகள் வரையப் படுகின்றன. அவற்றின் பாதங்களைக் இணைக்கும் கோடு எப்போதும் $\left(\frac{x}{a}\right)^{2/3} + \left(\frac{y}{b}\right)^{2/3} = 1$ என்ற வளைகோட்டைத் தொடும் என நிறுவுக.

11. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அவற்றின் ஆரை வெக்டர்களின் முனைகளின் செங்குத்தாய் அமையும் கோடுகளின் சூழிகள் காண்க :

(i) $r = a\, e^{\theta \cot \alpha}$

(ii) $r^n = a^n \sec n\theta$.

12. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் ஆரை வெக்டர்களுக்குச் செங்குத்தாக அதன் முனைகளில் வரையப்பட்ட நேர்கோடுகளின் சூழி $r = 2a\cos\theta$ என நிறுவுக.

13. பின்வரும் வளைகோட்டின் ஆரை வெக்டர்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் சூழி என்ன ?

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta.$$

14. பொதுமையமும், பொது அச்சும், மாறுத பரபரப்பும் உள்ள நீள் வளையங்களின் சூழி காண்க.

15. x, y அச்சுக்களை அச்சுக்களாகவும், அரை அச்சுக்களின் கூட்டல் தொகை c என்ற மாறிலியாகவும் கொண்டு அமைந்துள்ள நீள் வளையங்களின் சூழி $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என நிறுவுக.

16. ஒரு நேர்கோட்டில் மையம் கொண்டு, அந்நேர் கோட்டில் கொடுக்கப்பட்ட நிலைப்புள்ளிக்கும், மையத்திற்கும் இடைப்பட்ட தூரத்திற்கேற்ப மாறும் ஆரையும் கொண்டு அமைந்த வட்டங்களின் சூழி காண்க.

17. பின்வரும் நிபந்தனைகளுக்கேற்ப அமைந்துள்ள $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்ற நேர்கோடுகளின் தொகுதிகளுக்குச் சூழிகள் காண்க. (c மாறிலி).

(a) $ab = 4$

(b) $a^2 + b^2 = c^2$

(c) $a + b = c$

(d) $a^m + b^n = c^{m+n}$

18. $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ என்ற வளைகோடுகளின் தொகுதிகளுக்குப் பின்வரும் கட்டுப்பாடுகளுக்கேற்ப சூழிகள் காண்க.

(a) $ab = c^2$

(b) $a + b = c$

19. $a^p + b^p = c^p$ எனில் $\frac{x^m}{a^m} + \frac{y^m}{a^m} = 1$ என்ற வளைகோடுகளின் தொகுதிகளுக்குச் சூழி $x^{\frac{mp}{m+p}} + y^{\frac{mp}{m+p}} = c^{\frac{mp}{m+p}}$ என நிறுவுக.

20. செங்குத்தாக உள்ள இரு நேர் கோடுகளின் மேல், இரு முனைகளும் அமையுமாறு கொடுக்கப்பட்ட நீளமுடைய நேர் கோடு வழுக்கிச் செல்கிறது. அக்கோட்டை விட்டமாக உடைய வட்டங்களின் சூழி காண்க.

21. கொடுக்கப்பட்ட செவ்வகலமும், இணை அச்சுக்களும், $y = px + q$ என்ற நேர்கோட்டின்மேல் குவியங்களும் கொண்ட பரவளையங்களின் தொகுதிக்குச் சூழி காண்க.

விடைகள் 11 (A)

1. (a) $(x^2 + y^2 - c^2) = 4a^2 (x^2 + y^2)$

(b) $\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{a^2y^2}{b^2x^2} &= 1 \\ y &= \pm b \end{aligned}\right\}$

(c) $\frac{a^4}{x^2} + \frac{b^4}{y^2} = c^2$

(d) $y = a \cosh \frac{x}{a}$

(e) $y = a \cosh \frac{x}{a}$

2. (a) $4x^3 + 27ay^2 = 0$ (b) $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$.

(c) $(p-1)^{p-1} x^p + p^p ay^{p-1} = 0$ (d) $y^2 = 4(x+1)$

(e) $(y^2 - x^2 - k^2)^2 = 4k^2 x^2$ (f) $u^4 = g^2x^2 + 2u^2 gy$

7. $(x^2 + y^2)^2 = a^2 x^2 + b^2 y^2$

11. (i) அதே போன்ற சமகோணச் சுருளி

(ii) $r^{\frac{n}{1-n}} = a^{\frac{n}{1-n}} \cos \left(\frac{n\theta}{1-n}\right)$

13. $r^2(e^2 - 1) - 2\,ler\cos\theta + l^2 = a$

14. $2xy = c$

16. இரு நேர்கோடுகள்.

17. (a) $xy = 1$ (b) $x^{2/3} + y^{2/3} = c^{2/3}$

(c) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ (d) $x^{\frac{m}{m+1}} + y^{\frac{m}{m+1}} = c^{\frac{m}{m+1}}$

18. (a) $16xy = c^2$ (b) $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = c^{\frac{1}{3}}$.

20. $x^2 + y^2 = l^2$.

21. $2p^2x - 2py + (2pq + lp^2 + l) = 0$

§ 11-5. வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி (evolute) ;

வளைகோட்டின் வளைவு மையங்களது நியம பாதையை வரைச் செங்கோட்டுத்தழுவி என இலக்கணம் கூறினோம். இப் பகுதியில் வேறு ஒரு முறையில் வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியை வரையறை செய்வோம்.

தேற்றம் : வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோடுகளது சூழியே வளை கோட்டின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி ஆகும்.

நிறுவல் :

வளைகோட்டில் P ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. PT அப்புள்ளியில் தொடுகோடு. அது வளைகோட்டின் தளத்தில் உள்ள OX என்ற நிலைக்கோட்டுடன் ψ என்ற கோணத்தை உண்டாக்கும் என்க.

Q என்பது வளைகோட்டில் P-க்கு அணுக்கமான ஒரு புள்ளி; Q-ல் தொடுகோடான QT, ஆனது OX உடன் $\chi + \delta\chi$ கோணத்தை உண்டாக்கும் என்க.

PQ இணைக்கவும். $\angle PQR = \alpha$ என்க. P, Q-ல் வரைச் செங்கோடுகள் R-ல் சந்திக்கட்டும்.

வளைகோட்டில் A ஒரு நிலைப்புள்ளி ; வில் AP $= s$ மற்றும் வில் AQ $= s + \delta s$ என்க.

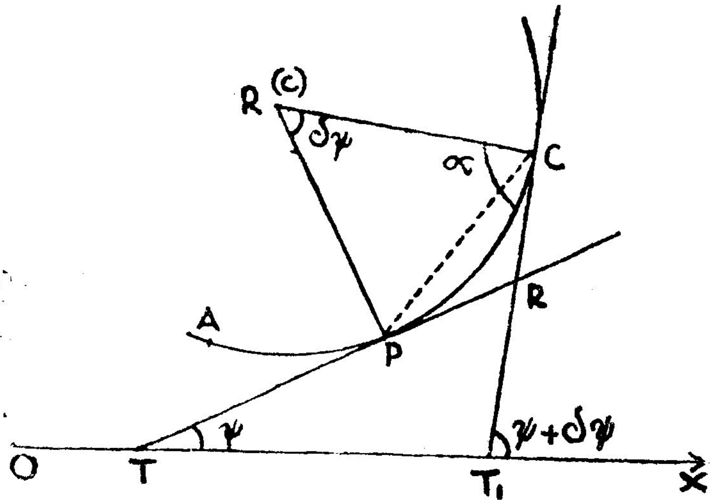
எனவே வடிவ கணிதப்படி $\angle PRQ = \delta\chi$

$\triangle PQR$-லிருந்து

$$\frac{PR}{PQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin \delta \chi}$$

(அது) $PR = \sin \alpha \cdot \dfrac{PQ}{\sin \delta \chi}$

$$= \sin \alpha \cdot \frac{PQ}{\delta s} \cdot \frac{\delta s}{d\chi} \cdot \frac{\delta \chi}{\sin \delta \chi} \qquad (1)$$



படம் 11·4.

வளைகோட்டு வழியே $Q \longrightarrow P$ எனில்

$\alpha \longrightarrow \dfrac{\pi}{2}$; எனவே $\sin \alpha \longrightarrow 1$; $\dfrac{PQ}{\delta s} \longrightarrow 1.$

மேலும் $\dfrac{\delta s}{\delta \chi} \longrightarrow \dfrac{ds}{d\chi} = \rho.$

மற்றும் $\dfrac{\delta \chi}{\sin \delta \chi} \longrightarrow 1$

∴ எல்லையில் (1)-ன் வடிவம்

$$\underset{Q \to P}{\mathrm{Lt}} (PR) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{ds}{d\chi} \cdot 1 = \rho$$

Q ⟶ P ஆகும்போது R-ன் எல்லை C என்க. எனவே P-ல் வளைவு மைய - C.

எனவே வளைகோட்டில் P-ன் பல நிலைகளுக்கேற்ப C-ன் நியமப் பாதை வளைகோட்டின் வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவி ஆகும். (2)

ஆனல் C என்பது வளைகோட்டின் அடுத்து அடுத்துள்ள வரைச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியாக அமைவதாகும்.

எனவே C-ன் நியமப்பாதை, கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோடுகளின் சூழியாகும். ... (3)

எனவே (2), (3) மூலம் வளைகோட்டின் வரைச்செங்கோடுகளின் சூழியாகவே வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி அமைந்துள்ளது என்பது புலனுகிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$y^2 = 4ax$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க.

தீர்வு :

$y^2 = 4ax$

என்பது வளைகோடு

(1)-ஐ வகையீடு செய்ய $2y\,y_1 = 4a$

$$\therefore \quad y_1 = 2\frac{a}{y}$$

வரைச் செங்கோட்டின் சாய்வு விகிதம் $= -\dfrac{y}{2a}$

$(a\,m^2,\ 2\,am)$-ல் வரைச் செங்கோட்டு சாய்வு விகிதம்

$$= -\frac{2\,am}{2\,a} = -\,m.$$

எனவே வரைச் செங்கோடு

$$(y - 2\,am) = -\,m\,(x - am^2)$$

(அது) $\qquad y = -\,mx + 2\,am + am^3 \qquad \ldots (1)$

m-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$0 = -x + 2a + 3am^2 \qquad \ldots (2)$$

(2)-லிருந்து, $x - 2a = 3am^2 \qquad \ldots (3)$

சமன்பாடு (1)-ஐ $y = -m(x-2a) + am^3$ எனவும் எழுதலாம்

(அது) $y = -m(3am^2) + am^3 \qquad \ldots$ (3)-லிருந்து

$$y = -2am^3 \qquad \ldots (4)$$

(3), (4)-லிருந்து m-ஐ நீக்கம் செய்ய,

$$\left(\frac{x-2a}{3a}\right)^3 = m^6 = \left(\frac{-y}{2a}\right)^2$$

$$\frac{(x-2a)^3}{27a^3} = \frac{y^2}{4a^2}; \quad \text{(அது)} \quad 27ay^2 = 4(x-2a)^3$$

∴ வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியின் சமன்பாடு

$$27ay^2 = 4(x-2a)^3.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு வரைச்செங் கோட்டுத் தழுவி காண்க.

$$(x+y)^{2/3} + (x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}$$

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டில் P $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ என்பது ஒரு புள்ளி.

வளைகோட்டு சமன்பாடு

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ஆதலால்

$$2/3\, x^{-1/3} + 2/3\, y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{ax} = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}} = -\tan\theta$$

எனவே வரைச்செங்கோட்டின் சாய்வு

விகிதம் $= -1/\dfrac{dy}{dx} = \cot\theta$

எனவே வரைச்செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - a\sin^3\theta = \cot\theta\,(x - a\cos^3\theta)$$

$$= x\cot\theta - a\cos^3\theta\cot\theta \qquad \ldots\ldots \quad (1)$$

θ-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$-a\,(3\sin^2\theta\cos\theta) = x\,(-\operatorname{cosec}^2\theta)$$

$$-a\,[\cos^3\theta\,(-\operatorname{cosec}^2\theta)] - a\cot\theta\,[3\cos^2\theta\,(-\sin\theta)]$$

$$\therefore x = 3a\sin^4\theta\cos\theta + a\cos^3\theta + 3a\sin^2\theta\cos^3\theta$$

$$= 3a\sin^2\theta\cos\theta\,(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + a\cos^3\theta$$

$$= 3a\sin^2\theta\cos\theta + a\cos^3\theta$$

இம்மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட

$$y = a\sin^3\theta + \cot\theta\,(3a\sin^2\theta\cos\theta + a\cos^3\theta)$$

$$- a\cos^3\theta\cot\theta$$

$$= 3a\sin\theta\cos^2\theta + a\sin^3\theta$$

$$\therefore x + y = 3a\sin\theta\cos\theta\,(\sin\theta + \cos\theta)$$

$$+ a\,(\sin^3\theta + \cos^3\theta)$$

$$= a\,(\sin\theta + \cos\theta)\,[3\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta$$

$$- \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta]$$

$$= a\,(\sin\theta + \cos\theta)\,(\sin\theta + \cos\theta)^2$$

$$= a\,(\sin\theta + \cos\theta)^3$$

இவ்வாறே

$$x - y = -a\,(\sin\theta - \cos\theta)^3$$

எனவே θ நீக்கம் செய்ய

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3}$$
$$= a^{2/3}\,[(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2]$$
$$a^{2/3}\,[2\,(\sin^2\theta+\cos^2\theta)]$$
$$= 2a^{2/3}.$$

எனவே வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவி

$$(x+y)^{2/3}+(x-y)^{2/3} = 2a^{2/3}.$$

பயிற்சிகள் 11 (B)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க.

(i) $x^2 - y^2 = a^2$

(ii) $2xy = a^2$

(iii) $x = a\cos t + \log\tan\frac{t}{2}\ ;\ y = a\sin t$

(iv) $x = a\,(3\cos t - 2\cos^3 t)$

$y = a\,(3\sin t - 2\sin^3 t)$

2. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபர வளையின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க.

3. $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ என்ற நீள் வளையத்தின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியும் λ துணையலகாக உள்ள $a^2x^2\sec^4\lambda + b^2y^2\operatorname{cosec}^4\lambda = (a^2-b^2)^2$ என்னும் நீள் வளையத் தொகுதியின் சூழியும் ஒன்றே என நிறுவுக.

4. $r^2 - a^2 = mp^2$ என்ற பாதச் சமன்பாட்டைக் கொண்ட வளைகோட்டின் வரை செங்கோட்டுத் தழுவியின் பாதச் சமன்பாடு $r^2 - (1-m)\,a^2 = mp^2$ என நிறுவுக.

5. $r = a\,(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி $\left(\frac{2a}{3},\ 0\right)$ என்ற புள்ளியில் கோண ஆதியை உடைய $r = \frac{a}{3}\,(1-\cos\theta)$ என்னும் நெஞ்சுவளை என நிறுவுக.

விடைகள் 11 (B)

1. (i) $x^{2/3} + y^{2/3} = (2a)^{2/3}$

(ii) $(x + y)^{2/3} - (x - y)^{2/3} = 2a^{2/3}$

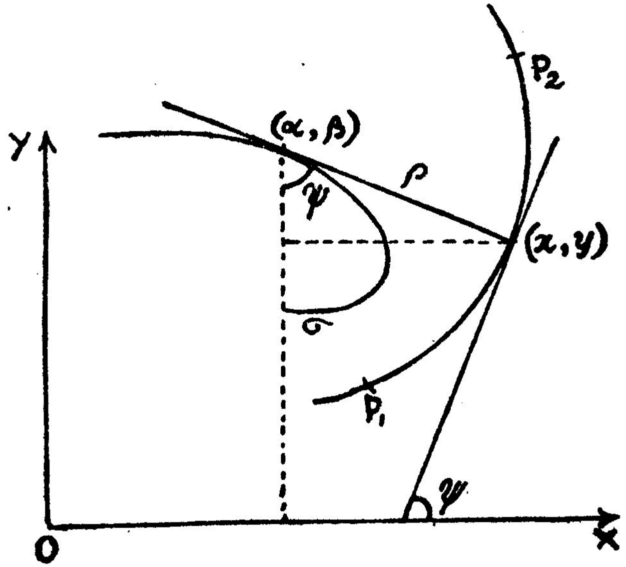
(iii) $y = a \cosh (x/a)$

(iv) $x^{2/3} + y^{2/3} = (4a)^{2/3}$

2. $(ax)^{2/3} - (by)^{2/3} = (a^2 + b^2)^{2/3}$

§ 11-6. வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியின் நீளம்

தேற்றம் : ஒரு வளைகோட்டின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகளில் வளை வாரையின் வேறுபாடு, அப்புள்ளிகளுக்கு இயைந்து வரைச் செங் கோட்டுத் தழுவியின் மீது அமைந்துள்ள இரு புள்ளிகளுக்கு இடையே உள்ள வில் தூரமாகும்.



படம் 11·5.

நிறுவல் :

வளைகோட்டில் (x, y) எனும் புள்ளியில் வளைவு மையம் (α, β) எனில் ρ-க்கு ஏற்ற குறியீட்டுடன்

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= x - \rho \sin \chi \\ \beta &= y + \rho \cos \chi\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

என அறிவோம் (படம் 11.5 பார்க்கவும்).

s என்பது வளைகோட்டில் A என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள வில் தூரம் என்றும், σ என்பது வரைச் செங் கோட்டுத் தழுவியில் நிலைப்புள்ளி ஒன்றில் இருந்து (α, β)-க்கு அளக்கப்பட்ட தூரம் என்றும் கொள்க.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \chi, \ \frac{dy}{ds} = \sin \chi, \ \frac{d\chi}{ds} = \frac{1}{\rho}$$

என்பதை நினைவில் கொண்டு (1)-ஐ வகையிட

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\frac{d\rho}{ds} \sin \chi, \ \frac{d\beta}{ds} = \frac{d\rho}{ds} \cos\chi.$$

இவைகளை வர்க்கமாக்கி, கூட்டி, இருபடி மூலம் காண

$$\frac{d\rho}{ds} = \left\{\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{ds}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d\alpha}{ds}\left\{1 + \left(\frac{d\beta}{d\alpha}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{d\sigma}{d\alpha} \cdot \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\sigma}{ds}.$$

எனவே $\dfrac{d\rho}{d\sigma} = 1$

$\therefore \ \sigma = \rho + c$; c மாறிலி.

வளைகோட்டில் ρ_1, ρ_2 என்ற இரு புள்ளிகளில் ρ-ன் மதிப்பு ρ_1, ρ_2 எனவும் அவற்றுக்கிணையந்த σ-ன் மதிப்பு σ_1, σ_2 எனவும் இருப்பின்

$$\sigma_1 = \rho_1 + c$$

$$\sigma_2 = \rho_2 + c$$

$$\therefore \ \sigma_1 - \sigma_2 = \rho_1 - \rho_2$$

எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

குறிப்பு :

$$\frac{d\alpha}{ds} = -\sin\chi\,\frac{d\rho}{ds}$$

$$\frac{d\beta}{ds} = \cos\chi\,\frac{d\rho}{ds} \text{ ஆதலால்}$$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\cot\chi = -\frac{dx}{dy}$$

எனவே வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியின் தொடுகோடு மூல வளை கோட்டுக்கு வரைச் செங்கோடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வளையத்துக்கு வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியின் மொத்த நீளம் $4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

துணையலகு அமைப்பில் சமன்பாடு

$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dt} = -a\sin t\,; \quad \frac{dy}{dt} = b\cos t$$

மற்றும்

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\cos t\,; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -b\sin t.$$

$$\rho = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{x'y'' - y'x''}$$

$$= \frac{(a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

$t = \frac{\pi}{2}$ எனில் சிற்றச்சு முனையில் $\rho = \frac{a^2}{b}$;

$t = 0$ எனில் பேரச்சு முனையில் $\rho = \frac{b^2}{a}$.

∴ வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவியின் மொத்த நீளம்

$$= 4\left(\frac{a^2}{b} - \frac{b^2}{a}\right) \text{ ஆகும்.}$$

§ 11-6. லம்ப உரை (Involute)

Σ என்ற வளைகோட்டுக்கு Σ' என்பது வரைச்செங்கோட்டுத் தழுவி எனில், Σ' என்ற வளைகோட்டுக்கு Σ என்பது லம்ப உரை எனப்படும்

பயிற்சிகள் 11 (C)

1. $4a$ செவ்வகலம் உள்ள பரவளையத்தின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி காண்க. வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி பரவளையத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளியில் இருந்து கூர்ப்புள்ளிக்கு உள்ள வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியின் வில் நீளம் $2a\,(3\sqrt{2} - 1)$ என நிறுவுக.

2. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளைகோட்டின் வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவியின் மொத்த நீளம் $12a$ என நிறுவுக.

3. ஒரு வளைகோட்டுக்கு பல லம்ப உரைகள் இருக்கலாமென்றும், ஒரு வளைகோட்டின் லம்ப உரைகள் இரண்டை அவற்றின் பொதுவரைச் செங்கோடு வழியே அளந்து பார்த்தால் தூரம் மாறாது எனவும் நிறுவுக.

12. பெருமம், சிறுமம்

§ 12-0 அறிமுகம்

இப்பகுதியில் வகைநுண் கணிதத்தினைப் பயன்படுத்தி ஒரு சார்பலனின் மதிப்பு குறிப்பிட்ட அயலில் பெரும, சிறும மதிப்புகளை அடையும் தன்மை பற்றி ஆராய்வோம். இவ்வாறு பெரும, சிறும மதிப்புகளைப்பற்றி அறிந்து கொள்வது வளைகோட்டின் சுவட்டினை வரையும்போதும் பயன்படும்.

பின்வரும் விவாதங்களில் $f(x)$-ன் தேவைப்படும் வரிசை வகையீட்டுக் கெழுக்கள் தொடர்ச்சி உடையதெனக் கொள்வோம்.

§ 12-1 சார்பலனின் பெரும மதிப்பு :

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = a$ என்ற புள்ளியில் பெரும மதிப்பு பெற்றிருக்கிறது எனக் கூறுவதன் பொருள் ϵ ஒரு சிறு முடிவுள்ள மிகை மதிப்பெனில் $0 < h < \epsilon$ என அமைந்துள்ள எல்லா, மிகை h மதிப்புகளுக்கும் $f(a+h)$, $f(a-h)$ இரண்டையும்விட $f(a)$ மதிப்பில் பெரியது என்பதே. அதாவது $0 < |x-a| < \epsilon$ என்ற போதிய அளவு சிறு அயலில் $f(x) < f(a)$ எனில் $[a, f(a)]$ என்பது வளைகோட்டின் அப்பகுதியில் பெருமப் புள்ளியாகும்.

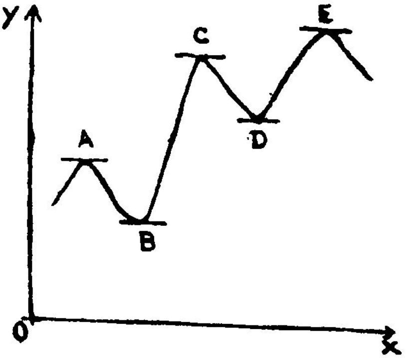
இவ்வாறே $y = f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = a$ என்ற புள்ளியில் சிறுமமதிப்பு பெற்றிருக்கிறது எனக் கூறுவதன் பொருள் ϵ ஒரு சிறு முடிவுள்ள மிகை மதிப்பு எனில் $0 < h < \epsilon$ என அமைந்துள்ள எல்லா மிகை h மதிப்புகளுக்கும் $f(a+h)$, $f(a-h)$ இரண்டையும் விட $f(a)$ மதிப்பில் சிறியது என்பதே. அதாவது $0 < |x-a| < \epsilon$ என்ற போதிய அளவு சிறு அயலில் $f(x) > f(a)$ எனில் $[a, f(a)]$ என்பது வளைகோட்டின் அப்பகுதியில் சிறுமப் புள்ளியாகும்.

குறிப்பு 1 : $x = a$-ல் ஒரு சார்பலன் அதிகரிக்கிறது என்பதன் பொருள், h மிகையாகவும், போதிய அளவு சிறியதாகவும் இருக்கும் போது $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ ஆக இருக்கும் என்பதே: $f(a-h) > f(a) > f(a+h)$ எனில் $x = a$-ல் சார்பலன் குறைகிறது என்கிறோம்.

$y = f(x)$ என்ற சார்பலன், எந்தப் புள்ளிகளில் அதிகரிப்பது நின்று, குறைவது ஆரம்பிக்கிறதோ அப்புள்ளிகளில் y பெரும மதிப்பு உடையதாகக் கூறுகிறோம். இவ்வாறே சார்பலன் குறைவது நின்று, அதிகரிப்பது ஆரம்பிக்கிறதோ அப்புள்ளிகளில் y சிறும மதிப்பு உடையது எனக் கூறுகிறோம்.

$f(x)$, $x = a$-ல் அதிகரிக்கும் சார்பலனாக இருந்தால் $f'(a)$ மிகை ; $f(x)$, $x = a$-ல் குறையும் சார்பலனாக இருந்தால் $f'(a)$ குறை. மற்றும் $f'(a) = 0$ ஆக இருந்தால் $x = a$-ல் $f(x)$, கணநிலை (stationary) யில் இருப்பதாகக் கூறுகிறோம்.

குறிப்பு 2 : $f(x)$-ன் பெரும, சிறும மதிப்புகளை வரையறை செய்தபோது, அம்மதிப்புகள் தாம் $f(x)$-க்கு மிகச் சிறிய, மிகப் பெரிய மதிப்புகள் என்ற பொருளில் கூறவில்லை. நமது வரை



படம் 12·1

யறையின்படி: பெரும, சிறும மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளியைப் பொறுத்தனவே. படத்தில் கண்டவாறு சார்பலனுக்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பெரும, சிறும மதிப்புகள் இருக்கக் கூடும். அது மட்டுமல்ல ; படத்தில் காட்டியவாறு ஒரு பெரும மதிப்பு (A-ல்), ஒரு சிறும மதிப்பைவிட (D-ல்) குறைவாக இருக்கக் கூடும்.

§ பெரும, சிறும மதிப்புகளுக்குத் தேவையான ஒரு நிபந்தனை :

$f(x)$ என்ற சார்பலன் $x = c$-ல் பெரும அல்லது சிறும மதிப்பைப் பெறுவதற்கான நிபந்தனை ; $f'(c) = 0$. [$f'(c)$ உளதாயின்]

நிறுவல் :

வகை 1 : $x = c$-ல் $f'(c)$ உள்ளது என்றும் $f(x)$ அப்புள்ளியில் பெருமம் என்றும் கொள்க. $(c+h)$, $(c-h)$ என $x = c$-க்கு இருபுறமும் x-ன் இருமதிப்புகளைக் கருதுக. h மிகச் சிறியது. $x = c$-ல் பெருமம் உள்ளதால் $f(c) > f(c+h)$, $f(c) > f(c-h)$. அதாவது $f(c+h) - f(c)$, $f(c-h) - f(c)$ இரண்டுமே குறை.

அதாவது, h மிகையாக இருந்தாலும் அல்லது குறையாக இருந்தாலும்,

$$f(c+h) - f(c) < 0$$

எனவே, $h > 0$ எனில்,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0 \qquad \ldots \ldots (1)$$

$h < 0$ எனில்

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \qquad \ldots \ldots (2)$$

$f'(c)$ உளதாகையால், அது h ஆனது மிகை மதிப்புகள் வழியாகவோ அல்லது குறை மதிப்புகள் வழியாகவோ பூச்சியத்திற்கு அணுகும் போது, $\dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$ என்ற பின்னத்தின் எல்லை மதிப்பாகக் கிடைக்கும்.

எனவே (1)-லிருந்து, h மிகை மதிப்புகள் வழியே பூச்சியத்திற்கு அணுகினல்,

$$f'(c) \leq 0 \qquad \ldots \ldots (3)$$

(2)-லிருந்து, h குறைமதிப்புகள் வழியே பூச்சியத்திற்கு அணுகினல்,

$$f'(c) \geqslant 0 \qquad \ldots \ldots (4)$$

(3)-ம், (4)-ம் ஒரே சமயத்தில் உண்மையாக இருக்க வேண்டுமானல் $f'(c) = 0$.

வகை II :

$x = c$-ல் $f'(c)$ உள்ளதென்றும், $f(x)$ அப்புள்ளியில் சிறுமம் என்றும் கொள்க.

h மிகையாக இருந்தாலும் அல்லது குறையாக இருந்தாலும்,

$$f(c+h) - f(c) > 0.$$

எனவே, $h > 0$ எனில்,

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0 \quad \ldots (1)$$

$h < 0$ எனில்

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0 \quad \ldots (2)$$

h ஆனது மிகை மதிப்புகள் வழியாக பூச்சியத்தை அணுகினல் (1)-லிருந்து,

$$f'(c) \geqslant 0 \quad \ldots (3)$$

h ஆனது குறை மதிப்புகள் வழியாக பூச்சியத்தை அணுகினல் (2)-லிருந்து,

$$f'(c) \leq 0 \quad \ldots (4)$$

எனவே (3)-ம் (4)-ம் ஒரே சமயத்தில் உண்மையாக இருக்க வேண்டுமானல் $f'(c) = 0$.

குறிப்பு 1: $f'(c) = 0$ என்ற நிபந்தனையை வடிவ கணிதத்தின்படி $x = c$-ல் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருப்பதைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு 2: பெரும அல்லது சிறும மதிப்புக்கு $f'(c) = 0$ என்பது தேவையான நிபந்தனை. ஆனல் இது போதுமான நிபந்தனையல்ல என்பதற்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு தருவோம்.

$f(x) = x^3$ என்ற சார்பலனைக் கருதுக.

$\therefore \; f'(x) = 3x^2$

$\therefore \; f'(0) = 0$

இங்கே $f(0+h) = h^3$

$f(0) = 0$

$f(0+h) - f(0) = h^3$

$h > 0$ எனில் $f(0+h) > f(0)$.

$h < 0$ எனில் $f(0+h) < f(0)$.

எனவே 0-ஐ ஒட்டிய எந்த இடைவெளி முழுவதிலும் $f(0+h) > f(0)$ அல்லது $f(0+h) < f(0)$ என இருக்க முடியாது. எனவே,

$x = 0$-ல் பெரும, சிறும மதிப்புகள் இல்லை.

§ 12-3. பெரும, சிறும மதிப்புகளுக்குப் போதுமான நிபந்தனை :

c என்ற புள்ளியின் குறிப்பிட்ட அயலில் $f(x)$-க்குத் தொடர்ச்சியான இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன என்றால்

(i) $f'(c) = 0$, $f''(c)$ குறை. ஆக இருக்கும்போது $x = c$-ல் $f(x)$ பெருமம்.

(ii) $f'(c) - 0$, $f''(e)$ மிகையாக இருக்கும்போது $x = c$-ல் $f(x)$ சிறுமம்.

நிறுவல் :

இரு உறுப்புக்களுக்குப் பின் மீதி வருமாறு டெய்லர் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்துவோம்.

$f(c+h) = f(c) + h f'(c) + \frac{h^2}{2!} f''(c+\theta h)$; இங்கே $(0<\theta<)$

$f'(c) = 0$ ஆதலால்

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^2}{2!} f''(c+\theta h) \qquad \dots \dots \quad (1)$$

(i) [$x = c$-ல் $f''(x)$ தொடர்ச்சி உடையது ; குறை மதிப்பு உடையது].

எனவே c-ஐ ஒட்டிய ஒரு இடைவெளியில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் $f''(x)$ குறையாக இருக்குமாறு c-க்கு இடைவெளி ஒன்று கண்டு பிடிக்க முடியும்.

இவ்விடைவெளியில் $(c + h)$ என்பது ஒரு புள்ளி. $0 < \theta < 1$ ஆதலால் $(c + \theta h)$-ம் இந்த இடைவெளியில் ஒரு புள்ளியே.

$\therefore \quad f''(c + \theta h)$ குறை.

ஆனால் h மிகையாக இருந்தாலும், குறையாக இருந்தாலும் $\frac{h^2}{2!}$ மிகை.

$$\therefore \quad \frac{h^2}{2!} f''(c + \theta h) \text{ குறை.}$$

எனவே.

c-ஐ ஒட்டிய ஒரு இடைவெளியில் $(c + h) - f(c) < 0)$ ஆக இருக்கிறது.

எனவே, $x = c$-ல் $f(x)$ பெருமம்.

(ii) [$x = c$-ல் $f''(x)$ தொடர்ச்சி உடையது ; மிகை மதிப்பு உடையது].

இடைவெளிப் புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் $f''(x)$ மிகையாக இருக்குமாறு c-ஐ ஒட்டி ஒரு இடைவெளி உள்ளது. இவ்விடைவெளியில் $(c + h)$ என்பது ஒரு புள்ளி. $0 < \theta < 1$ ஆதலால் $(c + \theta h)$-ம் இந்த இடைவெளியில் ஒரு புள்ளியே.

$\therefore \quad f''(c + \theta h)$ மிகை.

ஆனால், h மிகையாக இருந்தாலும், குறையாக இருந்தாலும் $\frac{h^2}{2!}$ மிகை.

$$\therefore \quad \frac{h^2}{2!} f''(c + \theta h) \text{ மிகை.}$$

எனவே,

c-ஐ ஒட்டிய ஒரு இடைவெளியில் $(c + h)$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் $f(c + h) - f(c) > 0$ ஆக இருக்கிறது.

எனவே

$$x = c\text{-ல் } f(x) \text{ சிறுமம்.}$$

§ 12-4. பெருமம், சிறுமம் காணப்பொதுவான நிபந்தனை :

c என்ற புள்ளியின் குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$-க்கு n வரிசை வரை தொடர்ச்சியான வகைக்கெழுக்கள் உள்ளன.

$$f'(c) = f''(c) = \ldots\ldots = f^{n-1}(c) = 0.$$

ஆனால் $f^n(c) \neq 0$.

(i) n இரட்டைப் படையாக இருந்து, $f^n(c) < 0$ எனில், $x = c$-ல் பெருமம்.

(ii) n இரட்டைப் படையாக இருந்து, $f^n(c) > 0$ எனில், $x = c$-ல் சிறுமம்.

(iii) n ஒற்றைப் படையாக இருந்தால் $x = c$-ல் பெருமமும் இல்லை. சிறுமமும் இல்லை.

நிறுவல் :

n உறுப்புக்களுக்குப் பின் மீதி வருமாறு டெய்லர் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தினால்,

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + \frac{h^2}{2!}f''(c) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{n-1}(c) + \frac{h^n}{n!}f^n(c+\theta h) \text{ இங்கே } 0 < \theta < 1$$

$$f(c+h) - f(c) = \frac{h^n}{n!}f^n(c+\theta h) \qquad \ldots (1)$$

$$[\because f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{n-1}(c) = 0]$$

(i) [$x = c$-ல் $f^n(x)$ தொடர்ச்சி உடையது ; குறை மதிப்பு உடையது.]

இடைவெளிப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் $f^n(x)$ குறையாக இருக்குமாறு c-ஐ ஒட்டி ஒரு இடைவெளி உள்ளது. இவ்விடைவெளியில் $(c+h)$ என்பது ஒரு புள்ளி. $0 < \theta < 1$ ஆதலால் $(c+\theta h)$-ம் இந்த இடைவெளியில் ஒரு புள்ளியே.

$\therefore$ $f^n(c+\theta h)$ குறை. ஆனால் h மிகையாக இருந்தாலும் அல்லது குறையாக இருந்தாலும் n இரட்டைப்படையாதலால் $\frac{h^n}{n!}$ மிகை.

$$\therefore \quad \frac{h^n}{n!} \cdot f^n(c + \theta h) \text{ குறை.}$$

எனவே,

c-ஐ ஒட்டிய ஒரு இடைவெளியில் $(c + h)$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் $f(c + h) - f(c) < 0$ ஆக இருக்கிறது.

எனவே,

$x = c$-ல் $f(x)$ பெருமம்.

(ii) [$x = c$-ல் $f^n(x)$ தொடர்ச்சி உடையது ; மிகை மதிப்பு உடையது.]

இடைவெளிப்புள்ளி ஒவ்வொன்றிலும் $f^n(x)$ மிகையாக இருக்குமாறு c-ஐ ஒட்டி ஒரு இடைவெளி உள்ளது. இவ்விடைவெளியில் $(c + h)$ என்பது ஒரு புள்ளி. $0 < \theta < 1$ ஆதலால் $(c + \theta h)$-ம் இந்த இடைவெளியில் ஒரு புள்ளியே.

$\therefore \quad f^n(c + \theta h)$ மிகை.

ஆனால் h மிகையாக இருந்தாலும் குறையாக இருந்தாலும் n இரட்டைப்படையாதலால்

$\frac{h^n}{n!}$ மிகை.

$$\therefore \quad \frac{h^n}{n!} f^n(c + \theta h) \text{ மிகை.}$$

எனவே, c-ஐ ஒட்டிய ஒரு இடைவெளியில் $(c + h)$ என்ற ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் $f(c + h) - f(c) > 0$ ஆக இருக்கிறது.

எனவே,

$x = c$-ல் $f(x)$ சிறுமம்.

(iii) $x = c$-ல் $f^n(x)$ தொடர்ச்சி உடையது ஆதலால், c-ன் சிறு அயலில் $f^n(c)$ ஒரே குறியீட்டைப் பெற்றிருக்கும்.

n ஒற்றைப்படையாதலால் $\frac{h^n}{n!}$ h-ன் குறியீட்டு மாற்றங்களுக்கேற்ப குறியீட்டு மாற்றங்கள் பெறும். ஆனால் (1)-லிருந்து c-ன் சிறு அயலில் h-ன் குறியீட்டு மாற்றத்திற்கேற்ப $f(c + h) - f(c)$ குறியீட்டு மாற்றம் பெறுகிறது.

எனவே

$x = c$-ல் $f(x)$-க்கு பெருமமும் இல்லை, சிறுமமும் இல்லை.

§ 12-5. பெருமம், சிறுமம் காண மாற்றுமுறை :

(i) x ஆனது, c-ஐ விடச் சற்று குறைந்த மதிப்புகளிலிருந்து, சற்று பெரிய மதிப்புகளுக்கு அதிகரிக்கும் போது $f'(x)$-ன் குறியீடு, மிகையிலிருந்து குறையாக மாறினால் $x = c$-ல் $f(x)$-க்குப் பெருமம் உள்ளது.

(ii) x ஆனது, c-ஐ விடச் சற்றுக் குறைந்த மதிப்புகளிலிருந்து சற்று பெரிய மதிப்புகளுக்கு அதிகரிக்கும் போது $f'(x)$-ன் குறியீடு குறையிலிருந்து மிகையாக மாறினால் $x = c$-ல் $f(x)$-க்குச் சிறுமம் உள்ளது.

நிறுவல் :

(i) $f(x)$-க்கு $x = c$-ல் பெருமம் இருந்தால் c-க்கு இடப்புறப் புள்ளிகளில் $f(x)$-ன் மதிப்பு குறைவாக இருந்து, சிறிது சிறிதாக அதிகரித்து, $x = c$-ன் மதிப்பை அடைகிறது. எனவே $f(x)$-ன் வளர்ச்சி விகிதமான $f'(x)$ மிகையாகும்.

மீண்டும் c-க்கு வலப்புறத்தில் $f(x)$, $f(a)$ என்ற மதிப்பிலிருந்து குறையத் தொடங்குகிறது. அதாவது x அதிகரிக்க, $f(x)$ ஆனது குறைகிறது. எனவே $f'(x)$ வலப்புறம் குறையாகும்.

ஆகையால் $f'(x)$-ன் குறியீடு $x = c$-ன் இடப்புறம் மிகையாகவும், வலப்புறம் குறையாகவும் இருக்கிறது. அதாவது $x = c$ ஐ விடக் சற்றுக் குறைந்த மதிப்புகளிலிருந்து, c-ஐ விடச் சற்று அதிக மதிப்புகளுக்கு x அதிகரிக்கும் போது $f'(x)$-ன் குறியீடு மிகையிலிருந்து குறையாக மாற்றமடைகிறது.

(ii) நிறுவல் (i)-ஐ ஒத்ததே.

§ 12-6 கணக்குகளில் பெருமம், சிறுமம் காண்பது பற்றி சில குறிப்புகள் :

(1) செயல்முறை விதி :

கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனின் பெரும, சிறும மதிப்புகளைக் காண பின்வருமாறு ஆராய்க.

(i) கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனை $f(x)$ எனக் குறிப்போம்.

(ii) $f'(x)$ கண்டு பிடித்து பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்துக.

(iii) இவ்வாறு கிடைக்கும் சமன்பாட்டை x-க்கு தீர்வு காண்க. c_1, c_2, ... என்பன தீர்வுகள் என்க.

(iv) $f''(x)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

c_1 என்ற தீர்வை $f'(x)$-ல் பிரதியிட

$f''(c_1) < 0$ எனில், $f(x)$, c_1-ல் பெருமம்;

$f''(c_1) > 0$ எனில், $f(x)$, c_1-ல் சிறுமம்.

இவ்வாறே c_2,... முதலான தீர்வுகளையும் ஆராய்ந்து $f(x)$-ல் பிரதியிட்டு பெரும சிறும மதிப்புகளைப் பெறுக.

(v) $f''(c_1) = 0$ எனில், $f'''(x)$ கண்டு அதில் $x = c_1$ எனப் பிரதியிடுக. $f'''(c) \neq 0$ எனில் $x = c_1$-ல் பெருமமோ, சிறுமமோ இல்லை. ஆனால் $f'''(c_1)$ பூச்சியமாக இருந்தால் $f^{iv}(x)$ காண்க. $x = c_1$ பிரதியிட $f^{iv}(c_1)$ குறையாக இருப்பின் $x = c_1$-ல் பெருமமும், $f^{iv}(c_1)$ மிகையாக இருப்பின் $x = c_1$-ல் சிறுமமும் உள்ளது.

$f^{iv}(c_1) = 0$ எனில் மேல் வரிசை வகைக்கெழுக்கள் கண்டு மேற்கூறியவாறு ஆராய்க.

(vi) கணக்குகளில் பெருமம், சிறுமம் காண வேண்டிய சார்பலன் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தொடர்புடைய மாறிகளில் அமைந்திருந்தால் கணக்கில் தரப்பட்ட செய்திகளையும் தொடர்புகளையும் பயன்படுத்தி சார்பலனை ஒரே மாறியில் அமைவதாக மாற்றிக் கொள்ளவேண்டும்.

2. சில குறிப்புகள்

(i) $f(x)$-ன் இருசமமான மதிப்புகளுக்கு இடையே குறைந்தது ஒரு பெருமம் அல்லது ஒரு சிறுமம் இடம் பெறும்.

(ii) பெருமமும் சிறுமமும் மாறி மாறி வரும்.

(iii) $x = a$, $x = b$ ஆகிய புள்ளிகளில் $f(x) = 0$, மற்ற புள்ளிகளில் யாவும் மிகையாகவும் $f'(x)$ என்பது ஒரு புள்ளியில் மட்டுமே பூச்சியமாகவும் இருக்கும்போது, அப்புள்ளியிலேயே பெருமம் இருக்கும்.

(iv) $x \longrightarrow a$, $x \longrightarrow b$ எனும்போது $f(x) \longrightarrow \infty$ ஆகவும் கனநிலைப்புள்ளி ஒன்று மட்டுமே உளதாகவும் இருப்பின் அப் புள்ளியில் ஒரு சிறுமம் நிச்சயமாக இருக்கும்.

(v) கணக்குகளில் பயனுகும் வாய்ப்பாடுகள்

(*a*) r ஆரை உள்ளகோளத்தின்

கனவளவு $= \frac{4}{3}\pi r^3$; மேற்பரப்பளவு $= 4\pi r^2$.

(b) h உயரமும், அடிப்பக்க ஆரை r-ம் உடைய வட்ட உருளையும் கனவளவு $= \pi r^2 h$; மேற்பரப்பளவு $= 2\pi r h$.

(*c*) h உயரமும், அடிப்பக்க ஆரை r-ம் உடைய கூம்புக்கு பாதி உச்சிக்கோணம் $= \tan^{-1}\left(\frac{r}{h}\right)$; சாய்வு உயரம் $= \sqrt{r^2 + h^2}$

கனஅளவு $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$: வளைந்த மேற்பரப்பளவு $= \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6$-ன் பெருமம், சிறுமம் ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$y = 12x^5 - 45x^4 + 40x^3 + 6$ என்க. ... ... (1)

y-ன் பெரும, சிறும மதிப்புகளுக்கு $\frac{dy}{dx} = 0$

(அது) $\frac{dy}{dx} = 60x^4 - 180x^3 + 120x^2 = 0$.

(அது) $60x^2(x^2 - 3x + 2) = 0$

(அது) $60x^2(x - 1)(x - 2) = 0$

ஆகவே $x = 0, 1, 2$.

மேலும் $\frac{d^2y}{dx^2} = 60(4x^3 - 9x^3 + 4x)$

$x = 1$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறை. எனவே $x = 1$-ல்

சார்பலனின் மதிப்பு, பெருமம்.

$x = 2$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ மிகை. எனவே

$x = 2$-ல் சார்பலனின் மதிப்பு, சிறுமம்.

$x = 0$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, எனவே $\frac{d^2y}{dx^2}$

காண வேண்டும்.

எனவே $\frac{d^3y}{dx^3} = 60\,(12x^2 - 18x + 4)$.

$x = 0$-ல், $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$.

எனவே, $x = 0$-ல் சார்பலன் பெருமமும் இல்லை. சிறுமமும் இல்லை.

$x = 1$ என (1)-ல் பிரதியிட, y-ன் பெரும மதிப்பு

$$= 12 - 45 + 40 + 6 = 13.$$

$x = 2$ என (1)-ல் பிரதியிட, y ன் சிறும மதிப்பு

$$= 12\cdot 2^5 - 45\cdot 2^4 + 40\cdot 2^3 + 6$$

$$= -10.$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = (\sin x)^{\sin x}$ என்ற சார்பலனின் பெரும சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = (\sin x)^{\sin x}$ என்க.

$\log y = \sin x \log(\sin x)$

வகையிடல் செய்ய

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x \cdot \frac{1}{\sin x}\cos x + (\log \sin x)\cos x$$

(அது) $\frac{dy}{dx} = (\sin x)^{\sin x}\cos x\,(1 + \log \sin x)$

$$= y \cdot \cos x \cdot (1 + \log \sin x) \qquad \ldots (1)$$

$$\because \quad \frac{d}{dx}(u\,v\,w) = \frac{du}{dx} \cdot v\,w + \frac{dv}{dx} \cdot u\,w + \frac{dw}{dx} \cdot u\,v,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} \cdot \cos x \cdot (1 + \log \sin x)$$

$$- y \cdot \sin x \cdot (1 + \log \sin x)$$

$$+ y \cdot \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x} \quad \ldots \quad (2)$$

$\frac{dy}{dx}$-ஐ பூச்சியத்துடன் சமப்படுத்த (1) மூலம்

$(\sin x)^{\sin x} = 0$; $\cos x = 0$; $1 + \log \sin x = 0$

(i) $(\sin x)^{\sin x} = 0$ என்பது x-க்கு தீர்வு தரவில்லை (ஏனெனில் $\sin x = 0$ எனக்கொண்டால் 0^0 என்ற பொருளற்ற அமைப்பு கிடைக்கும்)

(ii) $\cos x = 0$ என்றால் $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, ..$

$x = \frac{\pi}{2}$ எனில் $\frac{d^2y}{dx^2} = -1$

எனவே $x = \frac{\pi}{2}$-ல் y-க்கு பெருமம் உண்டு

பெருமதிப்பு $y = \left(\sin \frac{\pi}{2}\right)^{\sin \frac{\pi}{2}} = 1$

$x = \frac{3\pi}{2}$ எனில் $1 + \log \sin x = 1 + \log(-1)$

எனவே $\log(-1)$ பொருளற்றது. $\frac{dy}{dx}$-ம் பொருளற்றது.

இம்மதிப்பை ஏற்கலாகாது.

இவ்வாறே $\cos x = 0$ தரும் பிற மதிப்புகளுக்கும் ஏற்புடைய மதிப்புகளில் பெரும $y = 1$

(iii) $1 + \log \sin x = 0$.

(அது) $\log \sin x = e - 1$

$\therefore \quad \sin x = e^{-1} = \frac{1}{e}$

(அது) $x = \sin^{-1}\frac{1}{e}, \quad \pi - \sin^{-1}\frac{1}{e}, \ldots$

$x = \sin^{-1}\frac{1}{e}$ தர

$$y = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

$$y_1 = 0$$

$$y_2 = 0 + 0 + \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{e^2}}{\frac{1}{e}}$$

$$= \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} \cdot \frac{e^2 - 1}{e} = > 0 \quad (\because e > 2)$$

$\therefore \quad x = \sin^{-1}\frac{1}{e}$ ஆனது y-க்கு தரும்

சிறும மதிப்பு $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

n மிகை முழு எண்ணுக இருக்கும்போது $\sin nx \cdot \sin^n x$-ன் பெருமமும் சிறுமமும் $x = \frac{r\pi}{n+1}$ (r முழு எண்) மதிப்புகளால் $r = 1$-லிருந்து துவங்கி மாற்றி மாற்றி கிடைக்கும் என நிறுவுக. ஆனால் இம்மதிப்புகளில் n இரட்டைப் படையாக இருந்து, r பூச்சிய மாகவோ $(n + 1)$-ன் மடங்காகவோ இருக்கும் போதான மதிப்புக்களைத் தவிர்த்து விடவேண்டும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$f(x) = \sin nx \sin^n x$ என்க.

$$\therefore \quad f'(x) = \sin nx \cdot n \sin^{n-1} x \cos x + n \cos nx \sin^n x.$$

$f'(x) = 0$ என சமன்படுத்த,

$$n \sin^{n-1} x \cdot [\sin nx \cos x + \cos nx \sin x] = 0$$

$$\therefore \quad \sin^{-1} x \sin (n+1) x = 0$$

$\sin^{n} x = 0$ அல்லது $\sin (n+1) x = 0$

இப்போது $f''(x) = \dfrac{d}{dx} [n \sin^{n-1} x . \sin (n+1) x]$

$$= n [\sin^{n-1} x (n+1) \cos (n+1) x + (n-1) \sin^{n-2} x \cos x \sin (n+1) x]$$

$$= n \sin^{n-2} x [(n+1) \sin x \cos (n+1) x + (n-1) \cos x \sin (n+1) x]$$

$\sin (n+1) x = 0$ எனில் (அது) $x = \dfrac{r\pi}{n+1}$ எனில் r முழு எண்.

எனவே $f''(x) = n \left[\sin \dfrac{r\pi}{n+1}\right]^{n-2} \left[(n+1) \sin \dfrac{r\pi}{n+1} \cos r\pi + (n-1) \cos \dfrac{r\pi}{n+1} \sin r\pi\right]$

$$= n (n+1) (-1)^{r} \left\{\sin \frac{r\pi}{(n+1)}\right\}^{n-1} \because \cos r\pi = (-1)^{r}, \ \sin r\pi = 0.$$

$\therefore \quad x = \dfrac{\pi r}{(n+1)}$-ல்

$f''(x) < 0$. r ஒற்றைப்படை எனில்

$f''(x) > 0$, r இரட்டைப்படை எனில்

எனவே

$r = 1$-ல் துவங்கி பெருமமும் சிறுமமும் r-ன் முழு எண் மதிப்புகளுக்கு கிடைக்கிறது. ஆனல் இவற்றிற்கு விதி விலக்குகள் இருக்கின்றன.

n இரட்டைப் படையாக இருந்து r-ன் மதிப்பு பூச்சியமாகவோ அல்லது $(n+1)$ மடங்காகவோ இருந்தால்

$f''(x) = 0$ ஆகும்.

பெருமமோ சிறுமமோ இராது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$e^x + 2\cos x + e^{-x}$ என்ற சார்பலன் $x = 0$-ல் சிறும முடையது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$f(x) = (e^x + e^{-x}) + 2\cos x \text{ என்க.}$$

$$(\text{அது})\quad f(x) = 2(\cosh x - \cos x)$$

$$f'(x) = 2(\sinh x - \sin x)$$

$$f''(x) = 2(\cosh x - \cos x)$$

$f'(x) = 0$ எனச் சமன்படுத்த, $x = 0$ எனப்பெறுகிறோம்.

ஆனல் $x = 0$-ல் $f''(0) = 2(1 - 1) = 0.$

எனவே $f'''(x) = 2(\sin h\, x + \sin x)$ காண்போம்.

$x = 0$-ல் $f'''(0) = 2(0) = 0.$

$\therefore\ f^{iv}(x) = 2(\cos h\, x + \cos x)$ காண்போம்.

$x = 0$-ல் . $f^{iv}(0) = 2(1 + 1) = 4 =$ மிகை.

எனவே $e^x + 2\cos x + e^{-x}$

$x = 0$-ல் சிறுமம் உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$a \sec x + b \operatorname{cosec} x$-ன் பெரும, சிறும மதிப்புகளை $0<a<b$ என்ற இடைவெளியில் காண்க.

தீர்வு :

$$f(x) = a \sec x + b \operatorname{cosec} x \text{ என்க.}$$

$$\therefore\ f'(x) = a \sec x \tan x - b \operatorname{cosec} x \,.\, \cot x.$$

$f'(x)$-ஐ 0-க்குச் சமன்படுத்த,

$a \sec x \tan x - b \operatorname{cosec} x \,.\, \cot x = 0$ அல்லது $\tan^3 x = \dfrac{b}{a}$

$\therefore\ \tan x = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{1/3}$. இது, a-யும் b-யும் மிகையாதலால் மிகை யாக இருக்கிறது.

$$\therefore \quad f''(x) = a(\sec^3 x + \tan^2 x \, . \sec x) + b(\text{cosec}^3 x + \cot^2 x \, . \text{cosec}\, x)$$

$$= a \sec x \, . (\sec^2 x + \tan^2 x) + b \,\text{cosec}\, x + (\text{cosec}^2 x + \cot^2 x)$$

$$= a \sec x \, . (1 + 2\tan^2 x) + b \,\text{cosec}\, x\, (1 + 2\cot^2 x)$$

$\tan x = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$ ஆக இருக்கும்போது $\sec x$-ம் $\text{cosec}\, x$-ம் மிகைகள். எனவே $f''(x)$ மிகை.

எனவே $f(x)$, $\tan x = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$-ல் சிறுமம்

சிறும மதிப்பு $= a \sec x + b \,\text{cosec}\, x$

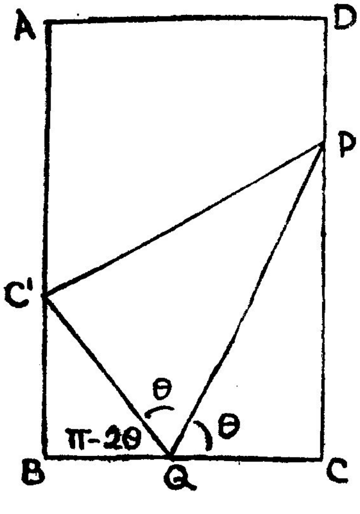
$$= a\sqrt{1 + \tan^2 x} + b\sqrt{1 + \cot^2 x}$$

$$= a\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2/3}\right\}} + b\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{a}{b}\right)^{2/3}\right\}}$$

$$= (a^{2/3} + b^{2/3})(a^{2/3} + b^{2/3})^{1/2} = (a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 ;

ஒரு செவ்வக வடிவமுள்ள தாளின் ஒரு முனை எதிர்புறத்தைத் தொடுமாறு மடிக்கப்படுகிறது. மடிக்கப்பட்ட பகுதி சிறுமப் பரப்புடையதாக இருக்க வேண்டுமெனில் பக்க அகலத்தின் 2/3 பாகத்தை மடிக்கவேண்டும் என நிறுவுக.



படம் 12·2.

தீர்வு :

செவ்வக வடிவமுடைய ABCD என்ற தாளின் மூலை C, PQ வழியாக எதிர்புறமான AB-ஐ C'-ல் தொடுமாறு மடிக்கப்படுகிறது.

PQ என்ற மடிக்கப்பட்ட நீளத்தை x என்க.

$\angle PQC = \theta$ என்க. எனவே,

$\angle PQC' = \theta$

எனவே $QC = x \cos\theta = QC'$

$\triangle BQC'$-லிருந்து $BQ = C'Q \cos(\pi - 2\theta)$

$\therefore \quad BQ = -x\cos\theta \, . \cos 2\theta.$

மேலும் $\triangle PQC$-ல் $PC = x\sin\theta$.

$\triangle PQC$-ன் பரப்பு S என்க.

$$\text{எனவே } S = \tfrac{1}{2} PC \, . \, QC = \tfrac{1}{2} x\sin\theta \, x\cos\theta$$

$$= \left(\frac{x^2}{4}\right)\sin 2\theta \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

மேலும் $BC = BQ + QC$

அல்லது $a = x\cos\theta - x\cos\theta\cos 2\theta$, இங்கே $BC = a$ என்க.

அல்லது $x\cos\theta\,(1 - \cos 2\theta) = a$

அல்லது $x = a / \{\cos\theta\,(1 - \cos 2\theta)$ $\qquad \ldots\ldots$ (ii)

$\therefore$ (i)-லிருந்து

$$S = \frac{a^2 \sin 2\theta}{4\cos^2\theta\,(1-\cos 2\theta)^2} = \frac{2a^2\sin\theta\cos\theta}{4a\cos^2\theta\; 4\sin^4\theta}$$

(அது) $S = \dfrac{1}{8} a^2 \sec\theta \operatorname{cosce}^3\theta.$

$$\therefore \frac{dS}{d\theta} = \frac{a^2}{8}\left[\sec\theta(-3\operatorname{cosec}^3\theta \cdot \cot\theta) + \operatorname{cose}^3\theta(\sec\theta\tan\theta)\right]$$

$$= \frac{1}{8}a^2\left[-3\operatorname{cosec}^4\theta + \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta\right]$$

$$\therefore \frac{d^2S}{d\theta^2} = \frac{a^2}{8}[\,12\operatorname{cosec}^4\theta\cdot\cot\theta - 2\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta\cot\theta$$

$$+ \sec^2\theta\tan\theta\operatorname{cosec}^2\theta]$$

$\dfrac{dS}{d\theta} = 0$ என சமன்படுத்த, $\sec^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta$ எனப்பெறுகிறோம்.

$\tan^2\theta = 3$ அல்லது $\tan\theta = \pm\sqrt{3}$ அல்லது $\theta = \pm\frac{1}{3}\pi$

$\theta = \frac{1}{3}\pi$ எனில் $\dfrac{d^2S}{d\theta^2}$ = மிகை. எனவே S சிறுமம்.

இப்போது $\frac{QC}{BC} = \frac{x \cos \theta}{a} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta(1-\cos\theta)}$ .. (ii)-ன் மூலம்.

$$\frac{QC}{BC} = \frac{1}{1 - \cos 2\theta}$$

∴ S சிறுமமாக இருக்கும் போது, அதாவது $\theta = \frac{1}{3}\pi$ எனில்

$$\frac{QC}{BC} = \frac{1}{1 - \cos \frac{2}{3}\pi} = \frac{2}{3}$$

அதாவது பக்க அகலத்தில் $\frac{2}{3}$ ஆக இருக்க வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 7 :

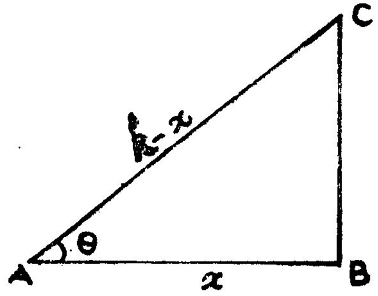
ஒரு செங்கோண முக்கோணத்தின் கர்ணமும் பக்கம் ஒன்றும் சேர்ந்தும் மாறுத கூட்டுத் தொகை கொண்டுள்ளது எனில் இவை இரண்டுக்கும் இடையே $\frac{\pi}{3}$ கோணம் இருக்கும்போதுதான் முக்கோணப் பரப்பு பெருமம் என நிறுவுக.

தீர்வு :

AC + AB = மாறிலி எனத் தரப்பட்டுள்ளது.

$AB = x$ எனில்

$AC = k - x$.



படம் 12·3.

எனவே,

$$CB^2 = (k - x)^2 - x^2$$

$$= k^2 - 2kx.$$

$$z = \triangle^2 = (\tfrac{1}{2}\,CB \cdot AB)^2 \text{ என்க.}$$

$$= \tfrac{1}{4}\,x^2\,(k^2 = 2kx) = \frac{k^2x^2}{4} = \frac{k\,x^3}{2}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{k^2\,x}{2} - \frac{3\,k\,x^2}{2}\,; \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{k^2}{2} = \frac{6\,k\,x}{2}$$

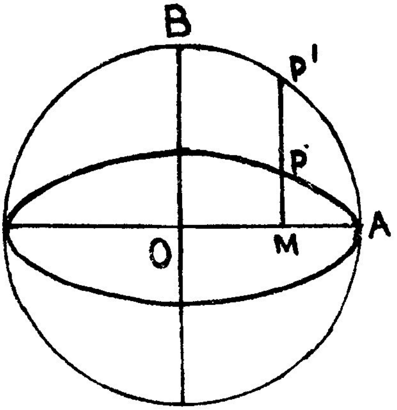
$\therefore$ $\triangle$ பெருமம் எனில் $\triangle^2$, அதாவது z-ம் பெருமம் z. பெருமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் $x = \frac{k}{3}$ ஆக இருக்க வேண்டும் என எளிதாக நிறுவலாம். $\frac{d^2z}{dx^2}$ குறை என்றும் நிறுவலாம்.

எனவே $\cos\theta = \dfrac{x}{k = x} = \dfrac{k/3}{\frac{2k}{3}} = \frac{1}{2}. \therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{3}$

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$a > b$ எனில் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தையும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற துணை வட்டத்தையும் பொதுவான நிலைத்தூரம் வெட்டும் புள்ளிகளில் தோடுகோடுகள் வரையப்படுகின்றன இத்தொடுகோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணத்தின் பெருமமதிப்பு ϕ எனில் $\tan\phi = \dfrac{a - b}{2\sqrt{ab}}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :



படம் 12·4

பொது நிலைத்தூரம், கொடுக்கப்பட்டுள்ள நீள்வட்டத்தையும், துணைவட்டத்தையும் வெட்டும் புள்ளிகள் முறையே P, P'

என்க. இப்போது P = $(a \cos t, b \sin t)$ எனில், P′ துணைவட்டம் $x^2 + y^2 = a^2$-ல் இருப்பதால் P′ = $(a \cos t, a \sin t)$.

P-ல் நீள்வட்டத்திற்கு தொடுகோடு $\frac{x}{a} \cos t + \frac{y}{b} \sin t = 1.$

$$\text{இதன் சாய்வு விகிதம்} -\frac{b}{a} \cot t = m_1$$

P′-ல் வட்டத்திற்கு தொடுகோடு $\frac{x}{a} \cos t + \frac{y}{a} \sin t = 1.$

$$\text{இதன் சாய்வு விகிதம்} - \cot t = m_2$$

இப்போது, ϕ இரு தொடுகோடுகளுக்கிடையில் உள்ள கோணம் எனில்

$$\tan \phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-\frac{b}{a} \cot t + \cot t}{1 + \frac{b}{a} \cot^2 t}$$

அல்லது $\tan \phi = \frac{a - b}{a \tan t + b \cot t}$ ... (1)

இப்போது ϕ ஆனது $\tan \phi$ பெருமம் எனில் பெருமம். அப்போது, $(a - b)$ மாறிலியாக இருப்பதால் (1)-ன் வலப் பக்கத்தின் பகுதியான $a \tan t + b \cot t$ சிறுமம், எனவே $a \tan t + b \cos t$ சிறுமமாக இருந்தால் ϕ பெருமமாகும்.

இப்போது $z = a \tan t + b \cot t$ என்க.

z சிறுமம் எனில்

$$\frac{dz}{dt} = a \sec^2 t - b \operatorname{cosec}^2 t = 0$$

$$\therefore \quad \tan^2 t = \frac{b}{a}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = 2a \sec^2 t \tan t + 2b \operatorname{cosec}^2 t \cot t$$

$\tan^2 t = \frac{b}{a}$ ஆக இருக்கும்போது மேலே கூறப்பட்டது மிகையாகும்.

எனவே z ஆனது $\tan t = \sqrt{\frac{b}{a}}$ அல்லது $\cot t = \sqrt{\frac{a}{b}}$ எனில் சிறுமம். அதாவது ϕ பெருமமாக இருக்க, $\tan t$, $\cot t$-ன் மதிப்புகளை

(1)-ல் பிரதியிட,

$$\tan \phi = \frac{a - b}{a\sqrt{\frac{b}{a}} + b\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$\tan \phi = \frac{a - b}{2\sqrt{ab}}$$

எடுத்துக்காட்டு 9 :

ஒரு வட்டம், ஒரு சதுரம் ஆகியவற்றின் சுற்றளவுகளின் கூட்டுத்தொகை தரப்பட்டுள்ளது. சதுரத்தின் பக்கமும், வட்டத்தின் விட்டமும் சமமாக இருக்கும்போது அவற்றின் பரப்புகளின் கூட்டுத்தொகையானது சிறுமமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

வட்டத்தின் ஆரம் x என்க.

சதுரப் பக்கம் y என்க.

வட்டப்பரப்பு + சதுரப்பரப்பு $= A = \pi x^2 + y^2$ ... (1)

வட்டச் சுற்றளவு + சதுரச்சுற்றளவு $= 2\pi x + 4y = k$ (மாறிலி)

$$\text{எனவே } y = \frac{k - 2\pi x}{4}$$

(1)-ல் பிரதியிட,

$$A = \pi x^2 + \frac{1}{16}(k - 2\pi x)^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 2\pi x + \frac{2}{16}(k - 2\pi x)(-2\pi)$$

$$\frac{d^2A}{dx^2} = 2\pi x + \frac{8}{16}\pi^2 \text{ (எப்போதும் மிகை)}$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \text{ எனில்}$$

$$2\pi\left[x - \frac{k}{8} + \frac{\pi}{4}x4\right] = 0$$

$$x\left(1 + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{k}{8} \qquad \therefore \; x = \frac{k}{8}\left(\frac{4}{4 + \pi}\right) = \frac{k}{2(4 + \pi)}$$

$$y = \frac{k}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{k}{2(4+\pi)} = \frac{k[4+\pi-\pi]}{4(4+\pi)}$$

$$= \frac{4k}{4(2+\pi)} = \frac{k}{2+\pi} = 2x.$$

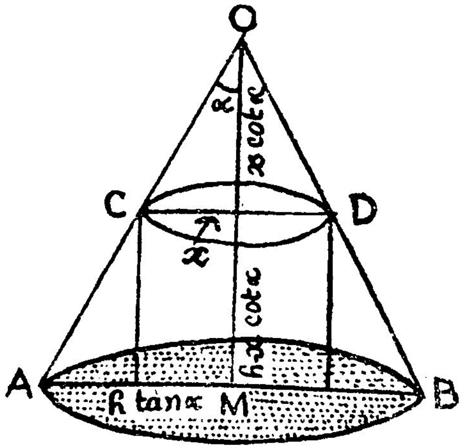
எனவே A சிறுமமாக இருக்கும்போது $y = 2x$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

h உயரமும், α அரை உச்சிக் கோணமும் கொண்ட கூம்பின் உள் தொடுமாறு அமையும் பெரும உருளையின் பருமம் $\frac{4}{27}\pi h^3 \tan^2 \alpha$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

கூம்பின் அடிப்பக்கத்தின் ஆரை $= h \tan \alpha$. உள் தொடுமாறு அமைந்த உருளையின் ஆரை x என்க. எனவே உருளையின் உயரம் $= h - x \cot \alpha$.



படம் 12.5.

V = உருளையின் பருமம் என்க.

$$= \text{"}\pi r^2 h\text{"} = \pi x^2 (h - x \cot \alpha) \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\frac{dv}{dx} = \pi(2hx - 3x^2 \cot \alpha) = 0.$$

$\therefore \quad x = 0$ அல்லது $\frac{2}{3} h \tan \alpha$.

$x = \frac{2}{3} h \tan \alpha$ என்றால் $h = \frac{3x}{2} \cot \alpha$.

$\therefore \quad \frac{d^2V}{dx^2} = \pi \, (2h - 6x \cot \alpha) = \pi \, (2h - 4h) =$ குறை

அதாவது $x = \frac{3}{3} h \tan \alpha$ எனில் $\frac{d^2V}{dx^2}$ குறை.

எனவே V ஆனது $x = \frac{2}{3} h \tan \alpha$ எனில் பெருமம்.

எனவே (1)-ல் பிரதியிட

$$V = \frac{4}{27} \pi h^3 \tan^2 \alpha.$$

எடுத்துக்காட்டு 11 :

கொடுக்கப்பட்ட மேற்பரப்பும், பெருமமான பருமமும் உடைய நேர் வட்ட உருளையின் உயரம் அதன் அடிப்பக்கத்தின் விட்டத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

தீர்வு :

r என்பது அடிப்பக்கத்தின் ஆரை என்க

h என்பது உருளையின் உயரம் என்க.

S என்பது உருளையின் மேற்பரப்பு என்க.

V என்பது உருளையின் பருமம் என்க.

எனவே $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

$$r^2 + rh = \frac{S}{2\pi} = \text{மாறிலி} = A \text{ என்க} \qquad \ldots\ldots (1)$$

$$v = \pi r^2 h = \pi r^2 \cdot \frac{(A - r^2)}{r} = \pi \, (Ar - r^3)$$

V-ன் பெரும, அல்லது சிறும மதிப்புகளுக்கு $\frac{dV}{dr} = 0$

(அ.து.) $\pi(A - 3r^2) = 0$; ஆகவே $r = \pm\sqrt{\frac{A}{3}}$

மேலும் $\frac{d^2V}{dr^2} = -6\pi r.$

$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{A}{3}}$ எனில் $\frac{d^2V}{dr^2}$ குறை.

$\therefore$ V ஆனது $r = \sqrt{\frac{A}{3}}$ அல்லது $r^2 = \frac{A}{3}$ இருக்கும்போது பெருமமாக இருக்கிறது.

(அ-து) $3r^2 = A = \frac{S}{2\pi}$ ஆக இருக்கும்போது பெருமம்.

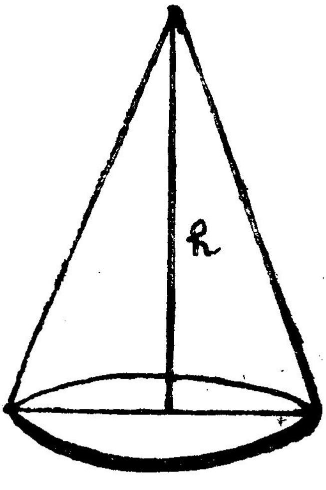
(அ-து) $6\pi r^2 = S = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ ஆக இருக்கும்போது பெருமம் — (1)-ன் மூலம்

(அ-து) $4\pi r^2 = 2\pi r h$. ஆக இருக்கும்போது பெருமம்.

(அ-து) $h = 2r$ ஆக இருக்கும்போது பெருமம்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

குறிப்பிட்ட கொள்ளும் அளவு கொண்ட கூம்பின் வடிவான கூடாரம் அமைக்கத் தேவையான துணி மிகக் குறைந்த அளவாக இருக்க அதன் உயரம் அடிப்பக்கத்தின் ஆரையைப் போல் $\sqrt{2}$ மடங்கு என நிறுவுக.



படம் 12·6.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின், உயரம் h எனவும், அடிப்பக்க ஆரை r எனவும், சாய்வு உயரம் l எனவும் கொள்க.

வளைந்த பக்கத்தின் பரப்பு S எனவும், குறிப்பிட்ட கொள்ளும் அளவு V எனவும் கொள்க.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \ldots\ldots \text{(i)}$$

$$S = \pi l r = \pi\sqrt{(h^2 + r^2)}\,r$$

$$\therefore \quad S^2 = \pi^2 r^2 (h^2 + r^2)$$

$S^2 = u$ என்க. ...... (ii)

(i)-லிருந்து $h = \frac{3V}{\pi r^2}$

இதை (ii)-ல் பிரதியிட

$$u = \pi^2 r^2 \left[\frac{9V^2}{\pi^2 r^4} + r^2\right] = \frac{9V^2}{r^2} + \pi^2 r^4.$$

$$\therefore \frac{du}{dr} = -\frac{18V^2}{r^3} + 4\pi^2 r^3.$$

எனவே $\frac{d^2u}{dr^2} = \frac{54V^2}{r^4} + 12\pi^2 r^2.$

$\frac{du}{dr} = 0$ என சமன்படுத்த

$18V^2 = 4\pi^2 r^6$ · அல்லது $V = \frac{2}{3\sqrt{2}}\pi r^3$

V-ன் இந்த மதிப்பிற்கு $\frac{d^2u}{dr^2}$ மிகை என அறிகிறோம்.

அதாவது u [அல்லது S^2] என்பது சிறுமம்.

எனவே S ஆனது $V = \frac{2\pi r^3}{3\sqrt{2}}$ ஆக இருக்கும்போது சிறுமம்.

(i)-லிருந்து $\frac{2\pi r^3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ எனில் V சிறுமம்.

அதாவது $h = r\sqrt{2}$ எனில் V சிறுமம்.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

a குறிப்பிட்ட கோட்டளவு நீளம் எனில் λ அலைவு நீளம் உள்ள அலைகளுக்கு ஆழ்கடலில் திசைவேகம் $\sqrt{\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}}$ என்பதற்கேற்ப மாறும். $\lambda = a$ எனில் திசைவேகம் சிறுமம் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\text{திசைவேகம்} = v = \left(\frac{\lambda}{a} + \frac{a}{\lambda}\right)^{1/2}$$

v சிறுமமாக, $\frac{dv}{d\lambda} = 0$; $\frac{d^2v}{d\lambda^2}$ மிகை.

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}\right)^{-1/2}\left[\frac{1}{a}+\frac{a(-1)}{\lambda^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}-\frac{a}{\lambda^2}\right] \Big/ \sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}$$

$\frac{dv}{d\lambda} = 0$ எனில்

$$\frac{1}{a} - \frac{a}{\lambda^2} = 0$$

$\therefore\ \lambda^2 = a^2$ அல்லது $\lambda = \pm a$

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a}-\frac{a}{\lambda^2}\right]}{\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}}$$ ஆதலால்

$$\frac{d^2v}{d\lambda^2} = \frac{\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}\left(\frac{a}{\lambda^3}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{\lambda^2}\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}-\frac{a}{\lambda^2}\right)\Big/\sqrt{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}}{\frac{\lambda}{a}+\frac{a}{\lambda}}$$

$\lambda = a$ எனில் $\frac{d^2v}{d\lambda^2}$ மிகை $\therefore\ \lambda = a$ எனில் திசைவேகம் சிறுமம்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

முறையே a அடி, b அடி அகலங்கள் உள்ள இரு சாலைகள் செங்குத்தாகச் சந்திக்கும் முனையில் ஒரு ஏணியைக் கிடைமட்டமாகச் சுமந்து செல்ல வேண்டியிருக்கிறது. சிக்கல் ஏதும் இல்லாமல் அவ்வாறு கொண்டு செல்லக்கூடிய பெரும நீளம் $(a^{2/3} + b^{2/3})^{3/2}$ என நிறுவுக.

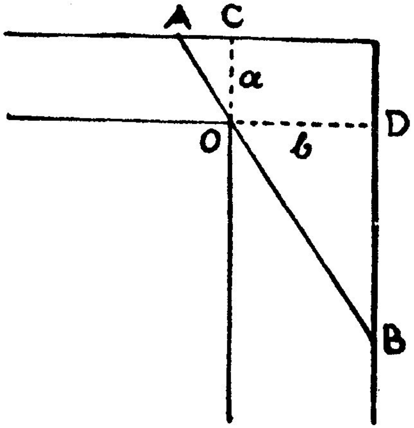
தீர்வு :

சாலைகள் சந்திப்பில் ஏணி செல்கையில் ஒருமுனை A ஒரு சாலையின் ஒரு புறத்தும் மறுமுனை B மறுசாலையின் எதிர்புறத்தும், ஏணி சாலைகள் திருப்புப்புள்ளி 0 வழியாகவும் படத்தில் காட்டிய வாறு அமைந்துள்ளதாகக் கொள்க.

$$y = AB = AO + OB$$

$$= a \sec \alpha + b \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = a \sec \alpha \tan \alpha - b \operatorname{cosec} \alpha \cot \alpha$$



படம் 12·7.

அது $\dfrac{dy}{d\alpha} = a \dfrac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - b \dfrac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$

பெரும அல்லது சிறும மதிப்புக்கு

$$a \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} - b \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} = 0$$

$$(\text{அது}) \quad \tan \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

அப்போது

$$\sin \alpha = \frac{b^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}; \quad \cos \alpha = \frac{a^{1/3}}{\sqrt{a^{2/3} + b^{2/3}}}$$

$$\frac{d^2y}{d\alpha^2} = a \frac{\cos^3 \alpha + 2 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{\cos^4 \alpha} + b \left(\frac{\sin^3 \alpha + 2 \sin \alpha \cos^3 \alpha}{\sin^4 \alpha}\right)$$

மிகை

$$\therefore \quad \tan \alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^{1/3}$$

அதனால் (1) சிறும மதிப்பை y-க்குத் தரும். எனவே y-ன் சிறும மதிப்பு

$$= \frac{a\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{a^{1/3}} + \frac{b\sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}}{b^{1/3}}$$

$$= \sqrt{a^{2/3}+b^{2/3}}\,(a^{2/3}+b^{2/3})$$

$$= (a^{2/3}+b^{2/3})^{3/2}$$

(இச்சிறும மதிப்பே ஏணியின் பெரும நீளமாகும்)

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1$ எனில் $x^2 + y^2$-இன் பெரும, சிறும மதிப்புகள்

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right) = h^2$$ என்ற r^2-ல் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகக் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு ;

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனப் பிரதியிட்டு சமன்பாட்டை கோண தூரக் கூறமைப்புக்கு மாற்றுவோம்.

r^2-ன் பெரும, சிறுமமதிப்புக்களை காண வேண்டும். ... (1)

இங்கே $a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta = \dfrac{1}{r^2}$ ... (2)

$a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$ சிறுமம் அல்லது பெருமமாக இருக்கும் போது r^2 ஆனது பெருமம் அல்லது சிறுமம்.

$E = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$ என்க.

$\therefore\ E = \frac{1}{2}a(1+\cos 2\theta) + h\sin 2\theta + \frac{1}{2}b(1-\cos 2\theta)$

$= \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(\cos 2\theta)(a-b) + h\sin 2\theta$ ... (3)

E-ன் பெருமம் அல்லது சிறுமத்திற்கு $\dfrac{dE}{d\theta} = 0$

(அது) $-\frac{1}{2}(a-b)\cdot 2\sin 2\theta + 2h\cos 2\theta = 0$

$$\tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}$$

$$\sin 2\theta = \frac{2h}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

$$\cos 2\theta = \frac{a-b}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

இந்த மதிப்புகளை (3)-ல் பிரதியிட,

$$E = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{\frac{1}{2}(a-b)^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}} + \frac{2h^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$$

(அது) $\left[\frac{2}{r^2} - (a+b)\right]^2 = (a-b)^2 + 4h^2$

$$\frac{4}{r^4} - \frac{4(a+b)}{r^2} - 4h^2 + 4ab = 0$$

$$ab - \frac{a}{r^2} - \frac{b}{r^2} - \frac{1}{r^4} = h^2$$

$$a\left(b - \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}\left(b - \frac{1}{r^2}\right) = h^2$$

$$\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right) = h^2$$

இது r^2-க்கு பெரும, சிறும மதிப்புக்களைத் தரும். அதாவது கொடுக்கப்பட்ட சார்பலனின் பெரும, சிறும மதிப்புகள் $\left(a - \frac{1}{r^2}\right)\left(b - \frac{1}{r^2}\right) = r^2$ என்ற r^2-ல் இருபடிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகளாகக் கிடைக்கும்.

பயிற்சிகள் 12

2. பெருமம், சிறுமத்தைக் காண்க :

(i) $x^5 - 5x^4 + 5x + 5x^3 + 10$

(ii) $x^3 - 3x^2 - 9$

(iii) $2x^3 - 21x^2 + 36x - 20$

(iv) $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$

(v) $x + \frac{4}{x+2}$

(vi) $\frac{x}{1+x^2}$

(vii) $\frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-2)^2}$

2. $x^3 - 3x^2 + 3x + 7$ என்ற சார்பலனுக்கு $x = 1$-ல் பெருமமும் இல்லை, சிறுமமும் இல்லை என நிறுவுக.

3. $y = (x-2)^6 (x-3)^5$ என்ற வளைகோட்டில் பெருமம், சிறுமமாக உள்ள y ஆயத்தொலையைக் காண்க.

4. நிறுவுக :

(i) $\sin x\,(1 + \cos x)$ என்பது $x = \frac{\pi}{3}$-ல் பெருமம்.

(ii) $\sin^3 x\,(1+\cos x)^3$ என்பது $x = \cos^{-1} 3/5$-ல் பெருமம்.

(iii) $\frac{x}{1 + x\tan x}$ என்பது $x = \cos x$-ல் பெருமம்.

(iv) $\sin x + \cos 2x$ என்பதன் பெருமமதிப்பு $9/8$; சிறு மதிப்பு 0.

(v) $x + \sin 2x$ என்பது ($0 < x < 2\pi$ என்ற இடைவெளி) $x = \frac{\pi}{3}$-ல் பெருமம்; $x = \frac{2\pi}{3}$-ல் சிறுமம்.

(vi) $\sin^p\theta \cdot \cos^q\theta$ என்பது $\theta = \tan^{-1}\sqrt{p/q}$-ல் பெருமம்.

5. $(x-3)^5 (x+1)^4$-ன் பெரும, சிறும மதிப்புகளைக் காண்க.

6. $y = \frac{ax^2 + 2bx + C}{Ax^2 + 2Bx + C}$ என்ற சார்பலனின் பெரும, சிறும மதிப்புகள், $(ax^2 + 2bx + C) - y(Ax^2 + 2Bx + C)$-ன் நிறை வர்க்கமாக இருக்கும் போதுள்ள y-ன் மதிப்புகளால் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

7. $\frac{dy}{dx} = (x-a)^{2n}(x-b)^{2p+1}$; இங்கே n, p என்பன நேர் முழு எண்கள். $x = a$ எனில் y-க்கு பெருமமதிப்போ சிறும மதிப்போ இல்லை என்றும், $x = b$ ஆனது y-க்கு சிறும மதிப்பைத் தரும் என்றும் நிறுவுக.

8. $0 < x < \infty$ எனில் $\frac{\log x}{x}$-ன் உச்ச மதிப்பு என்ன ?

9. $(1 - x^2)\, e^x$ இன் பெருமம் $4\, e^{-1}$ என்றும் சிறுமம் 0 என்றும் நிறுவுக.

10. $x^2 . \log \frac{1}{x}$, பெருமத்தை $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$-ல் அடையும் என நிறுவுக.

11. $\left(\frac{1}{x}\right)^x$-ன் பெரும மதிப்பு $e^{1/e}$ என நிறுவுக.

12. $xy^2 = 1$ என்ற வளைகோட்டில் $(2^{-1/3}, 2^{1/6})$ என்ற புள்ளி, ஆதிக்கு மிக் அருகாமையில் இருக்கும் என நிறுவுக.

13. $x^3 - 18\, x^2 + 96\, x$ என்ற சார்பலன் $(0, 9)$ என்ற இடைவெளியில் பெறும் மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புக்களைக் காண்க. (பெரும, சிறுமமன்று)

14. மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புக்களைக் காண்க :

(i) $3x^4 - 2x^3 - 6x^2 + 6x + 1$; $(0, 2)$ இடைவெளியில்

(ii) $x^4 - 4x^3 + 2\, x^2 + 12\, x + 1$ $(-2, 5)$ இடைவெளியில்

(iii) $x^3 - 12\, x^2 + 45\, x$; $(0, 7)$ இடைவெளியில்

15. ஒரு அடி அகலமுள்ள ஒரு நீண்ட செவ்வகத் தாளின் ஒரு முனை எதிர் ஓரத்தை எட்டுமாறு மடிக்கப்படுகிறது. மடிப்பின் சிறும நீளத்தைக் காண்க.

16. ஒரு பக்கத்தின் மொத்தப் பரப்பளவு 150 ச. அங். தலைப்பிலும் கீழ் பகுதியிலும் மொத்த அகலம் 3 அங், பக்கவாட்டில்

2 அங். விட்டு அச்சடிக்க அச்சாகும் பரப்பளவு பெருமமாக இருப்பதற்கேற்ப பக்கத்தின் நீள, அகலங்களைக் காண்க.

17. கொடுக்கப்பட்ட ஆரையைக் கொண்ட வட்டத்தில் பரப்பு பெருமமாக இருக்குமாறு வரைந்த செவ்வகம், ஒரு சதுரமாகும் என நிறுவுக.

18. r ஆரை உள்ள ஒரு வட்டத்தின் உள்ளே வரையப்படும் இருசமபக்க முக்கோணத்தின் சிறுமச் சுற்றளவு $6r\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

19. a என்ற எண்ணை x, $a - x$ என்ற இரு பாகமாகப் பிரித்தால் $x^m (a - x)^n$-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பானது $\dfrac{m^n n^n a^{m+n}}{(m+n)^{m+n}}$ என நிறுவுக.

20. ஒரு சரிவகத்தின் மூன்று பக்கங்கள் ஒவ்வொன்றும் 6 அங். நீளமுடையன. அதன் பெருமப் பரப்பைக் காண்க.

21. மரத்துண்டு ஒன்று, கூம்பின் அடித்துண்டத்தின் அமைப்பில் இருக்கிறது. உயரம் l அடி. இருமுனைகளிலும் ஆரைகள் முறையே a அடி, b அடி · $(a > b)$. இதிலிருந்து சதுர அடிப்பாகம் கொண்ட ஒரு சீரான துண்டம் வெட்டி எடுக்கப்படுகின்றது. இத் துண்டத்தின் பருமம், பெருமமாக இருக்க வேண்டுமெனில், இதன் நீளம் $\dfrac{al}{3(a-b)}$ ஆக இருக்கவேண்டும். என நிறுவுக.

22. கொடுக்கப்பட்ட பருமத்தை உடைய, அடிப்பாகம் சதுரமாக அமைந்த, திறந்த தொட்டி ஒன்று உள்ளது. அதன் உள் பரப்பளவு சிறுமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் ஆழத்திற்கும் அகலத்திற்கும் உள்ள விகிதம் என்ன ?

23. கொடுக்கப்பட்ட முக்கோணத்தைச் சுற்றி வரையப்பட்ட பெரும சமபக்க முக்கோணத்தின் உயரம்

$$\left\{ a^2 + b^2 \, 2ab \cos\left(\frac{\pi}{3} + c\right)\right\}^{1/2}$$ என நிறுவுக.

24. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தினை உள் தொடுமாறும், அச்சுகளுக்கு இணையான பக்கங்கள் அமையுமாறும் வரையும் செவ்வகத்தின் பெருமப் பரப்பு $2ab$ என நிறுவுக.

25. கொடுக்கப்பட்ட நீள்வட்டத்தின் பேரச்சினுடைய ஒரு முனையில் ஒரு உச்சி அமையுமாறு அமைக்கப்படும் உள்தொடு இரு சம பக்க முக்கோணத்தின் பெருமப்பரப்பு $\frac{3\sqrt{3}}{4}\,ab$ என நிறுவுக.

26. c ஆரை உள்ள வட்டத்தில் A என்ற நிலைப்புள்ளியிலிருந்து P என்ற மாறும் புள்ளியில் தொடுகோட்டின் மீது AY என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையப்படுகிறது. முக்கோணம் APY யின் பெருமப் பரப்பு $\frac{3}{8}c^2\sqrt{3}$ என நிறுவுக.

27. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் தொடுகோடு இரு அச்சுகளிடையே வெட்டப்படும் நீளத்தின் சிறுமம் $a+b$ என நிறுவுக.

28. நீள் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து தொடு கோட்டுக்குச் செங்குத்துக் கோடு வரையப்படுகிறது. a, b என்பன நீள்வட்டத்தின் அரை அச்சுக்களானால், செங்கோட்டின் பாதத்திற்கும், தொடும்கோட்டின் தொடும் புள்ளிக்கும் இடைப்பட்ட துண்டின் பெருமமதிப்பு $a-b$ என நிறுவுக.

29. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் புள்ளிகளில் இருந்து வரைச் செங்கோடுகள் வரையப்படுகின்றன. நீள் வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து வரைச் செங்கோடுகளுக்குப் பெரும தூரம் காண்க.

30. $xy=c^2$ எனில் $ax+by$-ன் பெரும, சிறும மதிப்புக்களைக் காண்க.

31. $xy(y-x)=2a^3$ எனில் $x=a$-ல் y-க்கு சிறும மதிப்பு என நிறுவுக.

32. $x+y=c$ எனில் $\frac{a^2}{x^2}+\frac{b^2}{y^2}$-ன் பெரும, சிறும மதிப்புக்களைக் காண்க.

33. $a^2x^4+b^2y^4=c^4$ எனில் xy-ன் சிறும மதிப்பைக் காண்க.

34. $x^4-axy^2-a^3y=0$ எனில் $3xy+4a^2=0$ எனும்போது y பெருமமாகவும் $x=0$ எனும்போது சிறுமமாக இருக்கும் என்றும் நிறுவுக.

35. $9x^2 - 6xy + y^2 - 13x + y + 8 = 0$ என்ற வளை கோடு y அச்சுக்கு எவ்வளவு நெருக்கமாக வரும்?

36. ஒரு வட்டத்தின் உள் தொடுமாறு அமையப்படும் மிகப் பெரிய முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

37. வட்டக் கோணப்பகுதி ஒன்றின் சுற்றளவு தரப்பட்டுள்ளது. வில், ஆரையைப்போல் இருமடங்காக இருந்தால் பரப்பானது பெருமம் என்றும், ஆரையின் சதுரத்திற்கு சமமாக இருக்கும் என்றும் நிறுவுக.

38. $ax^2 + by^2 = ab$ எனும் சமன்பாட்டால், x, y மாறிகள் தொடர்பு கொண்டிருந்தால் $x^2 + y^2 + xy$ என்ற சார்பலனுக்கு பெரும, சிறும மதிப்புகள் $4(u - a)(u - b) = ab$ என்ற சமன்பாட்டின் u மதிப்புகளால் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

39. ஒரு அரைவட்டமும், அதன் விட்டத்தின் மேல் செவ்வகமும் கொண்டதாய் அமைந்த உருவத்தின் சுற்றளவு 20 அடி எனில் அவ்வுருவத்தின் பரப்பு பெருமமாக அமையுமாறு உருவத்திற்கு பரிமாணங்களைக் காண்க.

40. கொடுக்கப்பட்ட கோளத்தினுள் பருமம் பெருமமாக இருக்குமாறு அமைக்கப்பட்ட உள் தொடும் கூம்பின் உயரமானது கோளத்தின் விட்டத்தில் $\frac{2}{3}$ பங்காக இருக்கும் என நிறுவுக.

41. a ஆரை உள்ள கோளத்தின் உள் தொடுமாறு அமைந்த உருளையின் பருமம் பெரும அளவினதாக இருக்கவேண்டுமெனில் உருளையின் உயரம் $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ எனவும், அவ்வுருளையின் ஆரை $a\sqrt{2/3}$ எனவும் நிறுவுக.

42. கொடுக்கப்பட்ட கூம்பின் உள்தொடும் நேர்வட்ட உருளையின் மேற்பரப்பு பெருமமாக இருந்தால் அதன் ஆரை கூம்பின் ஆரையில் பாதி என நிறுவுக.

43. கோளத்தினை உள்தொடுமாறு அமையுமாறு அமைக்கப்பட்ட கூம்பின் வளைந்த மேற்பரப்பு பெருமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் கூம்பின் உயரம், கோளத்தின் விட்டத்தில் $\frac{2}{3}$ பங்கு என நிறுவுக.

44. R ஆரை உள்ள கோளத்தை உள்தொடுமாறு h உயரமுள்ள ஒரு வட்ட உருளை அமைக்கப்படுகிறது. உருளையின் இரு

மூலைகளும் உட்பட மொத்த மேற்பரப்பு பெருமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் $\frac{h^2}{R^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

45. r ஆரை உள்ள கோளத்தை வெளித்தொடுமாறு ஒரு கூம்பு வரையப்படுகிறது. அக் கூம்பின் பருமம் பெருமமாக இருக்க வேண்டுமெனில் அதன் உயரம் $4r$ ஆகவும், அரை உச்சிக் கோணம் $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ ஆகவும் இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

46. ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பினுள் மொத்த மேற்பரப்பு பெரும மாக இருக்குமாறு உருளை ஒன்று உள்தொடுமாறு அமைக்கப்பட வேண்டும். கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் ஒரு குறிப்பிட்ட அளவைத் தாண்டினுல் இதற்கு தீர்வு காண முடியாது என நிறுவுக.

47. கொடுக்கப்பட்ட பருமத்தையும், சிறும மேற்பரப்பையும் கொண்ட மூடப்பட்ட உருளையின் உயரம் அதன் விட்டத்திற்குச் சமம் என நிறுவுக.

48. ஒரு கூம்பின் சாய்வு உயரம் தரப்பட்டுள்ளது. அதன் பருமம் பெருமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் அரை உச்சிக்கோணம் $\tan^{-1}\sqrt{2}$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

49. அடிப்பக்கம் உள்ளிட்ட மொத்த மேற்பரப்பு கொடுக்கப் பட்டுள்ள ஒரு கூம்பின் அரை உச்சிக் கோணம் $\sin^{-1}\frac{1}{3}$ எனில் அதன் பருமம் பெருமமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

50. நேர் வட்டக் கூம்பின் பருமம் ஒரு அலகு (unit) எனத் தரப்பட்டுள்ளது என்றுல் அடிப்பக்கம் உள்ளிட்ட அதன் மொத்தப் பரப்பு $2(9\pi)^{1/3}$ என்பதற்கு குறைவாக இருக்க முடியாது என நிறுவுக.

51. வட்டமான தகட்டிலிருந்து வட்டகோணப் பகுதி ஒன்று வெட்டி எடுக்கப்பட்டு, எஞ்சிய பகுதி ஒரு கூம்பாக அமைக்கப்படு கிறது. அதன் கன அளவு பெருமமாக இருக்கவேண்டுமெனில் வெட்டிய பகுதியின் கோணம் $2\left(1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}\right)\pi$ ஆரையன்களாக இருக்கவேண்டும் என நிறுவுக.

52. ஒரு விசைப்படகை ஓட்டும்போது, அதன் திசை வேகத் தின் மூன்றுவது படிக்கேற்ப ஒரு மணி நேரத்தில் பெற்ருேல் செல

வாகிறது எனக் கொண்டு, மணிக்கு c மைல் ஓட்டமுடைய ஆற்றில் செல்வதற்கு மணிக்கு $\frac{3}{2}c$ மைல் வேகத்தில் செலுத்துவதே மிகுந்த ஆதாய முடையது என நிறுவுக.

53. a நீளமும் b அகலமும் உள்ள ஒரு செவ்வகத்தகடு ஒன்றிலிருந்து நான்கு மூலைகளிலும் சம அளவுள்ள சதுரங்கள் வெட்டியெடுக்கப்படுகின்றன. பின்னர் பக்கங்களை மடித்து, திறந்த செவ்வகப் பெட்டி உருவாக்கப்படுகிறது. அப் பெட்டியின் பருமம் பெருமமாக இருக்க வேண்டுமெனில் அப் பெட்டியின் ஆழம் $\frac{1}{6}\{ (a+b) - \sqrt{a^2 - ab + b^2} \}$ ஆக இருக்கவேண்டும் என நிரூபிக்கவும்.

54. கொடுக்கப்பட்ட கன அளவு தண்ணீரைக் கொள்ளுமாறு சதுர அடிப்பக்கமும், செங்குத்தான பக்கங்களையும் கொண்ட திறந்த தொட்டியை உலோகத் தகடுகளிலிருந்து செய்ய வேண்டியிருக்கிறது. அகலத்தைபபோல் ஆழம் அரைப் பங்கு எனில் பயன்படுத்தப்படும் உலோகத்தின் செலவு சிறுமமாகும் என நிறுவுக.

55. ஒரு வீட்டிலிருந்து 21 அடி 4 அங். தூரத்தில் 9 அடி உயரமுள்ள சுவர் ஒன்று உள்ளது. சுவற்றிற்கு மறு புறத்தில் தரைமட்டத்தில் கீழ் முனை அமைந்து, மேல் முனை வீட்டை எட்டுமாறு அமையக் கூடிய ஏணியின் சிறும நீளத்தைக் காண்க.

56. a அடி அகலமுள்ள ஒரு வீதிக்குச் செங்குத்தாகச் சந்து ஒன்று உள்ளது. b அடி $(b < a)$ நீளமுள்ள கம்பு ஒன்றை வீதியிலிருந்து சந்துக்குக் கிடைமட்டமாகக் கொண்டு செல்வதற்கேற்பச் சந்தின் அகலம் குறைந்தது எவ்வளவாக இருக்க வேண்டும் ?

57. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டின் மிகக் குறைந்த ஆரை வெக்டரின் நீளம் $a + b$ என நிறுவுக.

58. $\frac{c^2}{r^2} = \frac{a^2}{\sin^2 \theta} + \frac{b^2}{\cos^2 \theta}$ என்ற வளைகோட்டின் பெருமம், சிறும ஆரை வெக்டர்களைக் காண்க.

59. அச்சிலிருந்து $r = a(1 + \cos \theta)$ என்ற வளைகோட்டின் புள்ளிகளுக்கு உள்ள தூரங்களின் பெருமம் $\frac{3\sqrt{3}}{4}a$ என நிறுவுக.

விடைகள் 12

1. (i) $x = 1$-ல் பெருமம் 11 ; $x = 3$-ல் சிறுமம் -17

(ii) $x = 0$-ல் பெருமம் -9 ; $x = 2$-ல் சிறுமம் -13

(iii) $x = 1$-ல் பெருமம் -3 ; $x = 6$-ல் சிறுமம் $-3^2/^4$

(vi) $x = -1$-ல் பெருமம் 3 ; $x = 1$-ல் சிறுமம் $\frac{1}{2}$

(v) $x = -4$-ல் பெருமம் -6 ; $x = 0$-ல் சிறுமம் 2

(vi) $x = 1$-ல் பெருமம் $\frac{1}{2}$; $x = -1$-ல் சிறுமம் $-\frac{1}{2}$

(vii) $x = 1$-ல் பெருமம் 0

3. $x = 28/11$-ல் பெருமம் ;
$x = 2$; $x = 3$; ஆகியன பெருமமோ சிறுமமோ அன்று

5. $x = -1$-ல் பெருமம் ; $x = 7/9$-ல் சிறுமம் ; $x = 3$-ல் இரண்டுமில்லை.

8. e^{-1}.

13. 160 ; 0

14. (i) 21 ; 1

(ii) $136, -8$

(iii) 70 ; 0

15. $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

16. 16 அங் ; 10 அங்.

20. $27\sqrt{3}$ 22. $2 : 1$ 29. $a - b$

30. $\pm 2c\sqrt{ab}$ 32. $(a^{2/3} + b^{2/3})^3/c^2$ 33. $c^2/2\sqrt{ab}$

35. $31/40$ 39. நீளம் $\dfrac{40}{\pi + 4}$; அகலம் = ஆரை = $\dfrac{20}{\pi + 4}$

55. $41' \ 8''$

56. $(b^{2/3} - a^{2/3})^{3/2}$

58. $\tan\theta = \pm\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ எனில் பெருமம் $\dfrac{c^2}{a + b}$.

13. அணுகுகோடுகள்

§ 13-0 வரையறை அணுகுகோடுகள் (Asymptotes)

இப்பகுதியில் அணுகுகோடுகள் பற்றிக் காணு முன்னர் வளைகோடுகளில் முடிவிலாத பகுதிகள் பற்றி முதலில் காண்போம்.

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வளைகோட்டை எடுத்துக் கொண்டால் அது xy தளத்தில் முற்றிலும் அமைந்து விடுகிறது. ஆனால் $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற வளைகோட்டைப்பற்றி அவ்வாறு கூற முடியாது. இச்சமன்பாட்டிலிருந்து

$$y = + \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$y = + \sqrt{x^2 - a^2}$$

என இரு கிளைகள் கிடைப்பதையும் வளைகோட்டின் இரு கிளைகளும் முடிவிலி வரை அமைந்து இருப்பதையும் அறிகிறோம். இத்தகைய வளைகோடுகளில் அணுகுகோடு பற்றி பின்வருமாறு வரையறை செய்கிறோம்.

P என்பது வளைகோட்டில் முடிவிலாத பகுதியில் (கிளையில்) ஒரு புள்ளி என்க. $P(x, y)$ எனில் P அக்கோட்டில் நகரும்போது x, y ஆகியவற்றில் ஒன்றுவது $+\infty$ அல்லது $-\infty$-ஐ அணுகினால் P ஆனது வளைகோட்டில் முடிவிலியை அணுகுகிறது என்போம். அவ்வாறு P முடிவிலியை வளைகோட்டு வழியே அணுகும்போது P-க்கும், ஆதியிலிருந்து முடிவுள்ள தூரத்தில் உள்ள நேர்கோட்டுக்கும் உள்ள தூரம் பூச்சியத்தை அணுகினால் அந்த நேர் கோட்டை வளைகோட்டின் முடிவிலாப் பகுதியின் அணுகுகோடு (asymptote) என்கிறோம்.

அதாவது, வளைகோட்டின் முடிவிலாத பகுதியில் உள்ள P எனும் புள்ளியில் வரையப்பட்ட தொடுகோடு, P முடிவிலியை அணுகும்போது, ஆதியிலிருந்து முடிவுள்ள தூரத்தில் உள்ள எந்த நேர் கோட்டை அணுகுமோ அதனையே அணுகுகோடு என்கிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$xy = c$ அல்லது $y = \frac{c}{x}$ என்ற செவ்வக அதிபர வளைவுக்கு $x = 0$ அல்லது $y = 0$ என்ற அச்சுகள் அணுகு கோடுகளாகும்.

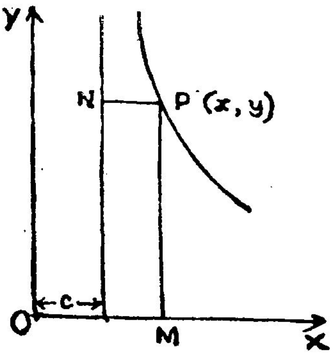
பயிற்சிகள் 13 (A)

1. வளைகோட்டினை முடிவிலாத தூரத்தில் இரு புள்ளிகள் வெட்டும் கோடு என அணுகு கோடு வரையறை செய்யப்படுவதுண்டு. இவ் வரையறையைத் திருத்தியமைக்க.

2. $y = \tan x$, $y = \sec x$ ஆகிய வளைகோடுகளுக்கு வரைபடம் வரைந்து அணுகு கோடுகளை அறிக.

§ 13-1. அணுகுகோடுகளைத் தீர்மானித்தல்

(i) $y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் y அச்சுக்கு இணையான அணுகு கோடுகளைக் கண்டுபிடித்தல்



படம் 13·1

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $x = c$ என்ற கோடு அணுகுகோடு என்க. c-ன் மதிப்பினைக் காணவேண்டும்.

$P(x, y)$ என்பது வளைகோட்டுப் புள்ளியெனில், $x = c$ எனும் கோட்டிலிருந்து P ஆனது δ தொலைவில் உள்ளது என்க.

$$\delta = |x - c|$$

அணுகு கோட்டின் வரையறைப்படி வளைகோட்டு வழியே $P \to \infty$, அணுக $\delta \to 0$ எனில் $x = c$ என்பது வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடாகும்.

$\therefore$ வளைகோட்டு வழியே $P \to \infty$ எனில்

$x - c \to 0$ அல்லது $x \to c$.

P முடிவிலியை அணுகுமெனில் P-ன் ஓர் ஆயத்தொலையாவது முடிவிலியை அணுகவேண்டும். $x \longrightarrow c$ ஆதலால் அது முடிவிலியை அணுக முடியாது. எனவே P முடிவிலியை அணுக வேண்டுமெனில், y ஆனது முடிவிலியை (+ அல்லது -- குறியுடன்) அணுக வேண்டும்.

$$\therefore \quad \underset{y \to \infty}{\text{Lt}} \; x = c$$

$\therefore$ c தீர்மானமாகும்.

எனவே $x = c$ என்ற அணுகுகோடு சமன்பாடு தெரியும்.

செயல்முறை விதி : $y = f(x)$ எனும் வளைகோட்டுக்கு y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடு காணும் முறை :

(i) y ஆனது $+\infty$ அல்லது $-\infty$ அணுகும்போது x அணுகும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகளான $c_1, c_2 \ldots$ ஆகியவற்றைக் காண்க.

(ii) $x = c_1, x = c_2, \ldots$ என்பன வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடுகளாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = e^{1/x}$ எனும் வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடுகள் காண்க.

$y \longrightarrow \infty$ எனில் $x \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $x = 0$ வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடாகும்.

குறிப்பு :

$x = \phi(y)$ எனும் வளைகோட்டுக்கு x அச்சுக்கு இணையான அணுகு கோடுகளைக் காணும் முறை முன்னதை ஒத்ததே.

$x \longrightarrow +\infty$ அல்லது $-\infty$ அணுகும்போது y அணுகும் குறிப்பிட்ட மதிப்புகள் $d_1, d_2, \ldots$ எனில் $y = d_1, y = d_2 \ldots\ldots$ என்பன அணுகு கோடுகளாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$y = \frac{3x^2 - 4x + 6}{5x^2 - 7x + 3} \text{ என்பது வளைகோடு}$$

$$\frac{3x^2 - 4x + 6}{5x^2 - 7x + 3} = \frac{3 - \frac{4}{x} + \frac{6}{x^2}}{5 - \frac{7}{x} + \frac{3}{x^2}}$$

ஆதலால் $x \longrightarrow \infty$ எனில் $\frac{1}{x} \longrightarrow 0$ அணுகும்

$$\therefore \operatorname*{Lt}_{x \longrightarrow \infty} \frac{3x^2 - 4x + 6}{5x^2 - 7x + 3} = \frac{3}{5}$$

எனவே $y = \frac{3}{5}$ என்பது x அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோட்டின் சமன்பாடாகும்.

(ii) $f(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டுக்கு y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகளைக் காணல் :

$f(x, y) = 0$ எனும் சமன்பாட்டை y படிகளின் இறங்கு வரிசைக்கேற்ப

$$y^n \phi_0(x) + y^{n-1} \phi_1(x) + y^{n-2} \phi_2(x) + \dots \dots + \phi_n(x) = 0 \quad \dots (1)$$

என அமைக்கவும். இங்கே $\phi_0(x)$, $\varnothing_1(x)$, ...

(1) என்ற சமன்பாட்டின் இரு புறமும் y^n ஆல் வகுக்க

$$\phi_0(x) + \left(\frac{1}{y}\right) \phi_1(x) + \left(\frac{1}{y^2}\right) \phi_2(x) + \dots + \left(\frac{1}{y^n}\right) \phi_n(x) = 0 \quad \dots (2)$$

$y \longrightarrow \infty$ என்க. அப்போது $x \longrightarrow c$ எனில் (2) எனும் சமன்பாடு $\phi_0(c) = 0$ என ஆகும். அதாவது c என்பது $\phi_0(x) = 0$ என்ற சமன்பாட்டுத் தீர்வு ஆக இருக்கும்.

$\phi_0(x) = 0$-க்கு c_1, c_2 ... ... என்பன மெய் தீர்வுகளெனில், $x = c_1$, $x = c_2$ ... என்பன y அச்சுக்கு இணையான அணுகு கோடுகளின் சமன்பாடுகளாகும்.

ஆனால் $\phi_0(x) = 0$ என்பதன் தீர்வுகளாக $c_1, c_2, \dots \dots \dots$ என்பன அமைந்தால் $x - c_1, x - c_2, \dots \dots$ என்பன $\phi_0(x)$-ன் காரணிகளாக இருக்கும். இங்கே $\phi_0(x)$ என்பது (1) எனும் சமன்பாட்டில் y-ன் மிக உயர்ந்த படிக்கு கெழுவாகும்

செயல்முறை விதி :

$f(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டுக்கு y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகள் காண சமன்பாட்டில் y-ன் மிக உயர்ந்த படிக்கு

கெழு கண்டு, அதன் ஒரு படிக்காரணிகளை பூச்சியத்துடன் சமன் படுத்துக.

குறிப்பு : y-ன் மிக உயர்ந்த படியின் கெழு மாறிலியாக இருந்தாலும் அக்கெழுவுக்கு ஒரு படிக்காரணிகள் மெய் இல்லாம லிருப்பினும், y அச்சுக்கு இணையாக அணுகுகோடுகள் இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$x^4 + x^2y^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = 0$ என்ற வளைகோடு தரப் பட்டுள்ளது. y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகள் காண் போம்.

y-ன் மிக உயர்ந்தபடி y^2

அதன் கெழு $x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

எனவே அணுகுகோடுகளுக்குச் சமன்பாடுகள்

$x - a = 0, \quad x + a = 0.$

குறிப்பு : $f(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டுக்கு x அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகள் காண சமன்பாட்டில் x-ன் மிக உயர்ந்த படிக்கு கெழு கண்டு அதன் ஒரு படிக் காரணிகளை பூச்சி யத்துடன் சமன்படுத்துக (நிறுவுக).

(iii) அச்சுகளுக்கு இணையில்லாத அணுகுகோடுகளை $f(x, y) = 0$ எனும் வளைகோட்டுக்கு காணல்.

$y = mx + c$ (1) என்பது $f(x, y) = 0$-க்கு ஒரு அணுகுகோடு என்க. இது அச்சுகளுக்கு இணையாக அமையவில்லை என்றும், எனவே m, c முடிவுள்ளன என்றும் கொள்க.

P (x, y) என்பது வளைகோட்டில் முடிவிலாப் பகுதியில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. P-லிருந்து (1) எனும் கோட்டுக்கு உள்ள தூரம் d என்க.

$$d = \frac{y - mx - c}{\pm\sqrt{1 + m^2}} \qquad (2)$$

இப்போது (1) என்பது வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடாக அமையு மாறு m, c மதிப்புகள் காண வேண்டும்.

m காணல்

(2)-லிருந்து $y - mx = c \pm d\sqrt{1+m^2}$

$$\therefore \quad \frac{y}{x} - m = \frac{c}{x} \pm \frac{d}{x}\sqrt{1+m_2} \qquad (3)$$

$y = mx + c$ அணுகு கோடாதலின், $x \longrightarrow \infty$ எனும்போது $d \longrightarrow 0$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} \left(\frac{y}{x} - m\right) = \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} \frac{c}{x} \pm \sqrt{1+m^2} \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} \frac{d}{x}$$

$$= 0$$

$$\therefore \quad \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} \frac{y}{x} = m$$

எனவே $$\boxed{m = \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} \frac{y}{x}}$$

இவ்வாறு m காணலாம்.

c காணல்

மறுபடியும் (2)-லிருந்து

$$\underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} (y - mx - c) = \pm\sqrt{1+m^2} \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} d$$

$$= 0 \ (\because x \longrightarrow \infty \text{ எனில் } d \longrightarrow 0)$$

$$\therefore \quad \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} (y - mx) = c$$

$$\therefore \quad \boxed{c = \underset{x\longrightarrow\infty}{\text{Lt}} (y - mx)}$$

இவ்வாறு c காணலாம். எனவே (1)-லிருந்து அணுகுகோடு தெரியும்.

செயல் முறை விதி ;

$f(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டுக்கு அச்சுகளுக்கு இணை யில்லாத அணுகுகோடுகள் காண

(i) சமன்பாட்டிலிருந்து $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{y}{x}\right)$ காண்க. பூச்சியம் உள்ளிட்ட மதிப்புகள் (முடிவுள்ளன) பல கிடைக்கின்றன என்க. இவை m.

(ii) முன்கிடைத்த m மதிப்பு ஒவ்வொன்றிற்கும் இயைந்த c மதிப்பான $\underset{x \to \infty}{\text{Lt}} (y - mx)$ காண்க. சமன்பாடு மூலம் இவ்வாறு கிடைக்கும் முடிவுள்ள c மதிப்புக்களை மட்டும் கருதுக.

(iii) $y = mx + c$ என்பன அணுகுகோட்டுச் சமன்பாடுகள் (m-க்கு இயைந்த c மதிப்பு இட வேண்டும்).

குறிப்பு : முன் கூறிய செயல்முறை விதியில் $y = mx + c$ என்ற சமன்பாடு பயனுனதால் y அச்சுக்கு இணையில்லாத கோடாக அணுகுகோடு கிடைக்கும். y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடு வேண்டுமெனில் $x = my + d$ எனும் சமன்பாடு கொண்டு துவங்குக. x அச்சுக்கு இணையில்லாத கோடுகளை இது குறிக்கும். $y \to \infty$ எனும் போது $m = \underset{y \to \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{x}{y}\right)$ கண்டு, $d = \underset{y \to \infty}{\text{Lt}} (x - my)$ காண்க. $\therefore$ x அச்சுக்கு இணையில்லாத அணுகுகோடு களின் சமன்பாட்டை இவ்வாறு காணலாம்.

x அச்சு, y அச்சு இரண்டுக்குமே இணையிலாத அணுகுகோடு களைக்காண $y = mx + c$ அல்லது $x = my + d$ இரண்டில் எதை வேண்டுமானாலும் கொண்டு துவங்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$y = x e^{1/x}$ எனும் வளைகோட்டுக்கு அச்சுகளுக்கு இணையில் லாத அணுகுகோடுகளைக் காண்போம்.

$y = mx + c$ என்பது வளைகோட்டின் அணுகுகோடு எனில்

$$m = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} \frac{y}{x} = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} (e^{1/x}) = e^0 = 1$$

மற்றும்

$$c = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} (y - mx) = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} (y - x) \quad m = 1 \text{ என்பதால்}$$

$$= \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} (x e^{1/x} - x) = \underset{x \to \infty}{\text{Lt}} x (e^{1/x} - 1)$$

$\therefore x = \frac{1}{h}$ என எடுத்துக்கொண்டால் $x \longrightarrow \infty$ எனில் $h \longrightarrow 0$.

$$\therefore c = \underset{x \to 0}{\text{Lt}} \frac{e^h - 1}{h} = \underset{h \to 0}{\text{Lt}} \frac{\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \dots - 1\right)}{h} = 1$$

$\therefore$ அணுகுகோடு $y = mx + c$ என்பது

$y = x + 1$ எனக் கிடைக்கும்.

பயிற்சிகள் 13 (B)

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அச்சுகளுக்கு இணையான அணுகு கோடுகளைக் காண்க.

1. $x^2 y (x + y) + a^2 y^2 = ax^3$

2. $y + 1 = e^{1/x}$

3. $y^2 (x^2 - a^2) = x$

4. $y = \dfrac{4x^2 + 4x - 3}{x^2 - 4x + 3}$

5. $y = \dfrac{2x - 3}{x^2 - 3x + 2}$

6. $y = \left[a - x \tan \dfrac{\pi x}{2a}\right]$

7. $y = \tan x$

பின்வரும் வளைகோடுக்கு அச்சுகளுக்கு இணையில்லாத அணுகு கோடுகளைக் காண்க ;

8. $y = x^3 + y^3 - 6x^2$

9. $y = a \log \sec \left(\dfrac{x}{a}\right)$

10. $x^3 + y^3 - 3a\,xy = 0$

விடைகள் 13 (B)

1. $y = a$. 2. $y = 0$. 3. $y = 0$; $x = \pm a$.

4. $x = 1$; $x = 3$; $x = 4$.

5. $y = 0$; $x = 1$; $x = 2$.

6. $x = -a, \pm 3a, \pm 5a, \ldots\ldots$

7. $x = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

8. $y = -x + 2$. 9. அணுகு கோடுகள் இல்லை.

10. $x + y + a = 0$.

§ 13-2. $F(x, y) = 0$ என்ற பொது இயற்கணித வளைகோட்டிற்கு y அச்சுக்கு இணையில்லாத அணுகுகோடுகளைக் காணுதல். [$\phi_n(m)$ முறை] :

n படியிலமைந்த பொது இயற்கணித வளைகோட்டின் சமன் பாட்டைப் பின் வருமாறு கருதுக.

$$(a_0 y^n + a_1 y^{n-1} x + a_2 y^{n-2} x^2 + \ldots + a_{n-1} y x^{n-1} + a_n x^n)$$
$$+ (b_1 y^{n-1} + b_2 y^{n-2} x + \ldots \ldots + b_{n-1} y x^{n-2} + b_n x^{n-1})$$
$$+ \ldots \ldots (l_{n-1} y + l_n x) + k_n = 0 \qquad \ldots (1)$$

இதனையே

$$x^n \phi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + x\phi_1\left(\frac{y}{x}\right) + \phi_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \quad \ldots (2)$$

என மாற்றியமைக்கலாம்; இங்கே $\phi_r(y/x)$ என்பது r படியில் y/x-ல் பல்லுறுப்புக் கோவை.

(2)-ஐ x^n ஆல்வகுத்து, $|x| \longrightarrow \infty$ செய்க.

$\displaystyle \mathop{\mathrm{Lt}}_{|x| \to \infty} \frac{y}{x} = m$ என எடுத்துக் கொள்க.

இப்போது $\boxed{\phi_n(m) = 0}$ ... (3)

எனக்கிடைக்கும். இதிலிருந்து வளைகோட்டின் பல கிளைகளுக்கு வரையக்கூடிய அணுகுகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்கள் கிடைக்கும். m-ன் ஒரு மதிப்பை m_1 எனக் கொண்டால் அதற்கு இயைந்த c_1 மதிப்பை பின்வருமாறு காணலாம்.

$y - m_1 x = k_1$; $|x| \longrightarrow \infty$ எனில் $k_1 \longrightarrow c_1$

$\frac{y}{x} = m_1 + \frac{k_1}{x}$ என்றும் எழுதலாம்.

(2)-லிருந்து பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$x^n \phi_n \left(m_1 + \frac{k_1}{x}\right) + x^{n-1} \phi_{n-1} \left(m_1 + \frac{k_1}{x}\right) + \ldots\ldots$$

$$+ x \phi_1 \left(m_1 + \frac{k_1}{x}\right) + \phi_0 \left(m_1 + \frac{k_1}{x}\right) = 0$$

டெய்லர் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி விரித்தெழுதினல்

$$x^n \left[\phi_n (m_1) + \frac{k_1}{x} \phi_n' (m_1) + \frac{k_1^2}{2x^2} \cdot \phi_n'' (m_1) + \ldots\ldots\right]$$

$$+ x^{n-1} \left[\phi_{n-1} (m_1) + \frac{k_1}{x} \phi'_{n-1} (m_1) + \frac{k_1^2}{2x^2} \phi''_{n-1}(m_1) + \ldots\right]$$

$$+ x^{n-2} \left[\phi_{n-2} (m_1) + \frac{k_1}{x} \phi_n'{}_{-2} (m_1) + \frac{k_1^2}{2x^2} \phi''_{n-2}(m_1) + \ldots\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots = 0 \ldots\ldots \qquad \ldots (4)$$

(4)-ஐ x-ன் படிகளின் ஏற்ற வரிசையில் அமைத்தால்

$$x^n \phi_n (m_1) + x^{n-1} [k_1 \phi'_n (m_1) + \phi_{n-1} (m_1)]$$

$$+ x^{n-2} \cdot \left[\frac{k_1^2}{2} \cdot \phi_n'' (m_1) + k_1 \phi_{n-2} (m_1)\right]$$

$$+ \ldots\ldots\ldots = 0 \ldots\ldots \qquad \ldots (5)$$

(3)-லிருந்து $\phi_n (m_1) = 0$ ஆதலால் (5)-ஐ x^{n-1} ஆல் வகுத்து, $|x| \longrightarrow \infty$ செய்து, $\mathrm{Lt}\, k_1 = c_1$ என்பதைப் பயன்படுத்தினல்

$$c_1 \phi'_n (m_1) + \phi_{n-1} (m_1) = 0 \qquad \ldots\ldots (6)$$

அல்லது $\boxed{c_1 = -\dfrac{\phi_{n-1}(m_1)}{\phi_n'(m_1)}}$ $(\phi_n'(m_1) \neq 0)$

எனவே $y = m_1 x - \dfrac{\phi_{n-1}(m_1)}{\phi_n'(m_1)}$

என்பது $\phi'_n(m) \neq 0$ எனில் m_1 என்ற சாய்வு விகிதத்திற்கியைந்த அணுகு கோடாகும்.

இவ்வாறே சமன்பாடு (3)-ன் தீர்வுகளான m_2, m_3 ... என்ற சாய்வு விகிதங்களுக்கியைந்த அணுகுகோடுகளைப் பின்வருமாறு பெறலாம்.

$$y = m_2 x - \frac{\phi_{n-1}(m_2)}{\phi'_n(m_2)} \quad (\phi'_n(m_2) \neq 0)$$

$$y = m_3 x - \frac{\phi_{n-1}(m_3)}{\phi'_n(m_3)} \quad (\phi'_n(m_3) \neq 0)$$

மற்றும் இவ்வாறே,

குறிப்பு :

இணை அணுகு கோடுகளின் வகை

(i) $\phi_n'(m_1) = 0$ ஆக அமைந்து $\phi_{n-1}(m_1) \neq 0$ ஆக இருந்தால் சமன்பாடு (6)-லிருந்து c_1 மதிப்பு தீர்மானமாகாது. இங்கே m_1 என்ற சாய்வு விகிதத்திற்கியைந்த அணுகு கோடு பொதுவாகக் கிடையாது.

(ii) $\phi'_n(m_1) = 0 = \phi_{n-1}(m_1)$ எனில் (6) முற்றொருமையாகும். இப்போது (5) என்ற சமன்பாடு x^{n-2} என்ற உறுப்பில் துவங்கும். இதனை x^{n-2} ஆல் வகுத்து, $|x| \to \infty$ எடுத்து, $\text{Lt}\, k_1 = c_1$ எனக் கொண்டால்

$\dfrac{c_1^2}{2} \cdot \phi_n''(m_1) + c_1 \phi'_{n-1}(m_1) + \phi_{n-2}(m_1) = 0$ எனக் கிடைக்கும். இதிலிருந்து $\phi_n''(m_1) \neq 0$ எனில் c_1-க்கு c_1', c_1'' என இரு மதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே,

$y = m_1 x + c_1'$; $y = m_1 x + c_1''$ என இரு இணை அணுகு கோடுகள் கிடைக்கும்.

(iii) (5) ஆம் சமன்பாட்டின் முதல், இரண்டாம் மூன்றும் உறுப்புகள் மறைந்தால் முன்பு விவரித்தவாறே மேற்கொண்டு தொடரவேண்டும்.

(iv) சமன்பாடு (2)-ல் $x^n \phi_n\left(\frac{y}{x}\right)$-ன் உயர்ந்தபடி உறுப்புகளுக்கு $x = 1$, $y = m$ எனப் பிரதியிட, $\phi_n(m)$ என்ற பல்லுறுப்புக் கோவை கிடைக்கும். இவ்வாறே $x^{n-1} \phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^{n-1} \phi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right)$ முதலானவற்றில் $x = 1$, $y = m$ பிரதியிட, $\phi_{n-1}(m)$, $\phi_{n-2}(m)$ முதலானவை கிடைக்கும்.

செயல்முறை விதி :

n படியிலமைந்த பின்வரும் வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

$$F(x, y) = x^n \phi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} \phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2} \phi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \dots \dots = 0$$

1. முன்பகுதிகளில் கூறிய விதிகளின் மூலம் அச்சுக்களுக்கிணையான அணுகுகோடுகளைக் காண்க.

2. $x^n \phi_n(y/x)$-ல் $x = 1$, $y = m$ பிரதியிட்டு $\phi_n(m)$ பெறுக.

$\phi_n(m) = 0$-லிருந்து $m = m_1, m_2, \dots \dots m_n$ கிடைக்குமெனக் கொள்க. மற்றும் $\phi_n'(m)$ காண்க.

3. $x^{n-1} \phi_{n-1}(y/x)$ என்பதில் $x = 1$, $y = m$ பிரதியிட $\phi_{n-1}(m)$ கிடைக்கும்.

4. $m = m_1$ என்பதற்கு ($\phi_n'(m) \neq 0$ என்றால்)

$$c = c_1 = \frac{-\phi_{n-1}(m_1)}{\phi_n'(m_1)}$$ எனப் பெறுக.

எனவே $y = m_1 x + c_1$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு. இவ்வாறே $m = m_2, m_3, \dots \dots$ முதலானவற்றிற்கியைந்த அணுகுகோடுகளைக் காண்க.

5. சில குறிப்பிட்ட m மதிப்புகளுக்கு $\phi_n'(m) = 0$ எனில் இணையான அணுகுகோடுகளை § 13-1. பகுதியில் விவரித்தவாறு காண ஆராய்க.

மாற்றுவழி :

முன்பகுதியில் கண்டவாறு n படியிலமைந்த இயற்கணித வளைகோட்டை எடுத்துக் கொள்க.

வகை I :

$y - m_1x$ என்பது சமன்பாட்டின் n படி உறுப்புக்களுக்குத் தனிக் (non-repeated) காரணி என்றால் வளைகோட்டின் சமன் பாட்டைப் பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$$(y - m_1x)\, F_{n-1} + P_{n-1} = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

இங்கே F_{n-1} என்பது $n - 1$ படியிலமைந்த உறுப்புக்களை மட்டுமே கொண்டிருக்கும். P_{n-1} என்பது $n - 1$ படிக்கு மேற் படாத உறுப்புக்களைக் கொண்டிருக்கும்.

$\phi_n(m) = 0$ என்று முன்பகுதியில் குறிப்பிட்ட சமன்பாட் டிற்கு m_1 தீர்வு என்பது தெளிவு. எனவே c_1-க்கு முடிவுள்ள மதிப்பு ஒன்றைத் தீர்மானம் செய்ய முடியும் என்றால் $y = m_1x + c_1$ என்ற ஒரு அணுகு கோடு இருக்கலாம்.

(x, y) என்பது வளைகோடு (1)-ன் முடிவிலாக் கிளையிலமைந்த புள்ளியெனில் சாய்வு அணுகுகோடுகள் பற்றிய பகுதியில் கண்டவாறு

$$c_1 = \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} (y - m_1x)$$

(1)-லிருந்து

$$y - m_1 x = -\frac{P_{n-1}}{F_{n-1}} \text{ கிடைக்கும்.}$$

எனவே,

$$c_1 = \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} (y - m_1 x) = -\underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{P_{n-1}}{F_{n-1}}\right)$$

எனவே,

$\underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{y}{x}\right)$ என்பதனைப் பயன்படுத்தி அணுகுகோடு பின்வருமாறு கிடைக்கிறது.

$$y - m_1 x - \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \left(- \frac{P_{n-1}}{F_{n-1}} \right) = 0.$$

இவ்வாறே n படியிலமைந்த ஒவ்வொரு தனி ஒருபடிக் காரணிக்கும் அணுகுகோடு காண வேண்டும்.

வகை II :

வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டில் n படி உறுப்புகள் $(y - m_1 x)^2$ என்பதனைக் காரணியாகவும், $n - 1$ படி உறுப்புகளுக்கு $y - m_1 x$ என்பது காரணி இல்லாமலும் அமைந்திருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். வகை I ல் கண்டவாறே $(y - m_1 x)^2$ என்பது முடிவுள்ள எல்லையை அணுகாது என்றும், எனவே m_1-ஐச் சாய்வு விகிதமாகக் கொண்ட அணுகுகோடு பொதுவாக கிடையாது என்றும் நிறுவலாம்.

வகை III :

மேற்கூறியவாறு அல்லாது சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு அமைக்கக் கூடும் எனக் கொள்க.

$$(y - m_1 x)^2 \cdot F_{n-2} + (y - m_1 x) P_{n-2} + Q_{n-2} = 0$$

இங்கே F_{n-2}, P_{n-2} என்பன $n - 2$ படிகளில் அமையும் உறுப்புக்களை மட்டுமே கொண்டுள்ளன. ஆனால் Q_{-2} பல படிகளில் அமைந்துள்ள உறுப்புக்களைக் கொண்டிருந்தாலும் எதன் படியும் $n - 2$-க்கு மிகைப்படாமல் உள்ளது. வகை I-ல் பயன்படுத்திய விவாதங்களைப் போன்றே இங்கும்

$$(y - m_1 x)^2 + (y - m_1 x) \times \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \frac{P_{n-2}}{F_{n-2}}$$

$$+ \underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \frac{Q_{n-2}}{F_{n-2}} = 0$$ என்பன இரு இணை அணுகுகோடுகளைக் குறிக்கும். எல்லைகளைத் தீர்மானம் செய்யும்போது

$$\underset{|x| \to \infty}{\text{Lt}} \left(\frac{y}{x} \right) = m_1$$ என்பதனைப் பயன்படுத்த வேண்டிய அவசியம் இருக்கும்.

வகை IV :

n படி உறுப்புகளில் $(y - m_1 x)^3$ அல்லது $(y - m_1 x)$-ன் மூன்றிலும் உயர்ந்தபடி காரணியாக அமையும்போது விவாதம் முன் போலவே.

வகை V :

வகை I-ல் $y - m_1x$ என்பதற்குப் பதிலாக $ax + by + c$ காரணியாக இருப்பின் வளைகோட்டுச் சமன்பாடு

$(ax + by + c) F_{n-1} + P_{n-1} = 0$ ஆகும்; இங்கே F_{n-1}, P_{n-1} இரண்டிலும் $(n - 1)$ படிக்கு மேற்பட்ட உறுப்புகள் இல்லை. F_{n-1}-ல் $(n - 1)$ படி உறுப்பு குறைந்தது ஒன்றாவது இருக்கும். அப்போது $ax + by + c$ என்ற காரணிக்கியைந்த அணுகு கோடானது.

$$ax + by + c + \underset{|x| \to \infty}{\mathrm{Lt}} \frac{P_{n-1}}{F_{n-1}} = 0: \text{ இங்கே}$$

$$\underset{|x| \to \infty}{\mathrm{Lt}} \left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{a}{b}$$

குறிப்பு : y அச்சுக்கு இணையில்லாத அணுகுகோடுகளின் திசைகள் $\phi_n(m) = 0$-ன் தீர்வுகளாகக் கிடைக்கிறது. இதன்படி n-க்கு மேற்படாததலால் அணுகுகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களான m-க்கு, n மதிப்புக்களுக்கு மேற்படாதவாறு எதிர்பார்க்கலாம். m இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் $c\,\phi_n'(m) + \phi_{n-1}(m) = 0$ விலிருந்து ஒரு c மதிப்பு கிடைக்கும். எனவே n படியில் அமைந்த ஒரு வளைகோட்டிற்குப் பொதுவாக n அணுகுகோடுகள் இருக்கும்.

ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட அணுகுகோடுகள் y அச்சுக்கு இணையாக இருப்பின், குறைந்தது அந்த அளவுக்கு $\phi_n(m) = 0$-ன் படி n-லிருந்து குறைவு பட்டிருக்கும்.

c-ன் மதிப்பைத் தீர்மானம் செய்யும் சமன்பாடு, இருபடியாக இருந்தாலும் கூட $\phi_n(m) = 0$-ல் m-க்கு இரு சமமதிப்புகள் கிடைக்கும். எனவே c ன் இருமதிப்புகளும் இரு சம தீர்வுகளுக்கு இயைந்திருக்கும். எஞ்சிய அணுகுகோடுகள் எஞ்சிய $n - 2$ தீர்வுகளுக்கு இயைந்திருக்கும். இவ்வாறே c-ஐத் தீர்மானம் செய்யும் சமன்பாடு முப்படியில் இருப்பின் $\phi_n(m) = 0$-க்கு மூன்று சம தீர்வுகள் இருக்கும். எவ்வாறுயினும் n அணுகு கோடுகளுக்கு மேல் இருக்க முடியாது.

எனவே n படியில் அமைந்த ஒரு வளைகோட்டிற்கு உச்ச அளவு n அணுகுகோடுகள் இருக்கலாம். எவ்வாறுயினும் n-க்கு மேற்பட்ட அணுகுகோடுகள் இருக்க முடியாது என முடிவு செய்கிறோம்.

செயல்முறை விதி :

n படியிலமைந்த பொதுவான இயற்கணித வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண செயல் முறை விதி பின்வருமாறு :

1. வளைகோட்டின்படி n ஆதலால் n-க்கு மேற்பட்ட அணுகு கோடுகள் இருக்க முடியாது.

2. அச்சுக்களுக்கிணையான அணுகுகோடுகளைப் பழைய முறைகளைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

3. மிக உயர்ந்தபடியில் அமைந்துள்ள உறுப்புக்களை, மெய் முதல்படி, உறுப்புகளில் காரணிப்படுத்துக $y - m_1 x$ அல்லது $ax + by + c$ என்பது ஒரு தனித்த ஒருபடிக் காரணி எனக் கொள்க. அப்போது இந்தக் காரணிக்கேற்ற அணுகுகோட்டைக் காண வகை I அல்லது வகை V-ஐப் பயன்படுத்துக. இவ்வாறே ஒவ்வொரு தனித்த காரணிகளுக்கும் இயைந்த அணுகுகோடு களைக் காண்க. $(y - m_1 x)^2$ அல்லது $(ax + by + c)^2$ என்பது n படி உறுப்புகளின் காரணியானால் இணையான அணுகுகோடுகள் இருக்க நேரலாம். அதே சமயத்தில் $y - m_1 x$ என்பது $n - 1$ படி உறுப்புகளுக்குக் காரணியெனில் இணை அணுகுகோடுகள் இருக்கும் ; இல்லையேல் இராது. இணையான அணுகுகோடுகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண வகை III-ஐப் பயன்படுத்துக.

4. $(y - m_1 x)^3$ என்பதற்கு இயைந்த இணையான அணுகு கோடுகள் இருப்பதற்கான நிபந்தனை $n - 1$ படி உறுப்புக்களில் $(y - m_1 x)^2$ காரணி ; $n - 2$ படி உறுப்புக்களில் $(y - m_1 x)$ காரணி. இவ்வாறே $y - m_1 x$-ன் மேற்பட்ட படிகளுக்கும் மேற் கொண்டு ஆராய்க.

§13-3 அணுகுகோடுகளைச் சோதனை மூலம் காணல்.

வளைகோட்டின் சமன்பாடு,

$$F_n + F_{n-2} = 0$$

என்ற அமைப்பில் உள்ளது எனக் கொள்க இங்கே F_n, n படி அல்லது அதற்குக் குறைந்த படிகளில் அமைந்த உறுப்புக்களா லானது. மேலும் F_n என்பது ஒருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்கப் படக் கூடுமெனவும் கொள்க. இவ்வாறு இருந்தால் F_n காரணி களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமப்படுத்துவதன் மூலம், எந்த இரண்டும் இணையில்லாத n அணுகுகோடுகள் கிடைக்கும். எனவே வளை கோட்டின் அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடு,

$$F_n = 0$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

தீர்வு :

[$\phi_n(m)$ முறை மூலம்]

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0 \qquad (1)$$

(1)-ல் உச்சபடி உறுப்புகளுக்கு $x = 1, y = m$ பிரதியிட

$$\phi_3(m) = m - m^2$$

$\phi_3(m)$-ஐ பூச்சியத்துடன் சமப்படுத்த

$$m - m^2 = 0$$

அது $m(m - 1) = 0$

$$\therefore \quad m = 0, m = 1.$$

(1)-ன் இரண்டாம் படி உறுப்புகளுக்கு $x = 1, y = m$ பிரதியிட

$$\phi_2(m) = m + m^2$$

மற்றும் $\phi_3'(m) = 1 - 2m$

$$\therefore \quad c = -\frac{\phi_2(m)}{\phi_3'(m)}$$

$$= -\left(\frac{m + m^2}{1 - 2m}\right) = \frac{m^2 + m}{2m - 1}$$

$m = 0$ எனில் $c = 0$; $m = 1$ எனில் $c = 2$

எனவே அணுகுகோடுகள்

$$y = 0, \qquad y = x + 2.$$

மற்றுமொரு அணுகுகோடு y^2-ன் கெழுவை பூச்சியத்துடன் சமன் படுத்த கிடைக்கிறது.

அதாவது $\quad x - 1 = 0$

(அது) $\quad x = 1$

இந்த அணுகுகோடு y அச்சுக்கு இணையானது.

$$x = 1, \quad y = 0, \quad y = x+2.$$

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகு கோடுகளைக் காண்க.

தீர்வு :

[$\phi_n(m)$ முறை : இணை அணுகுகோடுகள்]

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சமன்பாடு

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0 \qquad (1)$$

(1)-ல் முறையே மூன்றும், இரண்டாம், முதல் படி உறுப்புகளுக்கு $x = 1$, $y = m$ பிரதியிட

$$\phi_3(m) = 1 + 3m - 4m^3$$

$$\phi_2(m) = 0, \phi_1(m) = -1 + m$$

$$\therefore \quad \phi'_3(m) = 3 - 12m^2, \phi_3''(m) = -24m, \phi_2(m) = 0$$

$\phi_3(m) = 1 + 3m - 4m^3 = 0$-லிருந்து

$(1 - m)(2m + 1)^2 = 0$ (அது) $m = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$.

எனவே $c\,\phi_3'(m) + \varnothing_2(m) = 0$ என்பது

$$c(3 - 12m^2) = 0$$

எனவே $m = 1$ எனில் $c(3 - 12) = 0$ (அ-து) $c = 0$.

$\therefore$ ஒரு அணுகுகோடு $y = x$,

மற்றும் $m = -\frac{1}{2}$ எனில்

$$c\,\phi'_3(m) + \phi_2(m) = 0$$

என்பது $c \cdot 0 + 0 = 0$ எனும் முற்றொருமையாகும்.

எனவே $m = -\frac{1}{2}$ என்பதற்கேற்ற c மதிப்புகள் காண

$$\frac{c^2}{2}\phi_3''(m) + c\,\phi_2'(m) + \phi_1(m) = 0$$

(அது) $\frac{c^2}{2}(-24m) + c \cdot 0 + m - 1 = 0$

(அது) $c^2 = \frac{1}{4}$.

எனவே $m = -\frac{1}{2}$-க்கு இயைந்து $c = \pm\frac{1}{2}$

எனவே இதனால் கிடைக்கும் அணுகுகோடுகள்

$$y = -\tfrac{1}{2}x \pm \tfrac{1}{2}.$$

எனவே $x + 2y = \pm 1$

ஆகையால் அணுகுகோடுகள்

$$y = x, \quad x + 2y = \pm 1.$$

[மாற்று வழி] :

$y = mx + c$ . . (1) ஒரு அணுகுகோடென்க.

எனவே சமன்பாட்டில் y-க்கு பதிலாக $mx + c$ பிரதியிட

$$x^3 + 3x^2(mx + c) - 4(mx+c)^3 - x + (mx+c) + 3 = 0.$$

கிடைக்கும்.

(அது) $x^3(1+3m-4m^3) + x^2(3c-12m^2c)$
$$+ x(-1+m-12c^2m) + (c+3-4c^3) = 0.$$

(1) அணுகுகோடாதலால், m, c பின்வரும் சமன்பாடுகளால் கிடைக்கும்.

$$1 + 3m - 4m^3 = 0 \qquad \dots (1)$$

$$3c - 12m^2c = 0 \qquad \dots (3)$$

(2)-லிருந்து $m = 1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$m = 1$ எனில் (3)-லிருந்து $c = 0$

$m = -\frac{1}{2}$ எனில் (3)-லிருந்து $c \cdot 0 = 0$ என்ற முற்றொருமை கிடைக்கும்.

எனவே x-ன் அடுத்த கீழ்ப்படி கெழுவை பூச்சியத்துக்கு சமப் படுத்த $m - 1 - 12c^2m = 0$

$$(\text{அது}) \qquad c^2 = \frac{m-1}{12m}$$

எனவே $m = -\frac{1}{2},\ c^2 = \frac{1}{4} \qquad \therefore \quad c = \pm \frac{1}{2}$

எனவே அணுகுகோடுகள்

$$y - x = 0, \quad x + 2y - 1 = 0, \quad x + 2y + 1 = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

தீர்வு : [எல்லை முறை]

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(\text{அது})\ (x^3 + 2x^2 y - xy^2 - 2y^3) + 4y^2 + 2x - 1 = 0$$

$$(\text{அது})\ (x + y)(x - y)(x + 2y) + 4y^2 + 2x - 1 = 0$$

எனவே மூன்று அணுகுகோடு மெய்யாகவும்

$x + y = 0,\ x - y = 0,\ x + 2y = 0$ என்பனவற்றுக்கு இணையாகவும் இருக்கின்றன.

$x + y = 0$-க்கு இணையான அணுகுகோடு

$$x + y = \operatorname*{Lt}_{\substack{x \to \infty \\ y/x \to -1}} \left[\frac{-4y^2 - 2x + 1}{(x - y)(x + 2y)}\right]$$

$$= \operatorname*{Lt}_{\substack{x \to \infty \\ y/x \to -1}} \left[\frac{-4(y^2/x^2) - 2/x + 1/x^2}{(1 - y/x)(1 + 2y/x)}\right]$$

$$= 2$$

$\therefore \quad x + y = 2$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு

இனி $x - y = 0$-க்கு இணையான அணுகுகோடாவது

$$x + y = \operatorname*{Lt}_{\substack{x \to \infty \\ y/x \to 1}} \left[\frac{-4y^2 - 2x + 1}{(x + y)(x + 2y)}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ y/x \to 1}} \left[\frac{-4(y^2/x^2) - 2/x + 1/x^2}{(1 + y/x)(1 + 2y/x)} \right]$$

$$= -2/3$$

எனவே $3x - 3y + 2 = 0$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு மற்றும் $x + 2y = 0$-க்கு இணையான அணுகுகோடு

$$x + 2y = \lim_{\substack{x \to \infty \\ y/x = -1/2}} \left[\frac{-4y^2 - 2x + 1}{(x + y)(x - y)} \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to \infty \\ y/x = -1/2}} \left[\frac{-4y^2/x^2 - 2/x + 1/x^2}{(1 + y/x)(1 - y/x)} \right] = -4/3$$

எனவே $3x + 6y + 4 = 0$ என்பது 8 மூன்றும் அணுகுகோடு.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$(x+y)^2 (x+2y+2) = x + 9y - 2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

தீர்வு : [எல்லைமுறை; இணை அணுகுகோடுகள்]

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$(x+y)^2 (x+2y) + 2(x+y)^2 - (x+9y-2) = 0 \qquad \dots (1)$$

என மாற்றி அமைக்கலாம்.

எனவே அணுகுகோடுகள் $x+2y = 0$, $x+y = 0$ என்பனவற்றுக்கு இணை.

$x+2y = 0$-க்கு இணையான அணுகிகோட்டைக் காண $x+2y$-ஐ அப்படியே வைத்துக் கொண்டு, (1)-ஐ x^2ஆல் வகுக்கவும்.

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 (x+2y) + 2\left(1 + \frac{y}{x}\right)^2 - \left(1 + 9\frac{y}{x}\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) = 0$$

$x \to \infty$, $\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$ என்ற எல்லைகாண

$$(1 - \tfrac{1}{2})^2 (x+2y) + 2(1 - \tfrac{1}{2})^2 = 0$$

(அது) $\qquad x + 2y + 2 = 0 \qquad$ என்ற

அணுகுகோடு $x + 2y = 0$-க்கு இணையாகக் கிடைக்கிறது.

மற்றும் $x + y = 0$-க்கு இணையான அணுகுகோடு காண, $(x+y)^2$ என்பதை மாற்றுது வைத்துக் கொண்டு

(1)-ஐ x ஆல் வகுக்க

$$(x+y)^2\left(1 + \frac{y}{x}\right) + \frac{2}{x}(x+y)^2 - \left(1 + \frac{9y}{x} - \frac{2}{x}\right) = 0.$$

$$\text{அது}\quad (x+y)^2\left[1 + \frac{2y}{x} + \frac{2}{x}\right] - \left(1 + \frac{9y}{x} - \frac{2}{x}\right) = 0.$$

$x \longrightarrow \infty,\ y/x \longrightarrow -1$ எனும் எல்லையில்

$$(x+y)^2(1-2) - (1-9) = 0$$

$$\text{அது}\quad (x+y)^2 = 8 \quad \therefore\ x+y = \pm 2\sqrt{2}$$

என $x+y = 0$-க்கு இணையான அணுகுகோடுகள் கிடைக்கின்றன.

ஆகவே அணுகுகோடுகள், $x+2y+2 = 0$. $x+y+2\sqrt{2} = 0$, $x+y-2\sqrt{2} = 0$.

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$$xy(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2) + 3xy(x^2-y^2) + x^2 + y^2 - 7 = 0$$

என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

தீர்வு :

(சோதனை முறை)

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$[xy(x^2 - y^2)(x^2 - 4y^2)]$$
$$+ [3xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - 7] = 0$$

என $F_n + F_{n-2} = 0$ அமைப்பில், F_n தனித்த ஒருபடிக்காரணிகளாகப் பிரியுமாறு எழுதலாம்.

எனவே அணுகுகோடுகள்

$$F_n = 0$$

அமைப்பில் வரும்.

(அது) $xy(x+y)(x-y)(x+2y)(x-2y) = 0$

அல்லது

$$x = 0,\ y = 0,\ x + y = 0,\ x - y = 0,\ x + 2y = 0$$

$x - 2y = 0$ என்பன அணுகுகோடுகளாம்.

பயிற்சிகள் 13 (C)

பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காண்க; குறிப்பிடப்பட்ட முறைகளைக் கையாளுக.

1. (ϕ_m முறை மூலம்)

(a) $y^3 = x^3 + ax^2$

(b) $x(y-3)^2 = 4y(x-1)^3$

(c) $x^3 - 2y^3 + xy(2x-y) + y(x-1) + 1 = 0$

(d) $2y^3 - 2x^2y - 4xy^2 + 4x^3 - 14xy + 6y^2 + 4x^2 - 6y + 4x + 7 = 0.$

(e) $x^3 + 3x^2y - xy^2 - 3y^3 + x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + 7 = 0.$

(f) $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$

(g) $x^2 + 2xy - y^2 + x - y + 2 = 0.$

2. (ϕ_m முறை : இணை அணுகுகோடுகள்)

(a) $y^3 + x^2y + 2xy^2 - y + 1 = 0$

(b) $x^3 - 2x^2y + xy^2 + x^2 - xy + 2 = 0.$

(c) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 + x^2 - y^2 - 2 = 0.$

(d) $y^3 - 5xy^2 + 8x^2y - 4x^3 - 3y^2 + 9xy - 6x^2 + 2y - 2x + 1 = 0$

(e) $4x^3 - 3xy - y^3 + 2x^2 - xy - y^2 - 1 = 0$

(f) $x^2(x-y)^2 + a^2(x^2 - y^2) - a^2xy = 0.$

3. (எல்லை முறை மூலம்)

(a) $y^2 (x - b) = x^3 + a^3$

(b) $(x^2 - y^2)(y^2 - 4x^2) - 6x^3 + 5x^2y + 3xy^2 - 2y^3 - x^2 + 3xy - 1 = 0$

(c) $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + 4y^2 + 2yx + y - 1 = 0$

4. (எல்லை முறை: இணை அணுகுகோடுகள்)

(a) $x (y - x)^2 = x (y - x) + 2$

(b) $(x - y)^2 (x - 2y)(x - 3y) - 2a (x^3 - y^3) - 2a^2 (x - 2y) . (x + y) = 0.$

(c) $(y - x)^2 x - 3y (y - x) + 2x = 0.$

(d) $(x - y)^2 (x^2 + y^2) - 10(x - y)x^2 + 12y^2 + 2x + y + 7 = 0$

(e) $(x - 2y)^2(x - y) - 4y(x - 2y) - (8x+7y) = 0$

5. (சோதனை முறை மூலம்)

(a) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$

(b) $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^3} = 1.$

(c) $(x^2 - y^2)(x + 2y + 1) + (x + y + 1) = 0.$

(d) $xy(x^2 - y^2) + 2x^2 + 2y^2 + 1 = 0.$

6. ஏற்றமுறைகளைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காண்க :

(a) $(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1)(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2) + \gamma_3 = 0$

(b) $y^2 (x - 2a) - x^3 - a^3$

(c) $(y - a)^2 (x^2 - a^2) = x^4 + a^4$

(d) $y^3 - 2y^2 x - yx^2 + 2x^3 + y^2 - 6xy + 5x^2 - 2y + 2x + 1 = 0.$

(e) $y^2 (x^2 - y^2) = x$

(f) $y^3 - xy^2 - x^2y + x^3 + x^2 - y^2 = 1$

(g) $\dfrac{y^2}{x^2} = \dfrac{(a - x)^2}{x^2 + a^2}$

(h) $x^2 y^2 - x^2y - xy^2 + x + y + 1 = 0.$

7. ஏற்ற முறைகளைக் கையாண்டு பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காண்க :

(a) $x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$

(b) $y^2 (a^2 - x^2) = x^4$

(c) $(x^2 - a^2) y^2 = x^2 (x^2 - 4a^2)$

(d) $2x (y - 3)^2 = 3y (x - 1)^2$

(e) $xy^2 = 4a^2 (2a - x)$

(f) $(x^2 - a^2) y^2 = x$

(g) $ay^2 = x (x^2 + y^2)$

(h) $x^3 + y^3 - 3\,axy = 0.$

(i) $y^2 (x^2 - a^2) = x^2 (x^2 + a^2).$

விடைகள் 13 (C)

1. (a) $y = x + \dfrac{a}{3}$

(b) $x = 0$; $y = 0$; $2y + 4x = 15$; $2y = 4x + 31$

(c) $6y - 6x = 1$; $3x + 6y = 2$; $2x + 2y + 1 = 0$

(d) $y - x + 1 = 0$; $y + x + 2 = 0$; $y - 2x = 0$

(e) $4x - 4y + 1 = 0$; $2x + 2y = 3$; $4x + 12y + 9 = 0$

(f) $2y + x = 1$; $y = x$; $y + x + 1 = 0.$

(g) $y = (1 \pm \sqrt{2})\, x - \frac{1}{2}$

2. (a) $y = 0$; $y + x + 1 = 0$; $y + x - 1 = 0$.

(b) $x = 0$; $y = x$; $y = x + 1$

(c) $y - x = 0$; $y + x = 0$; $y + x + 1 = 0$.

(d) $y - x = 0$; $y = 2x + 2$; $y = 2x + 1$

(e) $y - x = 0$; $y + 2x = 0$; $y + 2x + 1 = 0$

(f) $x = \pm a$; $x - y = \pm a$,

3. (a) $x - b = 0$; $2x + 2y + b = 0$; $2x - 2y + b = 0$

(b) $y = x$; $y = 2x$; $y = -x - 1$; $y + 2x + 1 = 0$

(c) $x + 2y = 0$; $x - y + 1 = 0$; $x + y - 1 = 0$

4. (a) $y - x = \pm 1$; $y - x = 0$.

(b) $y - x = \pm 1$; $y - x = 0$

(c) $y = x + 2$; $y = x + 1$; $x = 0$

(d) $x - y = 2$; $x - y = 3$

(e) $y = x + 4$; $2x = x - 2 \pm 3\sqrt{3}$

5. (a) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$

(b) $x = \pm a$

(c) $y - x = 0$; $y + x = 0$; $x + 2y + 1 = 0$

(d) $x = 0$; $y = 0$; $x \pm y = 0$.

6. (a) $\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 = 0$; $\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 = 0$

(b) $y = 2a$; $y = x + a$; $y = -x - a$

(c) $x = \pm a$; $y = x + a$; $y = -x + a$

(d) $y = x$; $y = 2x + 1$; $y = -x - 2$

(e) $x = \pm a$; $y = 0$

(f) $y = x+1;\ y = -x$

(g) $x = y \pm a = 0$

(h) $y = 0;\ y = 1;\ x = 0;\ x = 1.$

7. (a) $x = \pm a;\ y = \pm a.$

(b) $x = \pm a;$

(c) $x = \pm a;\ y = \pm x.$

(d) $x = 0;\ y = 0;\ 2y = 3x + 6.$

(e) $x = a$

(f) $y = 0;\ x = \pm a.$

(g) $x = a$

(h) $x + y + a = 0$

(i) $x = \pm a;\ y = \pm x.$

§ 13-4. வளைகோடும் அணுகு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள்

தேற்றம் :

n படியில் அமைந்த வளைகோட்டின் எந்த அணுகுகோடும் வளைகோட்டை $n - 2$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

நிறுவல் :

$$x^n \phi_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}\phi_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}\phi_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \dots = 0 \dots\dots \quad (1)$$

என்ற வளைகோட்டிற்கு

$$y = mx + c \quad \dots \quad (2)$$

ஒரு அணுகுகோடு என்க. இவை இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளது x ஆயத்தொலைகள்

$$x^n \phi_n\left(m + \frac{c}{x}\right) + x^{n-1}\phi_{n-1}\left(m + \frac{c}{x}\right) + x^{n-2}\phi_{n-2}\left(m + \frac{c}{x}\right) + \dots\dots = 0$$

டெய்லர் தேற்றத்தால் விரிவு படுத்தி வரிசைப்படுத்தினால் பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$x^n \phi_n(m) + x^{n-1}\,[c\,\phi'_n(m) + \phi_{n-1}(m)]$$
$$+ [\tfrac{1}{2} c^2 \phi_n''(m) + c\,\phi'_{n-1}(m) + \phi_{n-2}(m)]\,x^{n-2}$$
$$+ \ldots\ldots = 0 \quad \ldots (3)$$

(2) ஆனது (1)-ன் அணுகுகோடு ஆதலால்,

$$\phi_n(m) = 0, \qquad c\,\phi_n'(m) + \phi_{n-1}(m) = 0$$

எனவே (3) என்ற சமன்பாடு $n-2$ படியில் அமைந்த சமன்பாடாகி விடுகிறது. எனவே x-க்கு $n-2$ மதிப்புகளே இருக்க முடியும். எனவே தேற்றம் நிறுவப்படுகிறது.

கிளை 1 :

n படியில் அமைந்த வளைகோட்டின் n அணுகுகோடுகளும் வளைகோட்டை மொத்தம் $n(n-2)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

கிளை 2 :

எந்த இரு கோடும் இணையாக இல்லாதவாறு n அணுகுகோடுகளைக் கொண்ட n படி வளைகோடுகள் இருந்தால் வளைகோட்டை $F_n = 0$ எனவும், அணுகுகோடுகளை $F_n + F_{n-2} = 0$ எனவும் எழுதலாம் என முன்பே கண்டோம்.

இந்த n அணுகுகோடுகளும் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் $F_{n-2} = 0$ என்ற வளைகோட்டில் அமையும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) முப்படி வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் வளைகோட்டை

$3(3-2) = 3$ புள்ளிகளில் வெட்டும். அவை $3-2 = 1$ படியில் அமைந்த வளைகோட்டின் மீது அமையும். அதாவது நேர்கோட்டில் அமையும்.

(ii) நான்காம்படி வளைகோட்டின் சமன்பாடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் எட்டு.

$[4 \times (4-2)]$ இவை அமைவது ஒரு இருபடி வரையில் (conic) ஆகும். {ஏனெனில் படி $= 4-2 = 2$.}

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ என்ற வளை கோட்டைப் போலவே அணுகுகோடுகள் கொண்டிருப்பதும், (3, 2) என்ற புள்ளி வழியே செல்வதும், y அச்சை ஆதியில் தொடுவதுமான முப்படி வளைகோட்டின் (cubic) சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு :

$$x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + 4x + 5y + 7 = 0$$

எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

$$(\text{அது})\ (x - y)(x - 2y)(x - 3y) + 4x + 5y + 7 = 0$$

என்பதால் சமன்பாட்டை $F_n + F_{n-2} = 0$ என்ற அமைப்பில் கிடைக்கிறது ; இங்கே F_n-க்கு தனித்த ஒரு படிகாரணிகள் உள்ளன.

எனவே சோதனை முறையில்

$$(x - y)(x - 2y)(x - 3y) = 0$$

என்பது அணுகுகோடுகளின் சமன்பாடு என அறிகிறோம். மேற்படி அணுகுகோடுகளைக் கொண்ட வளைகோட்டின் பொதுவான சமன்பாடு

$(x - y)(x - 2y)(x - 3y) + F_1 = 0$ ஆகும். F_1 முதல் படியில் x, y-ல் இருப்பதால் $ax + by + c$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ (x - y)(x - 2y)(x - 3y) + ax + by + c = 0$$

a, b, c தீர்மானிக்க கொடுக்கப்பட்ட நிபந்தனைகளைப் பயன் படுத்துவோம்.

ஆதிவழிச் செல்கிறது $\quad \therefore\ c = 0$

$\therefore$ சமன்பாடு $(x - y)(x - 2y)(x - 3y) + ax + by = 0$

குறைந்தபடி உறுப்புக்களை பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த ஆதியில் தொடுகோடாக $ax + by = 0$ கிடைக்கிறது. ஆனால் y அச்சான $x = 0$ தொடுகோடு ஆதியில் உள்ளதாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

எனவே $b = 0$; அதனால் சமன்பாடு

$$(x - y)(x - 2y)(x - 3y) + ax = 0$$

(3, 2) இதில் அமைவதால் $(3-2)(3-4)(3-6)+3a=0$

$$\therefore \quad a = -1$$

எனவே வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$(x-y)(x-2y)(x-3y)-1=0$$

(அது) $x^3-6x^2y+11xy^2-6y^3-x=0$

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$$(x^2-y^2)(y^2-4x^2)+6x^3-5x^2y-3xy^2 + 2y^3-x^2+3xy-1=0$$

என்ற வளைகோட்டின் நான்கு அணுகுகோடுகளும் வளைகோட்டை மீண்டும் எட்டு புள்ளிகளில் வெட்டும் எனவும், அப்புள்ளிகள் ஓர் அலகு ஆரை உள்ள வட்டத்தில் அமையும் எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\phi_4(m) = (1-m^2)(m^2-4) \qquad \therefore \quad m = \pm 1, \pm 2$$

$$\phi'_4(m) = 10m-4m^3$$

$$\phi_3(m) = 6-5m-3m^2+2m^3$$

மேலும் $c\,\phi_4'(m)+\phi_3(m)=0$

எனவே $c(10m-4m^3)+(6-5m-3m^2)+2m^3=0$

$m = 1, -1, 2, -2$ என மதிப்பிட முறையே

$c = 0, 1, 0, 1$

$\therefore$ எனவே நான்கு அணுகுகோடுகள்

$y-x=0,\ y+x-1=0,\ y-2x=0,\ y+2x-1=0$

எனவே அணுகுகோடுகளின் மொத்த சமன்பாடு

$F_n = 0$ (அது) $(y-x)(y+x-1)(y-2x)(y+2x-1)=0$

(அது) $(y^2-x^2)(y^2-4x^2)-6x^3+5x^2y+3xy^2-2y^3 + 2x^2+y^2-3xy=0$

(அது) $(x^2-y^2)(y^2-4x^2)+6x^3-5x^2y-3xy^2+2y^3 - 2x^2-y^2+3xy=0$

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை

$$\{(x^2-y^2)(y^2-4x^2)+6x^3-5x^2y-3xy^2+2y^3-2x^3-y^2+3xy\}+(x^2+y^2-1)=0$$

என $F_n + F_{n-2} = 0$ அமைப்பில் எழுதலாம்.

எனவே $4(4-2) = 8$ வெட்டும் புள்ளிகளும் $F_{n-2} = 0$ என்ற $x^2+y^2-1 = 0$ என்ற ஓரலகு ஆரை உள்ள வட்டத்தில் அமைகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 11 :

$x^2y^2 - a^2(x^2+y^2) - a^3(x+y) + a^4 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் ஒரு சதுரத்தை உண்டாக்கும் எனவும், அச்சதுரத்தின் இருமுனைகள் வழியே வளைகோடு செல்லும் எனவும் நிறுவுக.

நிறுவல் :

x அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகள் காண x-ன் மிக உயர்ந்த படியின் கெழுவை பூச்சியத்துக்கு சமன்படுத்துக.

$$\therefore \quad y^2 - a^2 = 0$$

எனவே $y+a = 0, y-a = 0$ இரு அணுகுகோடுகள்

இவ்வாறே $x+a = 0, x-a = 0$ இரு அணுகுகோடுகள்

சமன்பாட்டின்படி 4 ஆதலால்

வேறு அணுகுகோடுகள் இல்லை.

சதுரத்தின் நான்கு முனைகள்

$(a, a), (a, -a), (-a, a), (-a, -a)$ இவற்றில் $(a, -a)$, $(-a, a)$ என்ற இருமுனைகள் வழியே வளைகோடு செல்லும்.

பயிற்சிகள் 13 (D)

1. $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்வதும், $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + x + y + 1 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு எவை அணுகுகோடுகளோ அவற்றையே அணுகுகோடுகளாகக் கொண்டதுமான முப்படி வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ என்ற புள்ளிகள் வழியே செல்வதும், $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 + 4x + 5y + 7 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு எவை அணுகுகோடுகளோ அவற்றையே அணுகு கோடுகளாகக் கொண்டிருப்பதுமான மூன்றும் படியிலமைந்த முப்படி வளைகோட்டின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

3. $x^2 y^2 - x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் சதுரமாக அமையுமெனவும் அவற்றின் இரு முனைகள் வழியே வளைகோடு செல்லும் எனவும் நிறுவுக.

4. $x (x^2 - y^2) + y (3y - x) = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் மீண்டும் வளைகோட்டை வெட்டும் மூன்று புள்ளிகள் $7x - 3y + 6 = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

5. $x^3 - xy^2 - 2xy + 2x - y = 0$ என்ற வளைகோடும் அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் $y = 3x$ என்ற நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

6. $(y - x)(y - 2x)^2 + (y + 3x)(y - 2x) + 2x + 2y - 1 = 0$ என்ற வளைகோடும் அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் நேர்கோட்டிலமையும் என நிறுவுக.

7. $3x^3 + 2x^2y - 7xy^2 + 2y^3 - 14xy + 7y^2 + 4x + 5y = 0$ என்ற வளைகோடும் அதன் அணுகுகோடுகளும் நேர்கோட்டில் அமைந்த மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டும் என நிறுவுக. அந்த நேர்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

8. $(x + a)^2 y^2 = (x + b) x^2$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகு கோடுகள் கண்டு, வளைகோட்டை அவை மீண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

9. $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - 1) + 1 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் மீண்டும் அந்த வளைகோட்டை $x - y + 1 = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் அமைந்த மூன்று புள்ளிகளில் வெட்டும் என நிறுவுக.

10. $2x^3 + x^2y - 2xy^2 - y^3 + 7x^2 + 2xy - 3y^2 - 5x + 3 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் கண்டு, அவை வளைகோட்டை மீண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் ஆதிவழியே செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

11. $x^2(2x+y) = y^2(x-3)$ என்ற வளைகோடும் அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் $14x + 9y + 12 = 0$ என்ற நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

12. $xy(x^2 - y^2) + x^2 + y^2 - a^2 = 0$ என்ற வளைகோடும் அவற்றின் அணுகுகோடுகளும் எட்டுபுள்ளிகளில் வெட்டுமெனவும், அவை ஆதியில் மையமுடைய ஒரு வட்டத்தில் அமையும் எனவும் நிறுவுக.

13. $x^4 - 5x^2y^2 + 4y^4 + x^2 - y^2 + x + 1 = 0$ என்ற வளைகோடும் அதன் அணுகுகோடுகளும் வெட்டும் எட்டு புள்ளிகள் ஓர் செவ்வக அதிபர வளையில் அமையும் என நிறுவுக.

14. $4(x^4 + y^4) - 17x^2y^2 - 4x(4y^2 - x^2) + 2(x^2 - 2) = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் காண்க. அவை $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ என்ற நீள்வளையம் வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் வழியே செல்லும் என நிறுவுக.

15. $x^2(x+y)(x-y)^2 + ax^3(x-y) - a^2y^3 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் காண்க. (a, b) என்ற புள்ளியின் வழியே செல்வதும், $x = 0$; $y = 0$; $y = x$; $y = -x$ என்ற அணுகுகோடுகளைக் கொண்டதும், அணுகுகோடுகளை வெட்டுகின்ற எட்டுப்புள்ளிகளும் $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டத்தில் அமைவதுமான நான்காம்படிச் சமன்பாட்டை உடைய வளைகோட்டைக் காண்க.

விடைகள் 13 (D)

1. $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 - x + 6y = 0$

2. $x^3 - 6x^2y + 11xy^2 - 6y^3 - 4x + 24y = 0$

7. $106y - 381x + 105 = 0$

14. $x = \pm 2y$; $y - 2x - 1 = 0$; $y + 2x + 1 = 0$

15. $x = \pm a$; $y = x + a$, $y = \pm x - \frac{a}{2}$

$bxy(x^2 - y^2) + a(b^2 - a^2)(x^2 + y^2 - a^2) = 0, 0$

§ 13·5 இயற்கணித வளைகோடுகளாக அமையாத வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காணல்:

வளைகோடுகளின் இயற்கணித சமன்பாடுகளுக்கு நாம் கூறிய முறைகள் வளைகோடுகளின் கோண விகிதச் சமன்பாடுகளுக்குப் பொருந்தி வராது. எனவே அணுகுகோட்டின் வரையறையைப் பயன்படுத்தி அணுகுகோடுகள் காணவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$y = \tan x$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

தீர்வு :

$$y = \tan x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \sec^2 x$$

எனவே (x, y)-ல் தொடுகோடு

$$Y - \tan x = (X - x) \sec^2 x$$

(அது) $Y \cos^2 x - \sin x \cos x = X - x$ ... (1)

இடப்புறமிருந்து $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ எனில்

$$y \longrightarrow \infty$$

அத்தொடு ஆதியிலிருந்து (x, y)-க்கு உள்ள தூரம் ∞-ஐ அணுகும்.

$\therefore$ அணுகுகோட்டைப் பெற $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ எல்லையில் (1)-ஐ மாற்றியமைக்க வேண்டும்.

$$\text{(அது) } Y \cdot 0 - 0 = X - \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \quad X = \frac{\pi}{2}$$

எனவே $X = \frac{\pi}{2}$ என்பது ஒரு அணுகுகோடு.

பிற அணுகுகோடுகள்

$$X = -\frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots$$

§ 13-6. அணுகுவளைகோடுகள் (curvi linear asymptotes)

ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_n + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots\dots \quad (1)$$

என்ற வடிவத்தில் அமையக் கூடுமானால்

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots\dots + a_n \quad (2)$$

என்பது (1)-ஐ அணுகும்.

குறிப்பாக ஒரு வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y = a x^2 + b x + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \dots\dots \quad (3)$$

என்ற அமைப்பில் எழுதப்படக் கூடுமானால்

$$y = ax^2 + bx + c \quad (4)$$

என்ற வளைகோடு அணுகு பரவளையமாக இருக்கும்.

இவ்வாறு இரு வளைகோடுகள் அணுகும் தன்மை பெற்றிருக்குமானால், கொடுக்கப்பட்ட x மதிப்புக்கியைந்த குத்தாயங்களின் வேறுபாடு, $x \longrightarrow \infty$ அணுகும்போது, பூச்சியத்தை அணுகும்.

இவ்வாறே y-ன் குறைப்படிகளில் x-ஐ விரித்து எழுதக் கூடுமானால், அணுகு வளைகோடுகளைக் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$ax^2y = x^4 + a^2 x^2 + a^4$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகு பரவளையத்திற்கு உச்சி $(0, a)$ எனவும் செவ்வகலம் a எனவும் நிறுவுக.

தீர்வு :

$$ax^2y = x^4 + a^2 x^2 + a^4$$

என வளைகோட்டுச் சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \quad y = \frac{x^2}{a} + a + \frac{a^3}{x^2}$$

எனவே அணுகு பரவளையம்

$$y = \frac{x^2}{a} + a$$

$$\therefore \quad y - a = \frac{x^2}{a}$$

அல்லது $y - a = \frac{1}{a}(x^2)$

$$x^2 = a(y - a)$$

ஆகும்.

இதன் உச்சி $(0, a)$

இதன் செவ்வகலம் $= a$

பயிற்சிகள் 13 (E)

1. $x = \frac{y^3 - a^3}{ay}$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகு நேர் கோடும், அணுகு பரவளையமும் காண்க.

2. $x^2y = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ என்ற புள்ளியில் உச்சியும், செவ்வகலம் 1 அலகு உடையதுமான அணுகு பரவளையம் உண்டு என நிறுவுக.

3. $y = \frac{x(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)}$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகு அதிபர வளைவு காண்க.

4. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

   (a) $y = e^{ax}$

   (b) $y = \sec x$

   (c) $y = \operatorname{cosec} x$

விடைகள் 13 (E)

1. $y = 0, \quad y^2 = ax$

3. $x(y - x) = 2a^2$

4. (a) $y = 0$

   (b) $x = \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots$

   (c) $x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots\ldots$

§ 13-7. $y = mx + c$ எனும் நேர்கோடு

$$y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \dots\dots$$ என்ற வளை

கோட்டின் அணுகுகோடு என நிறுவி அணுகுகோட்டைப் பொறுத்து வளைகோடு இடம் பெற்றுள்ள தன்மையினை ஆராய்தல்,

முதற்பகுதி :

$$y = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \dots\dots \qquad \dots (1)$$

என வளைகோட்டுச் சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ளது.

சமன்பாட்டின் இருபுறமும் x ஆல் வகுக்கவும்.

$$\frac{y}{x} = m + \frac{c}{x} + \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x^3} + \frac{C}{x^4} + \dots\dots$$

எனக்கிடைக்கும்.

$$x \longrightarrow \infty \text{ எனில் } Lt\frac{y}{x} = m.$$

மேலும் (1)-லிருந்து

$$y - mx = c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \dots\dots$$

$$x \longrightarrow \infty \text{ எனில் } lt\,(y - mx) = c$$

$$\therefore \quad y = mx + c \qquad \dots\dots (2)$$

என்பது (1)-ன் அணுகுகோடாகும்

வகை I :

$A \neq 0$

x என்ற ஏதேனும் ஒரு மதிப்பைப் பொறுத்து (1),(2)-லிருந்து கிடைக்கும் நிலைத்தூரங்கள் y_1, y_2 என்க.

$$\therefore \quad y_1 = mx + c + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \dots\dots$$

மற்றும் $y_2 = mx + c$.

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \dots\dots$$

$$\text{(அது)} \quad y_1 - y_2 = \frac{1}{x}\left(A + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \dots\dots\right) \qquad (3)$$

x போதிய அளவு பெரிதாக எடுத்துக் கொள்வதன் மூலம் $\frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} + \ldots\ldots$-ன் எண் மதிப்பு A-ஐ விட சிறிதாக இருக்கு மாறு செய்து விடலாம்.

அப்போது x-ன் போதிய அளவு பெரிய மதிப்புகளுக்கு, அடைப்புக் குறிக்குள் இருக்கும் கோவையின் குறியீடு A-ன் குறியீட்டைப் போன்றே இருக்கும்.

x, A என்பன ஒரே குறியீடு கொண்டிருந்தால் $y_1 > y_2$. (அது) வளைகோடு அணுகுகோட்டின் மேல்புறம் அமைந்திருக்கும்.

x, A என்பன மாறுபட்ட குறியீடுகள் கொண்டிருந்தால், வளைகோடு அணுகுகோட்டின் எதிர் முனைகளில் எதிர்ப்புறங்களில் அமைந்திருக்கும்.

வகை II

$$A = 0, \quad B \neq 0$$

இங்கே $y_1 - y_2 = \frac{1}{x^2}\left(B + \frac{C}{x} + \frac{D}{x^2} + \ldots\ldots\right)$

எனவே அணுகுகோட்டின் எதிர்முனைகளில் வளைகோடு ஒரே புறமாக அமைந்திருக்கும். B மிகையானால் அணுகுகோட்டுக்கு மேல்புறமாகவும் B குறையானால் அணுகுகோட்டுக்கு கீழ்ப்புற மாகவும் அமைந்திருக்கும்.

வகை III

$$A = B = 0, \quad C \neq 0$$

வகை I ஒத்த விவாதமே இங்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$(x - 1)\, y^2 = x^3$ என்ற வளைகோட்டின் சாய்ந்த அணுகுகோடு களைக் கண்டு, அவற்றைப் பொறுத்து வளைகோடு எவ்விதம் அமைந் துள்ளது என கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$y^2 = x^2 \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1}$$

$$y = \pm x\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1/2}$$

$$= \pm x\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{5}{16x^3} + \cdots\cdots\right]$$

(அ-து) $y = x\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{5}{16x^3} + \cdots\cdots\right]$

அல்லது $y = -x\left[1 + \frac{1}{2x} + \frac{3}{8x^2} + \frac{5}{16x^3} + \cdots\cdots\right]$

எனவே $y = x + \frac{1}{2}$ ...... (1)

அல்லது $y = -x - \frac{1}{2}$ (2) என்பன அணுகுகோடுகள்.

(a) $y = x + \frac{1}{2}$, $y = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + \cdots\cdots$

என்ற சமன்பாடுகள் (1) என்ற அணுகுகோட்டின் நிலைத்தூரத்தையும், அதற்கிணையந்த வளைகோட்டுக் கிளையையும் தரும்.

(b) இவ்வாறே (2) என்ற அணுகுகோடு, அதற்கிணையந்த வளைகோட்டுக்கிளை ஆகியவற்றின் நிலைத்தூரங்களை

$$y = -x - \tfrac{1}{2}, y = -x - \tfrac{1}{2} - \frac{3}{8x} - \cdots$$

என்பன தரும்

கிளை 1 :

($x \longrightarrow \infty$ எனில்) :

(அ) வளைகோட்டு நிலைத்தூரம் — அணுகுகோட்டு நிலைத்தூரம் = மிகை என்பது (a)-லிருந்து தெரிவதால், முதல் அணுகுகோட்டுக்கு மேற்புறம் வளைகோடு அமைந்துள்ளது.

(ஆ) (b) மூலம், வளைகோட்டு நிலைத்தூரம்—அணுகுகோட்டு நிலைத்தூரம் = குறை ஆதலால் இரண்டாம் அணுகுகோட்டுக்கு கீழ்ப்புறம் அணுகுகோடு உள்ளது.

கிளை 2 :

($x \longrightarrow \infty$ எனில்) :

முதல் அணுகுகோட்டுக்கு கீழ்ப்புறமும், இரண்டாம் அணுகுகோட்டுக்கு மேல்புறமும் வளைகோடு உள்ளது.

பயிற்சிகள் 13 (F)

1. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $y = \pm \frac{b}{a} x$ அணுகு கோடுகள் என நிறுவுக. வளைகோடு y அச்சின் வலப்புறத்தே $y = \frac{b}{a} x$ என்ற அணுகுகோட்டுக்கு கீழும், இடப்புறத்தே $y = \frac{b}{a}$ x-க்கு மேலும் மேலும் அமையுமென்றும் நிறுவுக. இதற்கு எதிர் மாறான அமைப்பை $y = -\frac{b}{a} x$-ஐப் பொறுத்து கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக $(a > 0,\ b > 0)$.

2. $(x - a)(x - b)\ y^2 = a^2 x^2$ $(a > 0,\ b > 0)$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் $x = a$, $x = \pm a$ என நிறுவுக $x = a$-க்கு வலப்புறமும், $x = b$-க்கு இடப்புறமும், $y = a$-க்கு y அச்சின் வலப்புறம் மேலும், இடப்புறம் கீழும், $y + a = 0$-க்கு y அச்சின் வலப்புறம் கீழும், இடப்புறம் மேலும் அமையுமென நிறுவுக.

3. $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற வளைகோடு, y அச்சின் இருபுறத்திலும், $x + y + a = 0$ என்ற அதன் அணுகுகோட்டுக்கு மேல் புறமாக இருக்கும் என நிறுவுக.

4. $y = \frac{x(x^2 + a^2)}{(x^2 - a^2)}$ என்ற வளைகோடு x-ன் பெரிய மிகை மதிப்புகளுக்கு அணுகுகோட்டிற்கு மேற்புறத்திலமையும் என நிறுவுக.

5. $(x - 3)(x - 2)\ y^2 - 9x^2 = 0$ என்ற வளைகோட்டின் அணுகுகோடுகள் கண்டு, ஒவ்வொரு அணுகுகோட்டின் எந்தப் பக்கத்தில் அதற்கிசைந்த வளைகோட்டின் பகுதி அமையும் என காண்க.

6. $x^n f_0\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} f_1\left(\frac{y}{x}\right) + \dots \dots = 0$

என்ற வளைகோட்டிற்கு, முடிவிலியில் அமையாது $y = mx$-க்கு இணையான இரு அணுகுகோடுகள் உண்டெனில், அவை $y = mx + c$ $\frac{c^2}{2} f_0''(m) + c f_1'(m) + f_2(m) = 0$ என்பனவற்றால் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

விடைகள் 13 (F)

5. $x = 3;$ வலப்புறம்

$x = 2;$ இடப்புறம்

$y = 3;$ மேல்புறம் முதல் வட்டப்பகுதி
கீழ்புறம் இரண்டாம் பகுதி

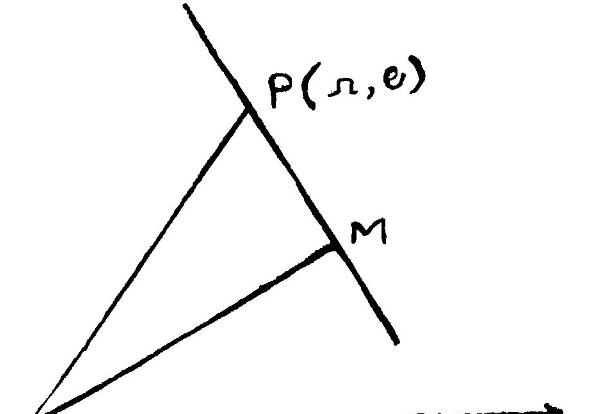
$y = -3;$ மேல்புறம் மூன்றும் வட்டப்பகுதி
கீழ்புறம் நான்காம் வட்டப்பகுதி.

§ 13-8 கோணதூர அமைப்பில் அணுகுகோடுகள்

கோணதூர அமைப்பில் நேர்கோட்டின் சமன்பாடு நமக்கு முதலில் தேவை.

கிளைத் தேற்றம் : ஒரு நேர்கோட்டின்மீது துருவ ஆதியிலிருந்து வரைந்த செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் p ; அச்செங்குத்துக்கோடு துவக்கக் கோட்டுடன் உண்டாக்கும் கோணம் α. நேர்கோட்டின் சமன் பாடாவது

$$p = r \cos (\theta - \alpha)$$



படம் 13·2

நிறுவல் :

O-லிருந்து நேர்கோட்டுக்கு வரைந்த செங்குத்துக்கோட்டின் பாதம் M. $OM = p$.

$\angle XOM = \alpha$. $P(r, \theta)$ என்பது நேர்கோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி.

$$\therefore \angle MOP = \theta - \alpha$$

மேலும் $\dfrac{OM}{OP} = \cos \angle MOP$

$$\therefore \frac{p}{r} = \cos (\theta - \alpha)$$

தேற்றம்: $\dfrac{1}{r} = f(\theta)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு. α என்பது $f(\theta) = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் ஒரு தீர்வு என்றால் வளைகோட்டின் ஒரு அணுகுகோடு

$$r \sin (\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

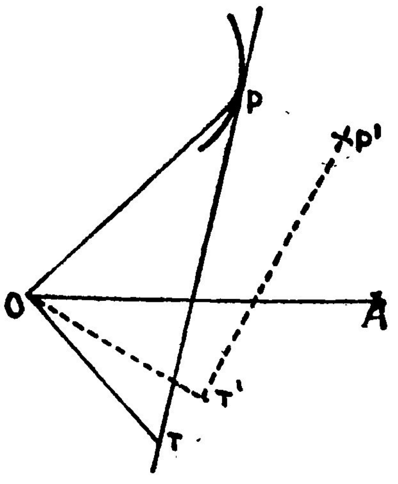
என அமையும்.

நிறுவல்:

வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{r} = f(\theta) \qquad \ldots\ldots (1)$$

P (r, θ) வளைகோட்டில் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. OP என்ற ஆரைவெக்டருக்கு O-ல் வரைந்த செங்குத்துக் கோடானது P-ல்



படம் 13·3.

தொடுகோட்டை T-ல் சந்திக்கிறது. எனவே OT என்பது கோணதூர தொடுகோட்டடி. எனவே

$$OT = r^2 \frac{d\theta}{dr}$$

இப்போது $\theta \longrightarrow \alpha$ ஆகச் செய்க.

α தீர்வு $\therefore\ f(\alpha) = 0$. எனவே $f(\theta) \longrightarrow 0$

$f(\theta)$ தொடர்ச்சியுள்ளதென எடுத்துக் கொள்வோம்.

$\therefore$ θ-ன் ஒரு புறம் அமைந்த α மதிப்புக்களை மட்டும் கருத சமன்பாடு (1) மூலம் $r \longrightarrow \infty$.

அதாவது PT $\longrightarrow$ அணுகுகோடு

$$OT \longrightarrow \left(r^2 \frac{d\theta}{dr}\right)_{\theta = \alpha}$$

மேலும் OP, PT என்பன இணைகோடுகளாக அணுகும். ஆகவே $\angle$OTP என்பது செங்கோணமாக அணுகும். (படத்தில் புள்ளிக் கோடுகளாக இது காட்டப்பட்டுள்ளது.)

ஆகவே அணுகுகோடு $\theta = \alpha$ என்ற ஆரைவெக்டருக்கு இணையான நேர்கோடு; O-விருந்து $\left[r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)\right]_{\theta = \alpha}$ தூரத்தில் அமைந்துள்ளது; $\theta = \alpha$ திசையில் ஆதியில் இருந்து பார்ப்பவருக்கு வலப்புறம் அமைந்துள்ளது.

எனவே அணுகுகோட்டின் மீது செங்குத்துக் கோடான OT′, $\theta = \alpha$ என்ற ஆரைவெக்டரோடு $\pi/2$ என்ற கோணத்தையும் அதனால் துவக்கக்கோட்டோடு $\alpha - \pi/2$ என்ற கோணத்தையும் உண்டாக்குகிறது. எனவே அணுகுகோட்டின் சமன்பாடு

$$r \cos\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \left[r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)\right]_{\theta = 2}$$

வளைகோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து $r^2 \frac{d\theta}{dr}$-க்கு பிரதியிட அணுகுகோட்டின் சமன்பாடு பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$r \sin(\theta - \alpha) = \frac{1}{f'(\alpha)}$$

செயல்முறை விதி :

1. சமன்பாட்டை $\frac{1}{r} = \theta$-ன் சார்பலனாக மாற்றி அமைத்து வலப்புறத்தை $f(\theta)$ எனக் குறிப்பிடுக.

2. $f(\theta)$-ஐ பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்தி தீர்வு காண்க. அவை $\theta = \lambda, \beta, \gamma, \ldots \ldots$

3. $f'(\theta)$ காண்க.

4. $\theta = \lambda, \beta, \gamma, \ldots$ முதலானவற்றில் $f'(\theta)$ மதிப்பு காண்க.

5. எனவே அணுகுகோடுகளாவன

$$r \sin(\theta - \lambda) = \frac{1}{f'(\lambda)},\; r \sin(\theta - \beta) = \frac{1}{f'(\beta)}, \ldots$$

§ 13-9. வட்ட அணுகுகோடுகள் :

வளைகோட்டின் சமன்பாடு $r = f(\theta)$ என இருந்து $\underset{\theta \to \infty}{\text{Lt}}\; f(0) = l$ எனில்

$r = f(\theta)$ என்ற வளைகோட்டுக்கு $r = l$ எனும் வட்டம் வட்ட அணுகுகோடு எனப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$r \sin n\theta = a$ என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகுகோடு காண்க ;

தீர்வு :

வளைகோட்டை

$$\frac{1}{r} = \left(\frac{1}{a}\right) \sin n\theta = f(\theta) \text{ என்க.}$$

m முழு எண் எனில் $n\theta = m\pi$ என்றால்

$$f(\theta) = 0$$

$$\therefore\; \theta = \frac{m\pi}{n}\; \lambda \text{ என்க.}$$

மற்றும் $f'(\theta) = \frac{1}{a} \cdot n \cdot \cos n\theta$

$$\therefore \quad f'(\lambda) = \frac{1}{a} . n . \cos m\pi$$

எனவே அணுகுகோடுகளாவன

$$r \sin\left(\theta - \frac{m\pi}{n}\right) = \frac{a}{n \cos m\pi}$$

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$r(e^{\theta} - 1) = a(e^{\theta} + 1)$. என்ற வளைகோட்டிற்கு அணுகு வட்டம் காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை

$$r = a \cdot \frac{(e^{\theta} + 1)}{(e^{\theta} + 1)} = f(\theta)$$

என எழுதலாம்.

$\theta \longrightarrow \infty$ என்ற எல்லையில்

$$\underset{\theta \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} f(\theta) = \underset{\theta \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \frac{a(e^{\theta} + 1)}{(e^{\theta} - 1)}$$

$$= \underset{\theta \longrightarrow \infty}{\text{Lt}} \frac{a(1 + e^{-\theta})}{(1 - e^{-\theta})}$$

$$= a$$

எனவே $r = a$ என்பது அணுகு வட்டம்.

பயிற்சிகள் 13 (G)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுகோடுகள் காண்க.

(a) $r\theta = a$

(b) $r \sin 2\theta = a$

(c) $r = a \operatorname{cosec} \theta + b$

(d) $r \cos \theta = a \sin \theta$

(e) $r \sin \theta = 2 \cos \theta$

(f) $r\, \theta \cos \theta = a \cos 2\theta$

(g) $r = a \sec \theta + b \tan \theta$

(h) $r\,(1 - \cos \theta) = a$

(i) $r \cos 2\,\theta = a \sin 3\,\theta$

2. $r = \dfrac{a}{\theta \sin \theta} + b$, என்ற வளைகோட்டிற்கு முடிவிலாத தொடரில் அமைந்த இணையான அணுகுகோடுகள் உண்டு என நிறுவுக. கோண ஆதியிலிருந்து அவற்றின் தூரங்கள் இசைத் தொடரில் அமைகின்றன என நிறுவுக. மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டிற்கு அணுகு வட்டம் காண்க.

3. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு அணுகுவட்டம் காண்க.

(a) $r\,(\theta - 1) = a\,\theta$

(b) $r = \dfrac{(a\theta + b)}{(\theta + e)}$

(c) $r = \dfrac{(\theta + \cos \theta)}{(\theta + \sin \theta)}$

(d) $r = \dfrac{2a}{1 - 2 \cos\theta}$

4. $r = a \sec m\theta + b \tan m\theta$ என்ற வளைகோட்டிற்கு இரண்டு தொகுதி அணுகுகோடுகள் இருக்கும் எனவும், முதல் தொகுதியைச் சேர்ந்த அணுகுகோடுகள் ஒரு நிலையான வட்டத்தைத் தொடும் எனவும், எஞ்சிய மற்றொரு நிலையான வட்டத்தைத் தொடும் எனவும் நிறுவுக.

விடைகள் 13 (G)

1. (a) $r \sin \theta = a$

(b) $r \sin \theta = \pm \dfrac{a}{2}$; $r \cos \theta = \pm \dfrac{a}{2}$

(c) $r \sin \theta = a$

(d) $r \cos\theta = \pm a$

(e) $r \sin\theta = 2$

(f) $r\cos\theta - r\sin\theta = \frac{a}{2}$

(g) $r\sin\theta = a$; $r\cos\theta = \frac{a}{(m+\frac{1}{2})\pi}$

(h) $r\cos\theta = a \pm b$

(i) அணுகுகோடுகள் இல்லை.

2. $y = \frac{a}{m\pi}$; இங்கே $m = 0, \pm 1, \pm 2$ ......

$r = b$.

3. (a) $r = a$

(b) $r = a$

(c) $r = 1$

(d) $r\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm \theta\right) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$

14. சிறப்புப் புள்ளிகள்

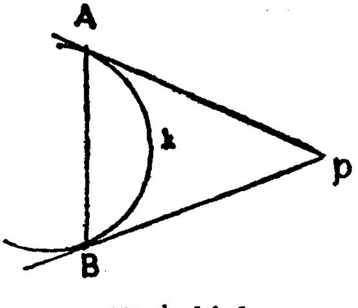
§ 14-0 அறிமுகம்

தளத்தில் வரையப்பட்ட வளைகோட்டின் பல புள்ளிகளில் உள்ள சிறப்புக்களை ஆராய்வது இப்பகுதியின் நோக்கம். இவ்வாறு சிறப்புக்களைப் பற்றி விரிவாக அறிதல் வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்பதற்கு முதல் படியாகும். வளைகோட்டின் சமன்பாடு $y = f(x)$ எனத் தரப்பட்டால் குவிப்பு, குழிவு முதலியன பற்றி முதலில் ஆராய்ந்து அதன்பின் வளைவு மாற்றப் புள்ளி பற்றி காண்போம். $f(x, y) = 0$ என்ற உட்படு சார்பாக (implicit) வளைகோட்டின் சமன்பாடு தரப்பட்டால் வளைகோட்டிற்குப் பல கிளைகளும், அவற்றிற்கு வெவ்வேறு வகையான சிறப்புப் புள்ளிகளும் இருக்கக்கூடும். இவற்றின் விளக்கம் பின்னர் தரப்படுகிறது.

§ 14-1 குவிப்பு (Convex), குழிவு (Concave)

(i) ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்துக் குழிவு, குவிப்பு

படத்தில் AKB வட்டவில் ஆகும். வட்டத்தின் உள் அமைந்த எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் அது குழிவுடையது ஆகும். P-லிருந்து வரைந்த தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் (chord of contact) P இவற்றிற்கிடையே அமைந்துள்ள வில்லான AKB ஆனது, P எனும் புள்ளிக்குக் குவிப்பு உடையதாகும். வட்டத்தின் எஞ்சிய பகுதி P-ஐப் பொறுத்துக் குழிவு உடையதாகும்.

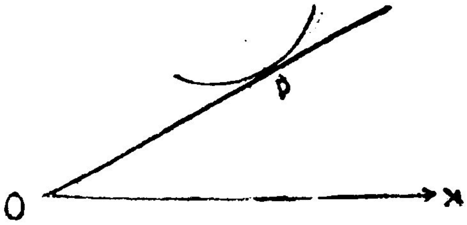


படம் 14·1

(ii) ஒரு நேர்கோட்டைப் பொறுத்துக் குவிப்பு, குழிவு :

வளைகோட்டில் P எனும் புள்ளி தரப்பட்டுள்ளது. P வழி செல்லாத OX எனும் நேர்கோடும் தரப்பட்டுள்ளது.

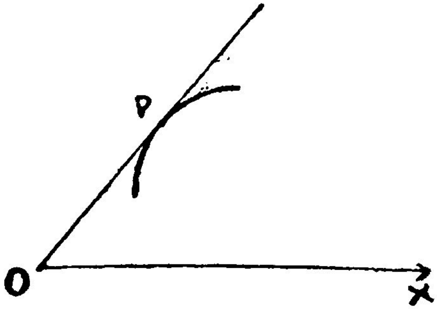
P-ல் தொடுகோடும், OX-ம் உண்டாக்கும் குறுங்கோணத்திற்குள் P அடங்கிய மிகச்சிறிய வில்லானது முற்றிலும் உள்ளே அல்லது புறம்பாக அமைந்திருப்பதைப் பொறுத்து வளைகோடு OX-ஐப் பொறுத்து P-ல் குழிவு அல்லது குவிப்பு உடையது எனக் கூறுகிறோம்.



படம் 14·2

[OX-ஐப் பொறுத்துக் குவிப்பு]

மேலே உள்ள படத்தில் P-ல் வளைகோடு, மேன்முகக் குழிவு (concave upwards) உடையதாகவோ அல்லது கீழ்முகக் குவிப்பு (convex downwards) உடையதாகவோ கருதப்படும். கீழேயுள்ள படத்தில் வளைகோடானது P-ல் கீழ்முகக் குழிவு (concave downwards) உடையதாவோக அல்லது மேன்முகக் குவிப்பு (convex upwards) உடையதாகவோ கருதப்படும்.



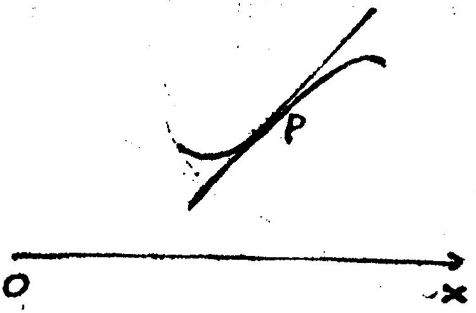
படம் 14·3

[OX-ஐப் பொறுத்துக் குழிவு]

(iii) வளைவு மாற்றப் புள்ளி (Points of Inflextion)

OX என்ற நேர்கோட்டைப் பொறுத்து வளைகோட்டில் P-ன் ஒருபுறம் குழிவாகவும், P-ன் மறுபுறம் குவிப்பாகவும் இருந்தால் P-ல் தொடுகோடு வளைகோட்டின் குறுக்காகச் செல்லும். அத்தகைய புள்ளிகளை வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் எனக் கூறுகிறோம்.

குறிப்பு 1: ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்து தொடுகோடு குவிப்பு அல்லது குழிவு பெற்றிருப்பது வளைகோட்டிற்கே உரித்தான தன்மையல்ல. அச்சுக்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதைப் பொறுத்தே



படம் 14·4

இவை தீர்மானமாகின்றன. மேல்புறம், கீழ்புறம் y அச்சின் மிகைத் திசை, y அச்சின் குறைத் திசை முதலானவை மரபுப்படி தீர்மானிக்கப்படுகின்றன. இவற்றைப் பொறுத்து வளைகோட்டின் குவிப்பும் குழிவும் தீர்மானமாகின்றன. ஆனால் வளைகோட்டின் தொடுகோடு வளைகோட்டின் குறுக்காகச் செல்லும் தன்மையானது. எவ்விதத்திலும் அச்சுக்களின் தேர்வைச் சார்ந்து அமைந்திருப்பதில்லை. எனவே வளைவு மாற்றப் புள்ளியானது வளைகோட்டைப் பொறுத்ததே ஆகும்.

குறிப்பு 2: வளைவு மாற்றப் புள்ளியானது பெருமத்திற்கும் சிறுமத்திற்கும் இடை அமைவதாகும்.

§ 14-2. குவிப்பு, குழிவு ஆராயும் முறை

இப்போது x அச்சைப் பொறுத்துக் குவிப்பு அல்லது குழிவு பற்றி ஆராய்வோம்.

$y = f(x)$ என்ற வளைகோட்டில் $P\,[x, f(x)]$ என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. அதற்கண்மையில் $Q\,[x+h], f(x+h)]$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம்.

P-ல் வரையப்பட்ட தொடுகோட்டை Q-லிருந்து வரையும் நிலைத்தூரம் Q'-ல் சந்திக்கிறது. தொடுகோட்டின் சமன்பாடாவது

$Y - y = f'(x)(X - x)$ எனக்கிடைக்கும்

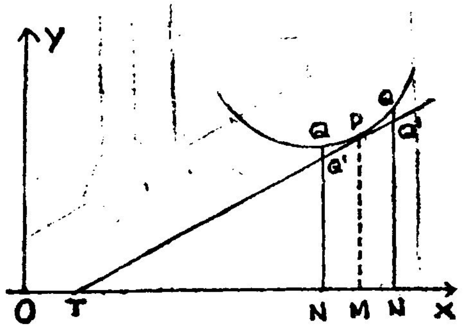
Q-ல் $X = (x + h)$ பிரதியிட,

$NQ' = y + f'(x)h$ என வரும்.

$0 < \theta < 1$ எனில் டெய்லர் தேற்றத்தின்படி,

$$NQ = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \dots\dots$$

$$\dots + \frac{1}{(n-1)!}h^{n-1} f^{(n-1)}(x) + \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x+\theta h)$$

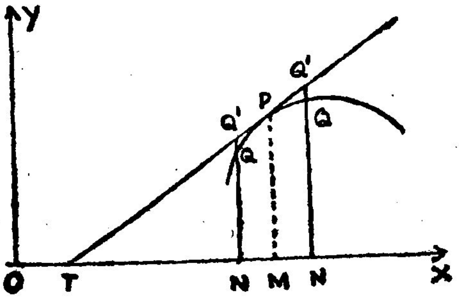


படம் 14.5

எனவே கழிப்பதன் மூலம்,

$$NQ - NQ' = \frac{1}{2!}h^2 f''(x) + \frac{1}{3!}h^3 f'''(x) + \dots\dots$$

$$+ \frac{1}{n!}h^n f^{(n)}(x+\theta h)$$

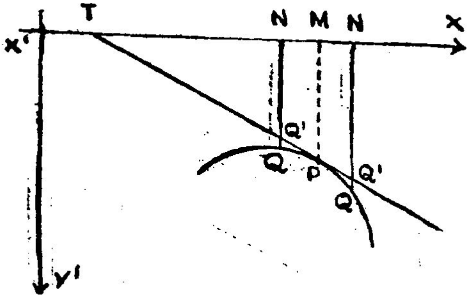


படம் 14·6

இங்கே $f''(x) \neq 0$ எனில் h-ஐ மிகச் சிறியதாக எடுத்துக்கொண்டால் h மிகையாக இருந்தாலும் அல்லது குறையாக இருந்தாலும் வலப்பக்கத்தின் குறியீடு $f''(x)$ குறியீட்டையே கொண்டிருக்கும்.

$f''(x) > 0$ எனில் x அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு P-ல் குவிப்புக் கொண்டிருக்கும். $f''(x) < 0$ எனில் x அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு P-ல் குழிவு கொண்டிருக்கும்.

நாம் மேலே வரைந்த படங்களில் வளைகோடானது x அச்சுக்கு மேற்புறத்திலிருக்கிறது. அதற்கு மாறாக x அச்சுக்குக் கீழ்புறம் வளைகோடு இருப்பின் NQ, NQ' இரண்டுமே குறை எண்கள்.



படம் 14·7

எனவே,

$$NQ - NQ' = -\{|NQ| - |NQ'|\}$$

எனவே, இங்கே x அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு குவிப்பு உடையது எனில் $|NQ| - |NQ'|$ மிகையாக இருக்கவேண்டும். அதாவது $NQ - NQ'$ குறை. அதாவது $f''(x)$ குறை.

இவ்வாறே வளைகோடு x அச்சைப் பொறுத்து P–ல் குழிவு கொண்டிருக்க $f''(x)$ மிகையாக இருக்கவேண்டும்.

மேற்கூறிய இருவகைகளுக்கும் பொதுமைப்படுத்தி நிபந்தனையைப் பின் வருமாறு கூறலாம்.

P-ல் $\boxed{y\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ மிகை அல்லது குறையாக இருப்பதைப் பொறுத்து x அச்சுக்கு P-ல் வளைகோடு குவிப்பு அல்லது குழிவு பெற்றிருக்கிறது.

குறிப்பு : $f(x)$-க்கு மேல் வரிசை வகையீட்டுக் கெழுக்கள் இல்லாதபோது h^2 வரும் உறுப்போடு டெய்லர் விரிவை நிறுத்திக் கொள்ளலாம். $f''(x)$ உளதாகி எடுத்துக் கொண்ட புள்ளியில் தொடர்ச்சியானதாக இருத்தலே அவசியமானது. அப்போது,

$$NQ = f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2!}h^2 f''(x+\theta h)$$

எனவே,

$$NQ - NQ' = \frac{1}{2!} h^2 f''(x + \theta h)$$

இங்கே $f''(x) \neq 0$ எனில், h-ஐ மிகச் சிறியதாக எடுத்துக் கொள்ள, $f(x)$-ன் இரண்டாம் வரிசை வகையீட்டுக்கெழு தொடர்ச்சி உடையதாதலால் h மிகையாக இருந்தாலும், குறையாக இருந்தாலும் $f''(x)$-ன் குறியீடுதான் வலப்பக்கத்தின் குறியீடாக இருக்கும்.

எனவே $f(x)$-ன் மூன்றும் வரிசை, அதற்கு மேற்பட்ட வரிசை வகையீட்டுக்கெழுக்கள் இல்லாவிடினும் மேற்கூறிய முடிவு உண்மையே.

§ 14-7. வளைவு மாற்றப் புள்ளி ஆராயும் முறை

முன்பகுதியில் கண்ட ஆராய்வில் $f''(x)$ பூச்சியமாக இருந்து $f'''(x)$ பூச்சியமாக இலலாவிடில்

$$NQ - NQ' = \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \frac{h^4}{4!} f^{iv}(x) + \ldots\ldots$$

$$+ \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x + \theta h).$$

x-ன் மதிப்புகள் போதிய அளவு குறைந்திருப்பின் $h^3 f'''(x)$-ன் குறியீடுதான் வலப்பக்கத்தின் குறியீடும் ஆகும். h குறியீட்டை மாற்ற, வலப்பக்கக் குறியீடும் மாறும். எனவே x அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு P-ல் ஒருபுறம் குவிப்பும் மறுபுறம் குழிவும் கொண்டு விளங்குகிறது.

எனவே P வளைவு மாற்றப் புள்ளியாக இருக்க

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \; ; \quad \text{ஆனால்} \; \frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$$

குறிப்பு 1 : y அச்சைப் பொறுத்து குவிப்பு, குழிவு காணல் :

y-ஐ சாரா மாறியாகக் கருதி, y அச்சைப் பொறுத்து P-ல் வளைகோடு, பின்வருமாறு அமையும் என நிறுவலாம்.

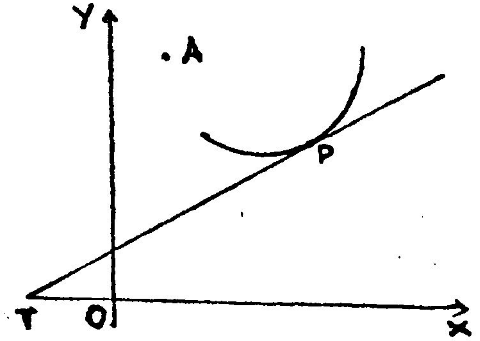
$x \frac{d^2x}{dy^2}$ மிகை எனில் குவிப்பு உடையது.

$x \frac{d^2x}{dy^2}$ குறை எனில் குழிவு உடையது.

$\frac{d^2x}{dy^2} = 0$: ஆனால் $\frac{d^3x}{dy^3} \neq 0$ எனில் வளைவு மாற்றப் புள்ளி உடையது.

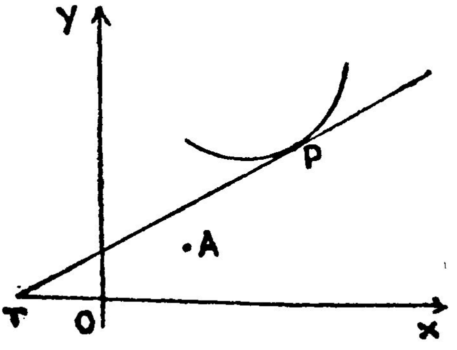
குறிப்பு 2 : ஒரு புள்ளியைப் பொறுத்துக் குவிப்பு, குழிவு காணல் :

வளைகோட்டில் P எனும் புள்ளி தரப்பட்டுள்ளது. PT தொடுகோடு கொடுக்கப்பட்ட புள்ளியான A ஐப் பொறுத்து வளை



படம் 14·8

கோடு குழிவு உடையதா அல்லது குவிப்பு உடையதா என்பது P-ன் அண்மையில் தொடுகோடு PT-ஐப் பொறுத்து A-அமைந்



படம் 14·9

துள்ள புறத்திலேயே வளைகோட்டுப்பகுதி முற்றிலும் அமைந்துள்ளதா, இல்லையா என்பதைப் பொறுத்தது.

படம் (i)-ல் வளைகோடு A-ஐப் பொறுத்து P-ல் குழிவு உடையது.

படம் (ii)-ல் வளைகோடு A-ஐப் பொறுத்து P-ல் குவிப்பு உடையது.

முன்பகுதிகளில் கண்ட முடிவினைப் பயன்படுத்தி, பின்வரும் உண்மை தெளிவாகிறது.

வளைகோட்டில், P ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. P-ன் நிலைத்தூரத்தின் பாதம் M. M-ஐப் பொறுத்து P-ல் வளைகோட்டின் குவிப்பு அல்லது குழிவு இருப்பது

$y \frac{d^2y}{dx^2} > 0$ அல்லது < 0 ஆக இருப்பதைப் பொறுத்தது.

குறிப்பு 3 : $f^{(n)}(x) \neq 0$ ஆக இருந்து, அதற்கு முந்திய வரிசை வகையீட்டுக் கெழுக்கள் யாவும் பூச்சியமாக இருந்தால் n ஒற்றைப் படையாக இருக்கும்போது ஒரு வளைவு மாற்றப் புள்ளி கிடைக்குமென்பது NQ − NQ' மதிப்பிலிருந்து தெரிய வருகிறது. ஆனால் n இரட்டைப் படையாக இருக்கும்போது வளைகோடு தொடுகோடுக்குக் குறுக்கே செல்லாது. $n > 2$ ஆகவும், n இரட்டைப் படையாக இருக்கும் போது கிடைக்கும் இத்தகைய புள்ளியை அலைப்புள்ளி (point of undulation) எனக் கூறுகிறோம். தோற்றத்தில் அலைப்புள்ளி சாதாரணப் புள்ளி போல காணப்படும்.

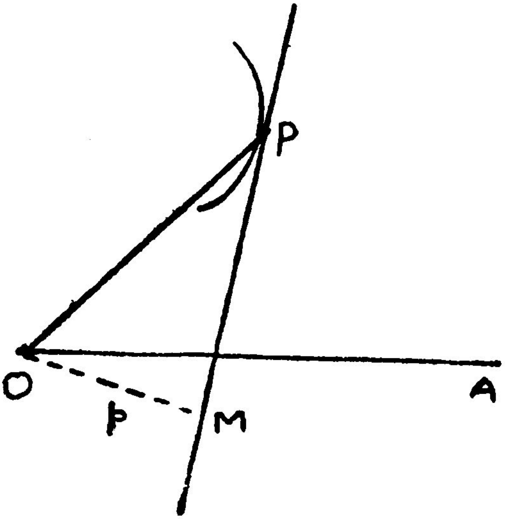
§ 14–41. கோண ஆதியைப் பொறுத்துக் குவிப்பு அல்லது குழிவு :

வளைகோட்டில் P என்பது ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. p என்பது கோண ஆதியிலிருந்து P-ல் தொடுகோட்டுச் செங்குத்துக்கோடு. வளைகோடு கோண ஆதியைப் பொறுத்து, P-ல் குழிவு உடையதாக இருந்தால், p அதிகரிக்க, r அதிகரிக்கும் என்ற உண்மை, படங்களிலிருந்து புலனாகிறது.

அதாவது P-ல் $\frac{dp}{dr}$ மிகையெனில், கோண ஆதியைப் பொறுத்து வளைகோடு P-ல் குழிவு உடையது.

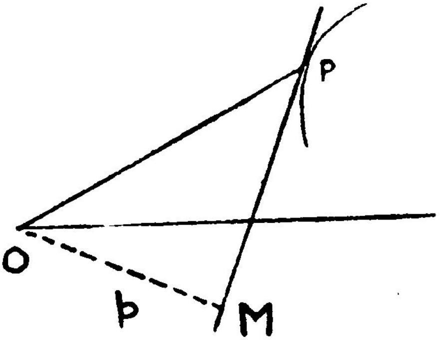
இவ்வாறே P-ல் $\frac{dp}{dr}$ குறை எனில் கோண ஆதியைப் பொறுத்து வளைகோடு P-ல் குவிப்பு உடையது.

P-ல் $\frac{dp}{dr}$ பூச்சியமாக இருந்து P-ன் ஒரு புறம் அமைந்த புள்ளிகளுக்கு $\frac{dp}{dr}$ மிகையாகவும், மறுபுறம் அமைந்த புள்ளிகளுக்கு $\frac{dp}{dr}$ குறையாகவும் இருப்பின், P வளைவு மாற்றப் புள்ளி ஆகும்.



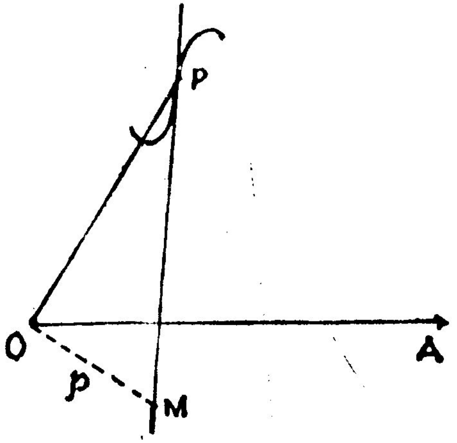
[O ஐப் பொறுத்து, வளைவுகோடு P-ல் குழிவு உடையது]

படம் 11·10



[O-ஐப் பொறுத்து P-ல் வளைகோடு குவிப்பு உடையது]

படம் 14 11



[P வளைவு மாற்றப் புள்ளி]
படம் 14·12

§ 14-4·2. $r = f(\theta)$ எனும் வளைகோட்டில் P (r, θ) எனும் புள்ளியில் குவிப்பு, குழிவு காண நிபந்தனைகள் :

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$$ என அறிவோம்.

இருபுறமும் r-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^4}\cdot 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)\left(\frac{d^2r}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dr}\right)$$

அல்லது

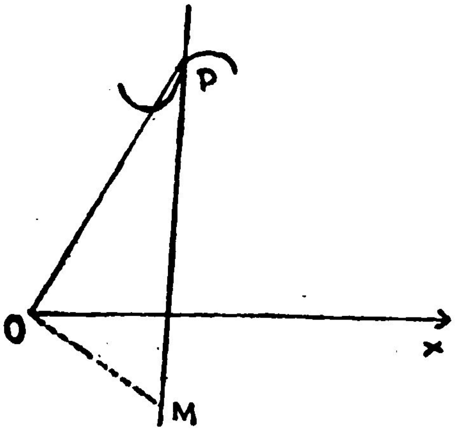
$$\frac{r^5}{p^3}\cdot\frac{dp}{dr} = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

அல்லது $$\frac{dp}{dr} = \frac{p^3\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]}{r^5}$$

இப்போது,

$\frac{dp}{dr}$-ன் குறியீடும் $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}$-ன் குறியீடும் ஒன்று தான்.

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} \gtrless 0$$ என அமைவதற்



படம் 14·13.

கேற்ப P (r, θ)-ல் வளைகோடு கோண ஆதியைப் பொறுத்து குழிவு அல்லது குவிப்பு உடையது.

குறிப்பு : P-ல் ஒரு புறத்தில் உள்ள புள்ளிகளுக்கு $r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}$ மதிப்பு மிகையாகவும், மறுபுறத்தில் உள்ள புள்ளிகளுக்கு குறையாகவும், P-ல் மதிப்பு பூச்சியமாகவும், இருந்தால் P வளைவு மாற்றப்புள்ளி ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1:

$x^3 = y^3 = 3ax^2 = 0$ என்ற வளைகோடு x அச்சுக்கு எல்லாப் புள்ளிகளிலும் குழிவு உடையது என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$x^3 + y^3 + 3ax^2 = 0 \qquad \ldots (1)$$

$$\therefore\ 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} + 6ax = 0$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(2ax + x^2)}{y^2} \qquad \ldots (2)$$

மேலும்
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left[2(a+x)y^2 - 2(2ax+x^2)y\dfrac{dy}{dx}\right]}{y^4}$$

$$= \frac{-[2(a+x)y^3 + 2(2ax+x^2)^2]}{y^5} \qquad (2) \text{ மூலம்}$$

$$= \frac{-[2(a+x)(-3ax^2 - x^3) + 2(2ax+x^2)^2]}{y^5}$$

(1) மூலம்

$$= -\frac{2a^2x^2}{y^5}$$

$$\therefore \quad y\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2a^2x^2}{y^4}$$

$\frac{x^2}{y^4}$ எப்போது மிகையாதலால்

$y\frac{d^2y}{dx^2}$ எப்போதுமே குறை

எனவே x அச்சுக்கு வளைகோடு எப்போதுமே குழிவு உடையது.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y = c\sin\frac{x}{a}$ என்ற சைன் வளைகோடு x அச்சை சந்திக்கும் ஒவ்வொரு புள்ளியும் வளைவுமாற்றப்புள்ளி என நிறுவுக.

தீர்வு

$$y = c\sin\frac{x}{a}$$

x அச்சான $y = 0$-ஐ இது சந்திக்கும் புள்ளிகள்

$\sin\frac{x}{a} = 0$ என்பதிலிருந்து கிடைக்கிறது.

அது $\frac{x}{a} = n\pi$: n மிகை, குறை முழு எண் அல்லது பூச்சியம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{c}{a} \cos \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{c}{a^2} \sin \frac{x}{a}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{c}{a^3} \cos \frac{x}{a}$$

எனவே வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளில்

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \text{ (அது) } \sin \frac{x}{a} = 0 \text{ (அது) } x = na\pi$$

$x = na\pi$ எனில்

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{c}{a^3} \cos n\pi = (-1)^n \frac{c}{a^3} \neq 0$$

$\therefore$ $x = an\pi$ வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைத் தரும். இப் புள்ளிகளே வளைகோட்டை x அச்சு வெட்டும் புள்ளிகளுமாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$r(\theta^2 - 1) = a\theta^2$ என்ற வளைகோட்டிற்கு $\left(\frac{3a}{2}, \sqrt{3}\right)$, $\left(\frac{3a}{2}, -\sqrt{3}\right)$ என்பன வளைவுமாற்றப் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$r = \frac{a\theta^2}{\theta^2 - 1}$$

எனவே
$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{a[(\theta^2 - 1)2\theta - \theta^2 \cdot 2\theta]}{(\theta^2 - 1)^2}$$

$$= -\frac{2a\theta}{(\theta^2 - 1)^2}$$

$$\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{-2a[(\theta^2 - 1)^2 \cdot 1 - \theta \cdot 2(\theta^2 - 1) \cdot 2\theta]}{(\theta^2 - 1)^4}$$

$$= \frac{2a(3\theta^2 + 1)}{(\theta^2 - 1)^3}$$

$$r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = P \text{ என்க.}$$

$$\text{எனவே } P = \frac{a^2\theta^4}{(\theta^2-1)^2} + \frac{8a^2\theta^2}{(\theta^2-1)^4} - \frac{2a^2\theta^2(3\theta^2+1)}{(\theta^2-1)^4}$$

$$= \frac{a^2\theta^2(\theta^2-3)(\theta^2+2)}{(\theta^2-1)^4}$$

வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளுக்கு

$$P = r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} = 0$$

$$(\text{அது})\quad \theta^2(\theta^2-3)(\theta^2+2) = 0$$

$$\theta^2 = 0,\ 3,\ -2$$

$\theta^2 = -2$, $\theta^2 = 0$ எனும் மதிப்புகளைப் புறக்கணிக்க

$$\theta^2 = 3 \quad \therefore\ \theta = \pm\sqrt{3} \quad \therefore\ r = \frac{3a}{2}$$

3-ஐ விட θ^2 சற்று அதிகமாக இருக்கும்போது P மிகை; θ^2 ஆனது 3-ஐ விட சற்று குறைவாக இருக்கும்போது P குறை. எனவே $\left(\frac{3a}{2}, \sqrt{3}\right)$; $\left(\frac{3a}{2}, -\sqrt{3}\right)$ என்பன வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள்.

பயிற்சிகள் 14 (A)

1. $y = e^x$ என்ற வளைகோடு எல்லாப் புள்ளிகளிலும் மேல் முகக் குழிவு உடையது என நிறுவுக.

2. $y = \log x$ என்ற வளைகோடு முழுவதும் மேன்முகக் குழிவு உடையதா அல்லது மேன்முக குவிப்பு உடையதா எனக் கண்டு பிடிக்கவும்.

3. $y = (\cos x + \sin x)\, e^x$ என்ற வளைகோட்டில் x ஆனது $(0, \pi)$ என்ற இடைவெளியில் மாற்றம் பெறும்போது எந்த இடைவெளிப் பகுதிகளில், மேன்முகக் குழிவும், எந்த இடைவெளிப் பகுதிகளில் மேன்முக குவிப்பும் இருக்கும் எனக் கண்டு பிடிக்கவும்.

4. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைக் காண்க.

(a) $y = 3x^4 - 4x^3 + 1$

(b) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$

(c) $y(a^2 + x^2) = a^2 x$

(d) $y(a^2 + x^2) = x^3$

(e) $y = \frac{1}{h\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{h^2}}$

(f) $x = a(2\theta - \sin\theta)$

$y = a(2 - \cos\theta)$

(g) $y = (x - 2)^6 (x - 3)^5$

(h) $x = 2a \cot\theta,\ y = 2a \sin^2\theta$

(i) $x = (\log y)^3$

5. $y^2 + f(x)$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் $\{f'(x)\}^2 + 2\{f(x)\}\{f''(x)\}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் என நிறுவுக.

6. $y^2 = (x - a)^2 (x - b)$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளை இணைக்கும் நேர்கோடுகள் $3x + a = 4b$ என்ற நேர்கோட்டில் அமையும் என நிறுவுக.

7. a மாறும்போது $y(a^2 + x^2) = 2x^3$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளின் நியமப்பாதை $y = \frac{1}{2}$ என்ற நேர்கோடு என நிறுவுக.

8. $r = b\theta^m$ என்ற வளைகோட்டிற்கு

$r = b\left\{-m(m+1)\right\}^{\frac{m}{2}}$ எனும் சமன்பாட்டால் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் கிடைக்கும் என நிறுவுக.

விடைகள் 14 (A)

2. மேன்முகக் குவிப்பு

3. மேகமுகக் குழிவு $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

கீழ்முகக் குவிப்பு $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

4. (a) $(0, 1)\,;\ \left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{11}{27}\right)$

(b) $x = 0,\ \ x = \pm a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ எனும்போது

(c) $(0, 0)\,;\ \left(a\sqrt{3},\ \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)\ ;\ \left(-a\sqrt{3},\ \dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)$

(d) $x = 0\,;\ \ x = \pm a\sqrt{3}$ எனும்போது

(e) $x = \pm \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ எனும்போது

(f) $\left\{ a\left(4n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \ \dfrac{3a}{2} \right\}$

(g) $x = 3,\ \ \dfrac{(28 + \sqrt{3})}{11}$-ல் வளைவு மாற்றப்புள்ளி,

$x = 2$-ல் அலைப்புள்ளி.

(h) $\left(\pm \dfrac{2a}{\sqrt{3}},\ \dfrac{3a}{2}\right)$

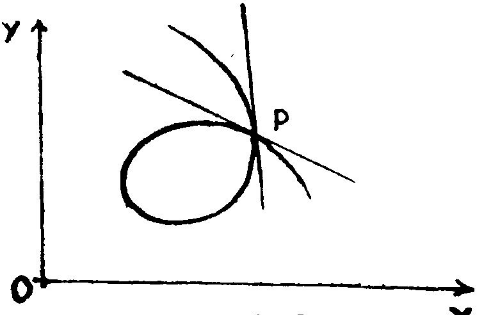
(i) $(0, 1).\ (8, e^{2})$

§ 14-51. சிறப்புப் புள்ளிகள் (Singular points)

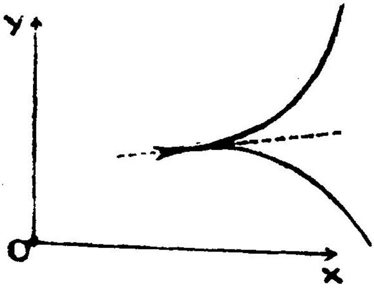
ஒரு வளைகோட்டின் இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட கிளைகள் சந்திக்கும் புள்ளிகளில் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளல்லாது வேறு வகையான சிறப்புப் புள்ளிகள் இருக்கலாம். ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வளைகோட்டுக் கிளைகள் செல்கின்ற புள்ளி வளைகோட்டிற்கு மடங்குப்புள்ளி (Multiple points) ஆகும். குறிப்பாக ஒரு புள்ளி வழியே வளைகோட்டின் இரு கிளைகள் செல்லுமானால் அது இரட்டைப்புள்ளி (Double point), மூன்று கிளைகள் ஒரு புள்ளிவழியே சென்றால் அது மும்மடிப்புள்ளி (Triple point) எனப்படும். பொதுவாக ஒரு புள்ளி வழியே வளைகோட்டின் r கிளைகள் சென்றால் அப் புள்ளி r வரிசையில் அமைந்த மடங்குப்புள்ளி (Multiple points of r-th order) எனப்படும். மடங்குப்புள்ளிகள் சிறப்புப் புள்ளிகள் எனவும் அழைக்கப்படும்.

பொதுவாக வளைகோட்டின் இரட்டைப் புள்ளியில் கிளைக்கு ஒன்றாக இரு தொடுகோடுகள் வரையலாம். இத் தொடுகோடுகள் மெய்யாகவும், வெவ்வேறானதாகவும் இருக்கும்போது இரட்டைப் புள்ளி, கணுப்புள்ளி (Node) என அழைக்கப்படும் (படம் i) இத் தொடுகோடுகளும் மெய்யாகவும், ஒன்றியனவாகவும் இருப்பின் இரட்டைப்புள்ளி, கூர்ப்புள்ளி (Cusp) என அழைக்கப்படும். (படம் ii). இரு தொடுகோடுகளும் கற்பனை எனில் இரட்டைப் புள்ளி, தனிப்புள்ளி (Isolated point or conjugate point) என அழைக்கப்படும் (படம் iii).

குறிப்பு : கற்பனைத் தொடுகோடு என்பதற்கு விளக்கம் தருவோம். வளைகோட்டில் தனிப்புள்ளியின் அண்மையில் வளைகோட்டின் மெய்யான புள்ளிகள் ஏதும் இராது. எனவே மெய்

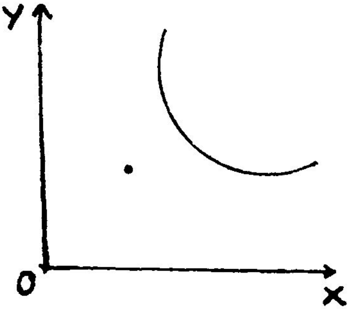


(i) கணுப்புள்ளி



கூர்ப்புள்ளி

(ii)



தனிப்புள்ளி

(iii)

படம் 14·14

யான அணுகுகோடுகளும் வரை முடியாது. ஆனல் தனிப்புள்ளியின் தொடுகோட்டைக் கண்டுபிடிக்கும் செயல்முறையைப் பயன்

படுத்தினால் $a + ib$ போன்ற கற்பனை எண்களைக் கொண்ட சமன் பாடு ஒன்று கிடைக்கும். இதனாலேயே கற்பனை தொடுகோடு எனக் கூறுகிறோம்.

வளைகோட்டின் தனிப்புள்ளிக்கு வேறுவிதமாகவும் விளக்கம் தரலாம். வளைகோட்டில் எந்தப்புள்ளிக்கு அண்மையில் வளை கோட்டின் வேறு மெய்யான புள்ளிகள் இல்லையோ அது தனிப் புள்ளியாகும்.

§ 14-5·2. ஆதியானது கணுப்புள்ளி, கூர்ப்புள்ளி, தனிப்புள்ளி எனப் பாகுபாடு செய்ய செயல்முறை விதி :

(1) வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் தொடுகோடு காண சமன் பாட்டில் மிகக்குறைந்தபடியில் உள்ள உறுப்புகளைப் பூச்சியத் தோடு சமன்படுத்துக.

(2) இவ்வாறு பூச்சியத்தோடு சமன்படுத்துவதால் கிடைக் கும் சமன்பாட்டின் இடப்பக்கத்தைக் காரணிப்படுத்துக.

(3) (i) இரு தொடுகோடுகளும் கற்பனையானால் ஆதி, தனிப் புள்ளியாகும்.

(ii) இரு தொடுகோடுகளும், மெய்யாகவும், வெவ் வேறானவையாகவும் இருப்பின், ஆதி, கணுப்புள்ளி அல்லது தனிப் புள்ளியாகும்.

திட்டவட்டமாக அறிய வேண்டுமானால் ஆதிக்கு அண்மையில் வளைகோட்டின் தன்மையை ஆராய்க. வளைகோட்டிற்கு ஆதி வழியே மெய்யான கிளைகள் இருந்தால் ஆதி கணுப்புள்ளியாகும். இல்லாவிடில் ஆதி தனிப்புள்ளியாக இருக்கும்.

(iii) இரு தொடுகோடுகளும் மெய்யாகவும், ஒன்றியன வாகவும் இருப்பின், ஆதி கூர்ப்புள்ளியாகவோ தனிப்புள்ளி யாகவோ இருக்கும்.

திட்டவட்டமாக அறிய வேண்டுமானால் ஆதிக்கு அண்மை யில் வளைகோட்டின் தன்மையை ஆராய்க. வளைகோட்டிற்கு ஆதி வழியே மெய்யான கிளைகள் இருந்தால் ஆதி கூர்ப்புள்ளி யாகும். இல்லாவிடில் ஆதி தனிப்புள்ளியாகும்.

குறிப்பு 1 : ஆதிக்கு அண்மையில் வளைகோட்டின் தன்மையை ஆராயும் விதம் :

ஆதியில் தொடுகோடுகள் $y^2 = 0$ என வந்தால் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில், y-ன் இரண்டாம்படி, மற்றும் அதற்கும் மேற்பட்ட படிகளில் உள்ள y உறுப்புகளைப் புறக்கணித்துவிட்டு, y-க்கு தீர்வு காண்க. x-ன் சிறு மதிப்புகளுக்கு, y மதிப்புகள் மெய்யாக இருக்குமானால் ஆதி வழிசெல்லும் வளைகோட்டின் கிளைகள் மெய்யானவை. இல்லாவிடில் கற்பனையானவை.

ஆதியில் தொடுகோடுகள் $x^2 = 0$ என அமைந்தால் முன்பு கூறிய வழியில் x-க்கு தீர்வு காண்க.

குறிப்பு 2 : ஆதியில்லாத வேறு புள்ளியில் இரட்டைப்புள்ளி இருப்பின் அவற்றின் தன்மையை ஆராய ஆதியை அப்புள்ளிக்கு மாற்றி, முன்பு கூறிய செயல்முறையைக் கையாள்க.

§ 14-6. வளைகோட்டில் இரட்டைப் புள்ளிகளைக் காணல் ;

கொடுக்கப்பட்ட வளைகோட்டின் சமன்பாடு விகிதமுறு இயற்கணித சார்பலனாக அமைந்துள்ளது என்க. (h, k) என்ற வளைகோட்டுப்புள்ளி இரட்டைப்புள்ளி என்று எடுத்துக்கொள்க. ஆதியை (h, k) எனும் புள்ளிக்கு மாற்றுக.

புதிய ஆதி இரட்டைப் புள்ளியாக இருக்கவேண்டுமெனில் மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் மாறிலி உறுப்பும், முதல் படி உறுப்பும் இருக்க முடியாது. எனவே மாற்றியமைக்கப்பட்ட சமன்பாட்டில் உள்ள மாறிலி உறுப்பு, x-ன் கெழு, y-ன் கெழு ஆகியவற்றைப் பூச்சியத்தோடுத் தனித்தனியே சமன்படுத்தி, மூன்று சமன்பாடுகளைப் பெறலாம்.

இம் மூன்று சமன்பாடுகளில், இரண்டினைத் தீர்வு கண்டு, h, k மதிப்புக்களைப் பெறலாம். இவ்வாறு பெற்ற h, k மதிப்புகள், எஞ்சிய சமன்பாட்டையும் நிறைவு செய்தால் (h, k) என்பது இரட்டைப் புள்ளியாகும். இவ்வாறு சமன்பாடுகள் மூன்றையும் நிறைவு செய்யக் கூடிய h, k மதிப்புகள் ஏதும் கிடைக்காதெனில் வளைகோட்டின் எவ்விடத்திலும் இரட்டைப் புள்ளிகள் இருக்க முடியாது.

§ 14-7. $f(x, y) = 0$ என்ற வளைகோட்டில் இரட்டைப்புள்ளிகள் இருப்பதற்கான கட்டுப்பாடுகளைக் கண்டு, அவற்றைப் பாகுபாடு செய்தல்

$$f(x, y) = 0 \qquad \dots (1)$$

என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடாகத் தரப்பட்டுள்ளது.

P (x, y) என்பது வளைகோட்டின் ஏதேனும் ஒரு புள்ளி. இப் புள்ளியில் சாய்வு விகிதம்.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}$$

(அ.து) $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} \cdot \dfrac{dy}{dx} = 0.$ ... (2)

(x, y) என்பது இரட்டைப்புள்ளி எனில் இரு தொடுகோடுகள் (மெய், ஒன்றியன அல்லது கற்பனை) கிடைக்க வேண்டும். எனவே $\dfrac{dy}{dx}$ என்பதற்கு (x, y)-ல் இரு மதிப்புகள் இருக்க வேண்டும். ஆனால் (2) என்பதோ $\dfrac{dy}{dx}$-ல் முதல் படியில் அமைந்த சமன்பாடு எனவே (2) என்பது $\dfrac{dy}{dx}$-ன் இருமதிப்புகளால் நிறைவு செய்யப்பட வேண்டுமெனில் அது முற்றொருமையாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

மேலும் (x, y) என்பது (1)-ல் அமைகிறது.

ஆகவே

$$f = 0$$

எனவே (1) என்ற வளைகோட்டிலமைந்த (x, y) எனும் புள்ளி இரட்டைப் புள்ளியாக இருக்க நிபந்தனை.

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 0 \end{aligned}}$$

இரட்டைப் புள்ளிகளைப் பாகுபாடு செய்தல் :

(2)-ஐ x-ஐப் பொறுத்து வகையீடு செய்ய,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \cdot \frac{dy}{dx} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot \frac{dy}{dx}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

எனக் கிடைக்கும்.

ஆனால் இரட்டைப் புள்ளியில் $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

ஆதலால் சமன்பாடு பின்வருமாறு சுருக்கமடையும்.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\cdot\left(\frac{dy}{dx}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \qquad \ldots\ldots (3)$$

இது $\frac{dy}{dx}$-ல் இருபடிச் சமன்பாடாகும்.

இதனால் (x, y) என்ற இரட்டைப் புள்ளியில் தொடுகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்கள் கிடைக்கும். (3)-ன் தீர்வுகளாகக் கிடைக்கும் $\frac{dy}{dx}$-ன் மதிப்புகள் வேறுபட்டனவாகவோ, சமமானவையாகவோ, கற்பனையானவையாகவோ இருப்பதைப் பொறுத்து, (x, y)-ல் தொடுகோடுகள் மெய், வெவ்வேறானவை அல்லது மெய், ஒன்றியவை, அல்லது கற்பனையானவை. இதற்கான நிபந்தனை.

$$4\left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right] \gtreqless 0$$

எனவே பொதுவாக, ஒரு புள்ளியில்

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \gtreqless \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)}$$

என்பதற்கேற்ப இரட்டைப்புள்ளி, கணுப்புள்ளியாகவோ, கூர்ப் புள்ளியாகவோ, தனிப்புள்ளியாகவோ இருக்கும்.

குறிப்பு 1 : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$ எனில் (x, y) எனும் புள்ளி இரண்டாவது வரிசைக்கும் மேற்பட்ட வரிசை உடைய மடங்குப் புள்ளியாகும்.

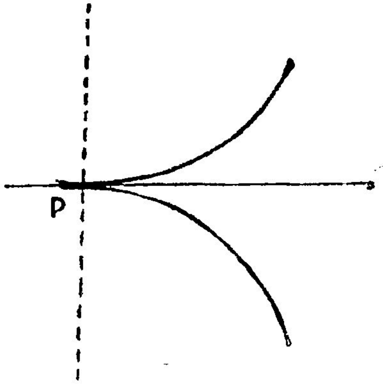
குறிப்பு 2: சமன்பாடு (3)-லிருந்து இரட்டைப் புள்ளியில் இரு தொடுகோடுகளின் சாய்வு விகிதங்களைப் பெறலாம்.

§ 14-80. கூர்ப்புள்ளிகளின் வகைகள் :

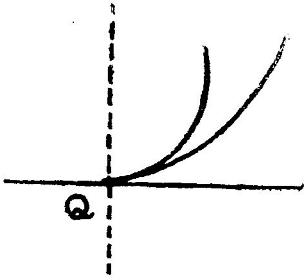
கூர்ப்புள்ளியில் வளைகோட்டின் இரு கிளைகளுக்கும் ஒரு பொதுத் தொடுகோடு இருக்கும் என்பதை நினைவு கூறுக. அத் தொடு வரைச் செங்கோடும் பொதுவாக இருக்கும்.

§ 14-81. ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி (Single cusp) :

கூர்ப்புள்ளியில் பொதுவரைச் செங்கோட்டுக்கு ஒரே புறத்தில் வளைகோட்டின் கிளைகள் படங்களில் கண்டவாறு அமைந்திருக்கு



படம் 14·15

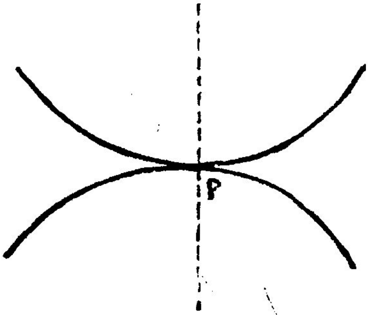


படம் 14·16

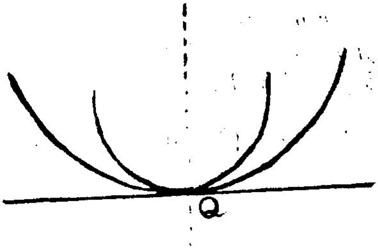
மெனில் அதற்கு ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி என்று பெயர்.

§ 14-82. இரட்டைக் கூர்ப் புள்ளி (Double cusp) :

கூர்ப்புள்ளியில் பொதுவரைச் செங்கோட்டிற்கு இருபுறத்தும்



படம் 14 17

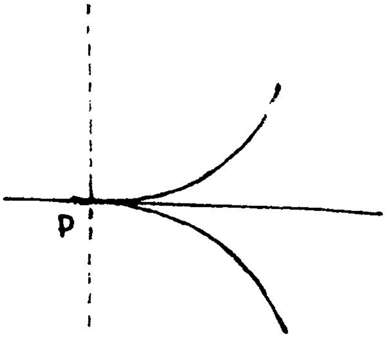


படம் 14·18

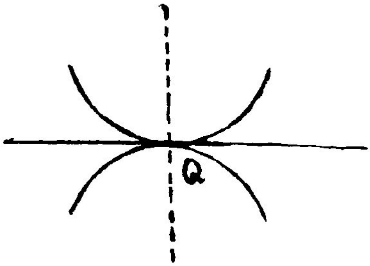
வளைகோட்டின் கிளைகள் படங்களில் கண்டவாறு அமைந்திருக்கு மெனில் அதற்கு இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளி எனப்படும்.

§ 14–83. கூர்ப்புள்ளிகளின் இனங்கள் (**Species of cusp**) :

§ 24-831. (1) முதலினக் கூர்ப்புள்ளிகள் :



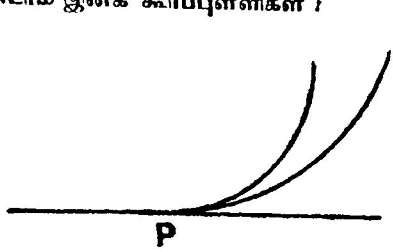
படம் 14·19



படம் 14 20

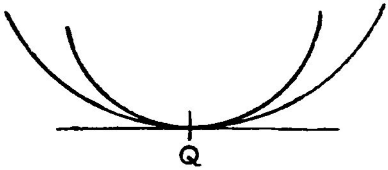
கூர்ப்புள்ளியின் பொதுத்தொடுகோட்டிற்கு இரு புறங்களிலும் வளைகோட்டின் கிளைகள் படங்களில் கண்டவாறு அமைந்திருக்குமெனில் அதற்கு முதலினக் கூர்ப்புள்ளி என்று பெயர்.

§ 14-832. இரண்டாம் இனக் கூர்ப்புள்ளிகள் :



படம் 14·21

கூர்ப்புள்ளியில் பொதுத் தொடுகோட்டிற்கு ஒரே புறத்தில் வளைகோட்டின் கிளைகள் படங்களில் கண்டவாறு அமைந்திருக்கு

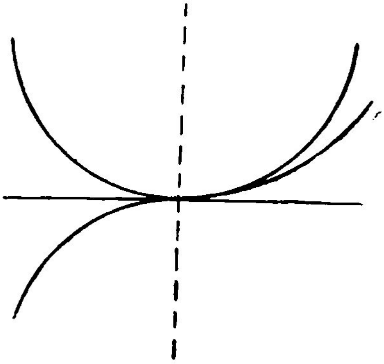


படம் 14·22

மெனில் அதற்கு இரண்டாம் இனக் கூர்ப்புள்ளி எனப் பெயர்.

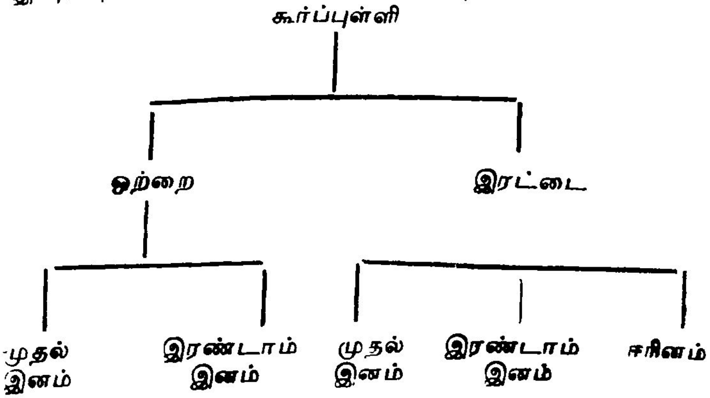
§ 14-83.3. *(3)* ஈரின இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளிகள் (Osculinflexion)

மேற்கூறிய இரு இனத்திலும் அமைகின்ற இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளி ஈரின இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளி எனப்படும்.



படம் 14·23

இவற்றை பின்வருமாறு தொகுத்துக் கூறலாம்.



§ 14-84. ஆதியில் கூர்ப்புள்ளியின் தன்மையை ஆராய்தல்.

வகை I :

கூர்ப்புள்ளித் தொடுகோடுகள் $y = 0$ ஆக இருக்கின்றன.

ஆதியானது கணுப்புள்ளியா, கூர்ப்புள்ளியா, தனிப்புள்ளியா எனப் பாகுபாடு செய்ய, செயல்முறை விதி தந்துள்ள பகுதியில் (§ 14-52) கொடுக்கப்பட்ட குறிப்பின்படி சமன்பாட்டை y-க்கு தீர்வு காண்க.

(i) x-ன் ஒரு குறியீட்டுக்கு மட்டும் தீர்வுகள் மெய்யானால் கூர்ப்புள்ளி ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி ஆகும்.

(ii) x-ன் இரு குறியீட்டுக்கும் தீர்வுகள் மெய்யானால் அது இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளி ஆகும்.

(iii) தீர்வுகள் எதிர் எதிர் குறியீடுகள் பெற்றிருந்தால் கூர்ப்புள்ளி முதலினமாகும்.

(iv) தீர்வுகள் ஒரே குறியீடு பெற்றிருந்தால், கூர்ப்புள்ளி இரண்டாம் இனம் ஆகும்.

வகை II :

கூர்ப்புள்ளித் தொடுகோடுகள் $x^2 = 0$ ஆக இருக்கின்றன.

x-க்கு தீர்வு கண்டு, வகை I போலவே ஆராய்க.

வகை III :

கூர்ப்புள்ளித் தொடுகோடுகள் $(ax + by)^2 = 0$ என்ற அமைப்பில் இருக்கின்றன. p_1 என்பது, $A(x, y)$ என்ற வளைகோட்டுப் புள்ளியிலிருந்து $ax + by = 0$ என்ற கோட்டுக்குச் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமாகும். எனவே,

$$p_1 = \frac{ax + by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

எனவே $p_1 \propto ax + by$.

$p = ax + by$ எனப் பிரதியிடுக.

இந்தச் சமன்பாட்டிலிருந்தும், வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டிலிருந்தும், y-ஐ நீக்கம் செய்தால் p, x ஆகியவற்றில் ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும். வகை I-ல் y போல) x-ன் சிறு மதிப்புகளுக்கேற்ப p-ன் குறியீடுகளும், மதிப்புகள் உளதாம் தன்மையும் கூர்ப்புள்ளியின் வகையின் வகையைப் பிரித்தறிய உதவும்.

குறிப்பு 1 : y-ஐ நீக்கம் செய்ததைப் போல x-ஐ நீக்கம் செய்தும் முடிவைக் காணலாம்.

குறிப்பு 2 : ஆதி அல்லாத வேறு புள்ளியில் கூர்ப்புள்ளி இருப்பின், அப்புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றம் செய்த பின் முன்பு கூறியவாறு ஆராய்தல் வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 4 :

a, b என்பன ஒத்த அல்லது எதிர் குறியீட்டைப் பெற்றிருப்பதற்கேற்ப $y^2 = bx\left(\sin\dfrac{x}{a}\right)$ என்ற வளைகோடு ஆதியில் கணுப் புள்ளியையோ அல்லது கூர்ப்புள்ளியையோ கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு ;

$$f(x, y) \equiv y^2 - bx\sin\left(\frac{x}{a}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = -b\sin\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{b}{a}x\cos\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \text{ என்பதிலிருந்து } -b\sin\frac{x}{a} - \frac{bx}{a}\cos\frac{x}{a} = 0$$

அது $x = 0$

இவ்வாறே $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்பதிலிருந்து ... ... $y = 0$

எனவே $(0, 0)$ இரட்டைப் புள்ளியாக வளைகோட்டில் அமைந்துள்ளது.

மேலும் $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$ ...... $(0, 0)$-ல்

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{b}{a}\cos\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\cos\frac{x}{a} + \frac{b^2}{a^2}x\sin\frac{x}{a}$$

$(0, 0)$-ல் $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\dfrac{2b}{a}$

எனவே இரட்டைப்புள்ளி கணுப்புள்ளியாகவோ கூர்ப்புள்ளி யாகவோ இருப்பது

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 > \text{ அல்லது } < \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) \text{ பொறுத்தது}$$

(அது) $0 < \text{ அல்லது } < \left(-\frac{2b}{a}\right)(2)$ பொறுத்தது

(அது) a, b ஒத்த அல்லது எதிர் குறியீடு பெறுவதைப் பொறுத்தது.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

$ay^2 = (x-a)^2(x-b)$ என்ற வளைகோடு $x = a$-ல் $a < b$ எனில் இணையிய புள்ளியையும் $a > b$ எனில் கணுப்புள்ளியையும் $a = b$ எனில் கூர்ப்புள்ளியையும் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$f(x, y) \equiv ay^2 - (x-a)^2(x-b) = 0 \text{ என்க.}$$

$$f_x = -2(x-a)(x-b) - (x-a)^2$$

$$f_y = 2ay$$

இரட்டைப் புள்ளியில் $f_x = 0$, $f_y = 0$, $f = 0$

f_x ஐ பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த

$$(x-a)[2x - 2b + x - a] = 0$$

$$\text{அது } x = a\,;\ x = (a+2b)/3$$

f_y ஐ பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த $y = 0$

$$x = \frac{a+2b}{3} \text{ எனப் பிரதியிடல் பொருந்தாது}$$

எனவே $(a, 0)$ என்பதே இரட்டைப்புள்ளி

இனிமை ஆதியை $(a, 0)$-க்கு மாற்ற

$$ay^2 = (x+a-a)^2(x+a-b)$$

(அது) $ay^2 - x^2(x+a-b) = 0$

புதிய ஆதியில் குறைந்தபடி உறுப்புக்களை பூச்சியத்துடன் சமன் படுத்த தொடுகோடுகள் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$$ay^2 - x^2(a - b) = 0 \text{ அது } y = \pm \frac{\sqrt{a - b}}{\sqrt{a}} x$$

(i) $a > b$ எனில், $a - b$ குறை.

எனவே தொடுகோடுகள் கற்பனை ;

$\therefore$ $(a, 0)$ இணையியபுள்ளி

(ii) $a > b$ எனில் $a - b$ மிகை

எனவே தொடுகோடுகள் மெய் ; தனித்தனி

$\therefore$ $(a, 0)$ கணுப்புள்ளி.

(iii) $a = b$ எனில் $a - b = 0$

எனவே தொடுகோடுகள் மெய் ; ஒன்றியன

$\therefore$ $(a, 0)$ கூர்ப்புள்ளி.

எடுத்துக்காட்டு 6 :

$x^3 + y^3 = ax^2$ என்ற வளைகோடு ஆதியில் முதல் இனத்தைச் சேர்ந்த கூர்ப்புள்ளியைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$f(x, y) \equiv x^3 + y^3 - 9x^2 = 0 \text{ என்க.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 18x \; ; \; \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2$$

இரட்டைப் புள்ளிகளில் $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0; \; \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0; \; f = 0$

எனவே $\dfrac{\partial f}{\partial x}$-ஐ பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த

$$3x^2 - 18x = 0 \qquad \therefore \; x = 0, \; 6$$

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$-ஐ பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த

$$y = 0$$

$\therefore$ $(0, 0)$, $(6, 0)$ என்ற இரு ஜோடி மதிப்புகள் கிடைக்கின்றது. இதில் $(0, 0)$ வளைகோட்டை நிறைவு செய்கிறது.

$\therefore$ $(0, 0)$ இரட்டைப் புள்ளி.

குறைந்தபடி உறுப்புக்களை பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த $x^2 = 0$. $\therefore$ இரு மெய்யான ஒன்றிய தொடுகோடுகள் கிடைக்கின்றன. எனவே $(0, 0)$ கூர்ப்புள்ளி.

ஆதியருகே x சிறியதாகையால் x^3-ஐ புறக்கணித்து வளைகோட்டுச் சமன்பாட்டை $y^3 = ax^2$ என எழுதலாம். அதாவது $x = \pm\sqrt{y^3 / a}$

y-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு (a-ஐ மிகையாகக்கருதி x-க்கு மிகை மதிப்பொன்றும், குறைமதிப்பு ஒன்றும் கிடைக்கிறது; y-ன் குறை மதிப்புகளுக்கு x கற்பனை.

$\therefore$ $(0, 0)$ முதல் இனத்தைச் சேர்ந்த கூர்ப்புள்ளி.

பயிற்சிகள் 14 (B)

1. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு ஆதியின் தன்மையைக் காண்க.

(a) $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

(b) $x^4 + y^4 - 4axy = 0$

(c) $y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2)$

(d) $x^2 (x - y) + y^2 = 0$

(e) $y^2 = 2x^2y + x^4y - x^4$

(f) $x^4 - ax^2y + axy^2 + a^2 y^2 = 0$

2. $y^3 = (x^3 + ax^2)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியின் தன்மையைக் காண்க.

3. $x^4 - ax^2y + axy^2 + a^2 y^2 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதி இணையிப்புள்ளி என நிறுவுக.

4. $y^2(a^2+x^2) = x^2(a^2-x^2)$ என்ற வளைகோட்டிற்கு ஆதியில் கணுப்புள்ளி உண்டெனவும், கணுப்புள்ளி தொடு கோடுகள் அச்சுக்கள் உண்டாக்கும் கோணத்தைச் சமக் கூறிடும் எனவும் நிறுவுக.

5. $r = a(1+\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளைக்கு ஆதியில் கூர்ப் புள்ளி உண்டென நிறுவுக.

6. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு மடங்கு புள்ளிகளின் இட அமைப்பையும் தன்மையும் ஆராய்க.

(a) $(x-2)^2 = y(y-1)^2$

(b) $x^2y^2 = (a+y)^2(b^2-y^2)$

7. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு இரட்டைப் புள்ளிகள் இருப்பின் அவற்றை இட அமைப்பையும் தன்மையையும் ஆராய்க.

(a) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$

(b) $y^2 = (x-1)(x-2)^2$

(c) $x^4 - 2y^3 - 3y^2 - 2x^2 + 1 = 0.$

(d) $x(x^2+y^2) = ay^2$

(e) $x^2 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$

(f) $y^2 = (x-2)^2(x-5)$

(g) $x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0.$

8. $y^2 = (x-2)^2(x-5)$ என்ற வளைகோட்டின் வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளை இணைக்கும்கோடு அவ் வளைகோட்டின் இரட்டைப் புள்ளியில் ஒரு செங்கோணத்தைத் தாங்கும் என நிறுவுக.

9. $y^2 = ax^2 + bx^3$ என்ற வளைகோடு ஆதியில் கணுப்புள்ளி, கூர்ப்புள்ளி அல்லது இணையியபுள்ளியைப் பெற்றிருப்பது a ஆனது மிகை, பூச்சியம் அல்லது குறை மதிப்பைப் பெற்றிருப்பதைப் பொறுத்தது என நிறுவுக.

10. $r = a(2\cos\theta + \cos 3\theta)$ என்ற வளைகோட்டில் கோண ஆதி மும்மடிப்புள்ளி என நிறுவி மூன்று கிளைகளின் வளைவாரைகள் $\frac{\sqrt{3}\,a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}\,a}{2}$ என நிறுவுக.

11. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்குக் குறிப்பிட்ட புள்ளிகளில் முதல் இனத்தைச் சேர்ந்த ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளிகளில் முதல் இனத்தைச் சேர்ந்த ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி உண்டெனநிறுவுக.

(a) $ay^2 = x^2y + x^3$; $(0, 0)$ என்ற புள்ளி.

(b) $y^3 = (x - a)^2 (2x - a)$; $(a, 0)$ என்ற புள்ளி.

(c) $(2x + y)^2 - 6xy(2x + y) - 7x^3 = 0;$
$(0, 0)$ என்ற புள்ளி

(d) $(x + y)^3 - \sqrt{2}(y - x + 2)^2 = 0; (1, -1)$
என்ற புள்ளி.

(e) $y^3 = x^3 + ax^2$; $(0, 0)$ என்ற புள்ளி.

12. $(xy + 1)^2 + (x - 1)^3 (x - 2)$ என்ற வளைகோடு $(1, -1)$ என்ற புள்ளியில் முதல் இனத்தைச் சேர்ந்த ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளியைப் பெற்றிருக்கும் என நிறுவுக.

13. $x^4 - 2ax^2y - axy^2 + a^2y^2 = 0$ என்ற வளைகோடு ஆதியில் இரண்டாம் இனத்தைச் சேர்ந்த ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளியைக் கொண்டிருக்கும் என நிறுவுக.

14. $x^3 - y^2 - 7x^2 + 4y + 15x - 13 = 0$ என்ற வளைகோட்டிற்கு இரட்டைப் புள்ளிகளின் இட அமைப்பையும் தன்மையையும் ஆராய்க.

15. பின்வரும் வளைகோடுகளுக்கு இரட்டைப் புள்ளிகளின் தன்மையை ஆராய்க.

(a) $y^2 (2a - x) = x^3$

(b) $y(y - 6) = x^2 (x - 2)^3 - 9$

(c) $x^3 + 2x^2 + 2xy - y^2 + 5x - 2y = 0$

16. $y^3 + 3ax^2 + x^3 = 0$ எனில் $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{2a^2x^2}{y^5} = 0$ என நிறுவுக. மேற்கூறிய வளைகோடு

(i) x அச்சுக்கு எங்கும் குழிவுடையது.

(ii) $x = -3a$ எனும்போது வளைவு மாற்றப்புள்ளி உடையது,

(iii) $x = 0$ எனும்போது கூர்ப்புள்ளி உடையது,

(iv) $x + y + a = 0$ என்ற அணுகுகோட்டை உடையது, என நிறுவுக.

விடைகள் 14 (C)

1. (a) கணுப்புள்ளி

(b) கணுப்புள்ளி

(c) கணுப்புள்ளி

(d) கூர்ப்புள்ளி

(e) தனிப்புள்ளி

(f) தனிப்புள்ளி

2. கூர்ப்புள்ளி

6. (a) $(2, 1)$ கணுப்புள்ளி

(b) $(0, -a)$ இரட்டைப்புள்ளி : $b > a$ கணு ; $b = a$ கூர் ; $b < a$ தனி.

7. (a) $(0, 0)$ கணுப்புள்ளி

(b) $(2, 0)$ கணுப்புள்ளி

(c) $(0, -1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$ கணுப்புள்ளிகள்

(d) $(0, 0)$ கூர்ப்புள்ளி

(e) $(3, 2)$ கணுப்புள்ளி

(f) $(2, 0)$ கணுப்புள்ளி

(g) இரட்டைப்புள்ளி இல்லை

15. (a) $(0, 0)$ முதல் இனம் ; இரட்டைக் கூர்ப்புள்ளி

(b) $(2, 3)$ முதல் இனம் ; ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி

(c) $(-1, -2)$ முதல் இனம் ; ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி

15. வளைகோடுகளின் சுவடுகளைக் காணுதல்

§ 15-0. வளைகோட்டின் சுவடு காணல் (Curre Tracing)

ஒரு சார்பலன் தரப்பட்டால் அந்த சார்பலனை நிறைவு செய்யும் புள்ளிகள் பலவற்றைக்கண்டு, அவற்றை இணைக்க, சார்பலனின் வரைபடம் வளைகோடாகக் கிடைக்கிறது. வளைகோட்டின் வடிவத்தைத் தெளிவாக அறியவேண்டுமானால் மிகவும் அதிகமான புள்ளிகளைக் கண்டு பிடித்து அவைகளை இணைக்க வேண்டியிருக்கும். இவ்வாறு செய்வது கடினமான காரியமாகும். இது வரையில் நாம் படித்த வளைவாரை, அணுகுகோடுகள், சிறப்புப் புள்ளிகள், மற்றும் இவற்றோடு தொடர்புடைய கொள்கைகள் ஆகியவற்றின் துணை கொண்டு, வளைகோட்டின் சுவட்டினை அறிய முயல்வது நல்லது. அதாவது, வளைகோட்டில் அமையும் புள்ளிகளைக் குறிப்பதற்கு முன்னரே வளைகோட்டின் பொதுத் தன்மைகளை, முன்பு கூறிய சிறப்பு இயல்புகளைக் கொண்டு, ஒருவாறு திட்டம் செய்து கொள்வது வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் கண்டு பிடித்தலை ஒருவாறு எளிதாக்கும்.

இவ்விதமாக வளைகோட்டின் சிறப்பு அம்சங்களை ஒருவாறு ஆராய்ந்து வளைகோட்டின் தோராய வடிவத்தைக் கண்டுபிடிக்கும் செயல்முறைக்குப் பயன்படும் கருத்துக்களை வரிசையாகத் தொகுத்துக் கூறுவோம்.

§ 15-1 கார்டிசியன் அமைப்பில் சமன்பாடுடைய வளைகோட்டின் சுவடு

முதலில் கார்ட்டிசியன் அமைப்பில் சமன்பாடு கொண்டுள்ள வளைகோடுகளை எடுத்துக் கொள்வோம்.

I சமச்சீர் : (Symmetry)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள வளைகோடு சமச்சீர் கொண்டுள்ளதா என்பதைக் கண்டிபிடிப்பது முதல் செயல். இதற்கெனப் பின் வரும் விதிகளைப் பயன்படுத்தலாம்.

(i) வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் y-ன் படிகள் யாவும் இரட்டைப் படை எண்ணாக இருந்தால், சமன்பாட்டில் y-க்கு பதிலாக $-y$-ஐ பிரதியிடுவதனால் சமன்பாடு மாற்றமடையாது எனவே y-ன் படிகள் யாவும் இரட்டைப் படையாக இருப்பின் வளைகோடு x அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$y^2 = 4ax$, x அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(ii) சமன்பாட்டில் x-ன் படிகள் யாவும் இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் வளைகோடு y அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் உடையது.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^2 = 4ay$, y அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(iii) x-ன் படிகளும், y-ன் படிகளும் இரட்டைப்படை எண்களாக இருந்தால், வளைகோடு இரு அச்சுக்களைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் உடையது. அதாவது வளைகோடானது, எதிர் எதிர் கால் வட்டப் பகுதிகளில் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, எதிர் எதிர் கால்வட்டப் பகுதிகளில் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(iv) வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் x-க்கு பதிலாக y-ஐயும், y-க்கு பதிலாக x-ஐயும் பிரதியிடுவதனால் மாற்றமேதும் இல்லையெனில், சமன்பாடு $y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் உடையது என பொருள்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 + y^3 = 3\,axy$ என்ற வளைகோடு $y = x$ என்ற வளை கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் உடையது.

குறிப்பு : வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் x-க்கு பதிலாக $-y$-ம், y-க்கு பதிலாக $-x$-ம் பிரதியிடுவதனால் மாற்றம் ஏதும் இல்லையெனில் வளைகோடு, $y = -x$ என்ற நேர்கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் உடையது என் அறிக.

II ஆதி (Origin) :

(i) வளைகோடு ஆதிவழியே செல்கின்றதா என ஆராய்க. அதாவது, $(0, 0)$ என்ற புள்ளி, வளைகோட்டை நிறைவு செய்கின்றதா எனக் கண்டு பிடிக்கவேண்டும். சமன்பாட்டில் மாறிலி உறுப்புக்கள் ஏதும் இல்லையெனில் வளைகோடு ஆதி வழியே செல்லும்.

(ii) வளைகோடு ஆதிவழியே செல்லுமெனில் வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் உள்ள மிகக் குறைந்த படி உறுப்புக்களைப் பூச்சியத்தோடு சமன்படுத்துவதன் மூலம் ஆதியில் அமையும் தொடுகோடு அல்லது தொடுகோடுகளின் சமன்பாட்டைக் காணமுடியும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 + y^3 = 3axy$ ஆதிவழி செல்கிறது. இதில் மிகக் குறைந்த படியில் உள்ள உறுப்பு $3axy$. இதனைப் பூச்சியத்தோடு சமன்படுத்துவதன் மூலம் கிடைக்கும் ஆதியில் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$xy = 0$. அதாவது $x = 0$, $y = 0$.

இவ்வாறே $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ என்ற சமன்பாட்டில் ஆதியில் தொடுகோடுகளாவன;

$$a^2y^2 - a^2x^2 = 0,$$

(அது) $\quad y^2 = x^2$

(அது) $\quad y = \pm x.$

(iii) வளைகோட்டிற்கு ஒரே ஒரு தொடுகோடு இருக்குமாயின், ஆதிக்கு அருகாமையில் தொடுகோட்டிற்கு எந்தப் பக்கத்தில் வளைகோடு அமைந்துள்ளது எனக் கண்டுபிடிக்கவும். வளைகோட்டிற்கு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட தொடுகோடுகள் இருந்தால் ஆதியானது, கணுப்புள்ளியா அல்லது கூர்ப்புள்ளியா அல்லது தனிப்புள்ளியா எனப் பிரித்தறிக. கூர்ப்புள்ளியாயின் அதன் இனத்தைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

குறிப்பு : பொதுவாக ஆதி இரட்டைப் புள்ளியாக இருந்தால், ஆதியில் இரு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் காணலாம். இத்தொடுகோடுகள் மெய்யாகவும், ஒன்றியனவாகவும், இருப்பின் ஆதியில் கூர்ப்புள்ளியும் தொடுகோடுகள் மெய்யாகவும் தனித்தனவாகவும் இருந்தால் ஆதியில் கணுப்புள்ளியும், தொடு

கோடுகள் கற்பனைக் கோடுகளாக இருந்தால் ஆதி தனிப்புள்ளியாகவும் அமைந்திருக்கும்.

III வெட்டுத் துண்டங்கள் (Intercepts)

(i) சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப் பிரதியிடுவதனால் கிடைக்கும் x மதிப்பானது, x வெட்டுத் துண்டமாகும்.

(ii) சமன்பாட்டில் $x = 0$ எனப்பிரதியிடுவதனால் கிடைக்கும் y மதிப்பானது, y வெட்டுத் துண்டமாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$y^2 (a + x) = x^2 (3a - x)$ என்ற வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் $y = 0$ எனப் பிரதியிட

$$x^2 (3a - x) = 0$$

$$x = 0, \ x = 3a$$

வளைகோடு x அச்சை, $(0, 0)$, $(3a, 0)$ என்னும் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

(iii) இவ்வாறு அச்சுக்களை வளைகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் கண்டுபிடிக்கப்பட்டால், இப்புள்ளிகள் ஒவ்வொன்றினுக்கும் ஆதியினை மாற்றுவதன் மூலம் வளைகோட்டின் வடிவத்தைக் காணலாம். அதாவது புதிய ஆதிக்கு மாற்றம் செய்து, சமன்பாட்டை அதற்கேற்ப மாற்றியமைத்தால், இப்புள்ளியில் தொடுகோடுகள், குறைந்தபடி உறுப்புக்களைப் பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்துவதன் மூலம் கிடைக்கும். இந்த தொடுகோடுகளுக்கேற்ப வளைகோடு எப்பக்கமாக அமைந்துள்ளது என்பது பற்றியும், வளைகோடுகளின் மடங்குப் புள்ளிகளது இடம், தன்மை பற்றியும் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$9ay^2 = x(x - 3a)^2$ என்ற வளைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளியைக் காண $y = 0$ எனப் பிரதியிடுக. $(0, 0)$, $(3a, 0)$ என்பன வளைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள். $(3a, 0)$ என்னும் புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்ற, x-க்குப் பதிலாக $x + 3a$-ஐயும், y-க்குப் பதிலாக $y + 0$-ஐயும் சமன்பாட்டில் பிரதியிடுக. இப்போது $(3a, 0)$ என்ற புது ஆதிக்கேற்ப வளைகோட்டின் புதிய சமன்பாடு பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$9\,a\,(y + 0)^2 = (x + 3a)\,(x + 3a - 3a)^2$$

(அ.து) $9\,ay^2 = (x + 3a)\,(x^2)$ ... (1)

புதிய ஆதியில் தொடுகோடு காண, குறைந்தபடி உறுப்புகளை பூச்சியத்தோடு சமன்படுத்துக.

$$3\,y^2 - x^2 = 0$$

(அ.து) $y^2 = \dfrac{x^2}{3}$

(அ.து) $y = \pm\dfrac{x}{\sqrt{3}}$

$$= \pm\,(\tan 30^\circ)\,x.$$

$(3a,\ 0)$ என்ற புள்ளியில் தொடுகோடுகள் x அச்சுடன் $\pm\ 30^\circ$-ல் சாய்ந்துள்ளன.

(iv) $y = x$, அல்லது $y = -x$ என்ற கோடு, சமச்சீர்க் கோடாயின் வளைகோடு இக்கோட்டினை வெட்டும் புள்ளிகளையும் இவ்வெட்டும் புள்ளிகளில் தொடுகோடுகளையும் கண்டறிக.

IV அணுகுகோடுகள் (Asymptotes) :

வளைகோட்டிற்கு முடிவில்லாத கிளை (infinite branch) ஒன்று இருப்பின் அணுகுகோடுகளைப்பற்றி ஆராய்தல் வேண்டும்.

(i) அச்சுகளுக்கு இணையான அணுகுகோடுகளைக் காண முயல்க. x அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடுகள் காண, x-ன் மிக உயர்ந்தபடி உறுப்பின் கெழுவினைப் (மாறிலியாக இல்லாத போது) பூச்சியத்திற்குச் சமன்படுத்துக. அந்தக்கெழு மாறிலியாக இருந்தால் x அச்சுக்கு இணையான தொடுகோடுகள் இல்லை. இவ்வாறே y அச்சுக்கு இணையான தொடுகோடுகளையும் காண முயல்க

(ii) சாய்ந்த அணுகுகோடுகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

(iii) வளைகோடு அதன் அணுகுகோடுகள் இவை ஒன்றுக் கொன்று எவ்விதம் இடம் பெற்றுள்ளன எனக் கண்டறிக.

(iv) அணுகுகோடுகள் வளைகோட்டைச் சில பகுதிகளில் முடிவுள்ள புள்ளிகளில் வெட்டினால் அவற்றையும் காண்க.

V வளைகோட்டில் பெருமம், சிறுமம் முதலியன

(i) $\frac{dy}{dx}$ காண்க ; கணநிலைப்புள்ளிகளை (Stationary points) பெறுக.

(ii) $\frac{d^2y}{dx^2}$ காண்க ; வளைவு மாற்றப் புள்ளிகளைப் பெறுக. அவை உளதாயின் வளைகோட்டின் குழிவுத் தன்மைபற்றி ஆராய்க.

(iii) சிக்கல் அதிகமாக இல்லாதபோது பெரும சிறுமப் புள்ளிகளை (அவை உளதாயின்) காண்க.

VI வளைகோட்டின் எல்லைகள்

வளைகோடு இடம் பெறாத பகுதிகளை அதாவது அதன் வரம்புகளை காண்பது இன்றியமையாதது

(i) a-ஐ விடப் பெரிய x மதிப்புகளுக்கு இயைந்த y மதிப்புகள் கற்பனை மதிப்புகளாக இருப்பின், $x = a$ என்ற கோட்டிற்கு வலப்புறத்தில் வளைகோட்டின் எப்பகுதியும் இடம்பெறாது. இவ்வாறே b என்ற மதிப்புக்குப் பெரிதான y மதிப்புக்களுக்கு இயைந்த x மதிப்புகள் கற்பனை மதிப்புகளாக இருப்பின் $y = b$ என்ற கோட்டிற்கு மேலே வளைகோட்டின் பகுதிகள் அமைய முடியாது.

எடுத்துக்காட்டு :

$x^3 = y^2 (2a - x)$ என்ற வளைகோடு தரப்பட்டுள்ளது.

இங்கே, $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$

x குறையானால், $(2a - x)$ மிகை. ஆனால் x^3 குறை. எனவே y^2 குறை. அதாவது y கற்பனை எண். எனவே y அச்சுக்கு இடப்புறத்தில் வளைகோட்டின் எப்பகுதியும் அமையாது.

x மிகையாக இருந்து, $2a$-ஐ விடப் பெரிதாக இருப்பின் $2a - x$ குறை; x^3 மிகை. எனவே y^2 குறை. அதாவது y கற்பனை எண் $x = 2a$ என்ற கோட்டிற்கு வலப்புறத்தில் வளைகோட்டின் எப்பகுதியும் இடம் பெறாது.

(ii) சமன்பாட்டிலிருந்து, x-ன் சார்பலனாக y-ஐ அமைத்துக் கொள்க. $-\infty$-யிலிருந்து $+\infty$ வரை தொடர்ந்து x மாறுவதனால் y எவ்விதம் மாற்றமடைகிறது எனக் கண்டறிதல் வளை

கோட்டின் சுவட்டினைக் காண்பதனை எளிமையாக்கும். இவ்வாறே y-ன் மாற்றங்களுக்கேற்ற x மாற்றங்களையும் கண்டறிக.

VII பிற குறிப்புகள்

(i) வளைகோடு வரைதலை எளிதாக்குவதற்காக வளைகோட்டின் சில புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகளைக் கண்டறிவது நல்லது.

(ii) வளைகோடு சமச்சீர் தன்மை பெற்றிருக்கும்போது, வளைகோட்டின் ஒரு பகுதியில் மட்டும் நாம் கண்டறியும் உண்மைகளை அதற்குச் சீராக அமைந்த மற்ற பகுதிகளுக்கும் எடுத்துக் கொள்ளலாம்.

(iii) கார்ட்டிசியன் அமைப்பில் தரப்பட்டுள்ள வளைகோட்டின் சமன்பாடு கோண தூர அமைப்பில் மாற்றம் பெறும்போது ஒரு வேளை எளிமையானதாக இருக்கலாம். எனவே வளைகோட்டின் சமன்பாட்டை எந்த அமைப்பில் அமைத்துக்கொண்டு, சுவட்டினைக் காண்பது எளிது என்பதை அறிந்து, செயல்பட வேண்டும். கோண தூர அமைப்பில் சுவட்டினைக் காணும் முறைகள் அடுத்த பகுதியில் விளக்கப்பெறுகின்றன.

(iv) வளைகோட்டின் வடிவத்தைக் காணப் பல செயல்முறைகள் தரப்பட்டிருப்பினும், எல்லாவற்றையும் பயன்படுத்த வேண்டும் என்பதில்லை. வளைகோட்டின் வடிவத்தைத் தெளிவாக அறிவதற்குத் தேவையான செயல்முறைகளை மட்டும் எடுத்துக் கொண்டால் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$(x^2 + a^2)y = a^2x$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

$(x^2 + a^2)y = a^2x$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு.

I சமச்சீர் :

(i) x அச்சைப் பொருத்தோ, y அச்சைப் பொருத்தோ சமச்சீர் இல்லை.

(ii) ஆனால் x-க்கு $-x$-ம் y-க்கு, $-y$-ம் பிரதியிட சமன்பாட்டில் மாற்றமில்லை.

$\therefore$ எதிர்எதிர் கால்வட்டப் பகுதிகளில் வளைகோடு சமச்சீர் கொண்டிருக்கிறது.

II ஆதி :

(i) சமன்பாட்டில் மாறிலிகள் இல்லையாதலால் வளை கோட்டில் $(0, 0)$ ஒரு புள்ளி

(ii) ஆதியில் தொடுகோடு $a^2(y - x) = 0$

(அது) $y = x$

(iii) $\dfrac{a^2 x}{a^2 + x^2} < x$ ஆதலால், x அச்சின் மிகைப் பக்கத்தில்

$y = x$ எனும் தொடுகோட்டுக்கு கீழ்ப்புறம் வளைகோடு உள்ளது. சமச்சீரை மனதில் கொண்டு குறைப்பக்கத்தில் வளைகோட்டுப் பகுதியை வரையலாம்.

III வெட்டுத் துண்டங்கள்

x அச்சையும் y அச்சையும் வளைகோடு வெட்டும் புள்ளி ஆதியே.

IV அணுகுகோடுகள்

$y = 0$ (அது) x அச்சு வளைகோட்டின் அணுகுகோடு.

V பெருமம், சிறுமம் முதலியன :

(1) ஐ வகையீடு செய்ய

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^2 (a^2 - x^2)}{(a^2 + x^2)^2}$$

எனக்கிடைக்கிறது. எனவே

$x = \pm a$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = 0$

ஆனால் $x = a$ எனில், $y = a/2$

$x = -a$ எனில், $y = -a/2$

எனவே $(a, a/2)$ மற்றும் $(-a, -a/2)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வளை கோட்டுக்கு தொடுகோடுகள் x அச்சுக்கு இணையானவை.

(ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2 \left\{ \frac{-2x\,(a^2+x^2) - 2\,(a^2 - x\,)\,.\,2x}{(a^2+x^2)^3} \right\}$$

வளைவு மாற்றப் புள்ளியில் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ஆகும்.

அதாவது $-2x\,(a^2+x^2) - 2(a^2-x^2)\,2x = 0$

(அது) $x[a^2 + x^2 + 2a^2 - 2x^2] = 0$

(அது) $x = 0$

அல்லது $x = \pm a\sqrt{3}$.

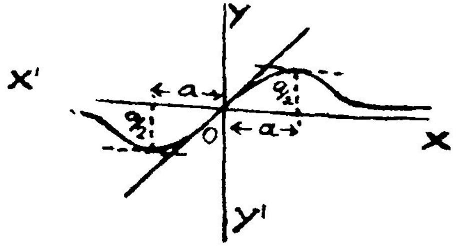
x ஆனது 0-க்கு சற்று குறைந்தால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறை;

x ஆனது 0-க்கு சற்று அதிகமானால் $\frac{d^2y}{dx^2}$ மிகை.

எனவே x ஆனது 0 மதிப்பைக் கடக்கும்போது $\frac{d^2y}{dx^2}$ குறியீடு மாற்றம் பெறுகிறது.

∴ (0, 0) என்பது வளைவு மாற்றப் புள்ளி

இவ்வாறே $\left(-a\sqrt{3}, \frac{-a\sqrt{3}}{4}\right)$, $\left(a\sqrt{3}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)$ என்பன வளைவு மாற்றப் புள்ளிகள் என நிறுவலாம்.



படம் 15·1

VI வளைகோட்டின் எல்லைகள் :

(i) y-க்கு தீர்வு காண

$$y = \frac{a^2x}{a^2+x^2} \qquad \ldots (1)$$

எனக்கிடைக்கும்.

$x = 0$ எனில் $y = 0$. x அதிகரிக்க,

$x = a$ வரை y-ம் அதிகரிக்கும், பின் குறையும்

$x = a$ எனில் $y = a/2$. இறுதியாக

$x \longrightarrow \infty$ எனில் $y \longrightarrow 0$ ஆகும்.

(ii) $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a^2}{a^2 + x^2}$

x மிகையானாலும் குறையானாலும் $\dfrac{y}{x}$ மிகைதான். அதாவது x-க்கும் y-க்கும் குறியீடு ஒத்ததாக இருக்கும். அதாவது இரண்டும் சேர்ந்தாற்போல் மிகையாகவோ குறையாகவோ இருக்கும். அதாவது முதல், நான்காம் கால்வட்டப் பகுதிகளில் மாத்திரமே வளைகோடு அமையும்.

இதுவரை கிடைத்த குறிப்புகளைக் கையாண்டு வரைபடம் வரைகிறோம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$y^2 (a + x) = x^2 (a - x)$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

$y^2 (a + x) = x^2 (a - x)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு

I சமச்சீர் :

சமன்பாட்டில் y-ன் படிகள் இரட்டைப்படை. எனவே x அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

(i) வளைகோட்டில் மாறிலியாக தனித்தில்லை; எனவே $(0, 0)$ இதில் அமையும்.

(ii) ஆதியில் தொடுகோடுகள் $a (y^2 - x^2) = 0$ - ஆல் கிடைக்கும். (அது) $y = \pm x$

எனவே ஆதி கணுப்புள்ளி; கணுவில் தொடுகோடுகள் $y = \pm x$. x மிகை என்றால்

$$\frac{a - x}{a + x} < \frac{a}{a}. \qquad \therefore \frac{y^2}{x^2} < 1$$

$$\therefore y < x$$

$\therefore$ x-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு வளைகோடு $y = x$ எனும் தொடு கோட்டுக்கு கீழ்ப்புறம் அமையும்.

III வெட்டுத் துண்டங்கள் :

ஆதியைத் தவிர x அச்சை வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளி, எனப் பிரதியிட $(a, 0)$ ஆகக் கிடைக்கிறது.

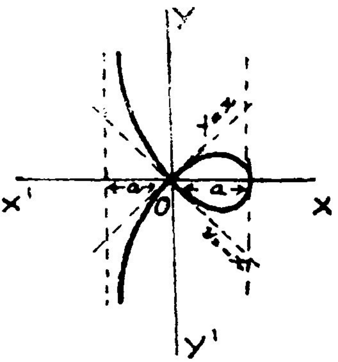
ஆதியை $(a, 0)$-க்கு மாற்ற சமன்பாட்டின் புதிய வடிவம் $y^2(2a + x) = -(x + a)^2 x$ எனக்கிடைக்கிறது. புதிய ஆதியில் தொடுகோடு $x = 0$ அதாவது புதிய y அச்சு. எனவே $(a, 0)$-ல் தொடுகோடு, பழைய y அச்சுக்கு இணையானது ஆகும்.

IV எல்லைகள் :

சமன்பாட்டை

$$y^2 = \frac{x^2(a - x)}{(a + x)}$$ என

அமைக்கலாம்.



படம் 15·2

$x > a$ ஆக உள்ள மதிப்புகளுக்கு y^2 குறை எண். $\therefore$ y எனவே கற்பனை $x > a$ ஆக உள்ள மதிப்புகளுக்கு வளைகோடு இல்லை. இவ்வாறே $x < -a$ என்றாலும் வளைகோடு உளதாகாது. x ஆனது 0-விருந்து $-a$-க்கு குறைய, y 0-விருந்து ∞-க்கு அதிகரிக்கும்.

V அணுகுகோடு :

$x + a = 0$ என்பது வளைகோட்டுக்கு அணுகுகோடு.

இது வரைக்கிடைத்த குறிப்புகளை மனதில் கொண்டு வரைபடம் அமைக்கவும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$9ay^2 = x(x - 3a)^2$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$9ay^2 = x(x - 3a)^2$$

I சமச்சீர் :

y-ன் படி இரட்டை; எனவே x அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் கொண்டது.

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதிவழி செல்கிறது, மாறிலி உறுப்புகள் சமன்பாட்டில் இல்லையாதலால்

$x = 0$ என்பது ஆதியில் தொடுகோடு.

III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

$y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 0$ மற்றும் $3a$.

வளைகோடு x அச்சை, $(0, 0)$, $(3a, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டும். $(3a, 0)$ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றினால் வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$9ay^2 = (x + 3a)(x + 3a - 3a)^2$$

$$(\text{அது}) \quad 9ay^2 = x^3 + 3ax^2$$

$\therefore$ புது ஆதியில் தொடுகோடு

பின்வருமாறு கிடைக்கும்.

$$9ay^2 - 3ax^2 = 0$$

$$(\text{அது}) \qquad y^2 = \frac{1}{3}x^2 \text{ அல்லது } y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

இவை x அச்சுடன் $\pm\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm 30°$ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ளன.

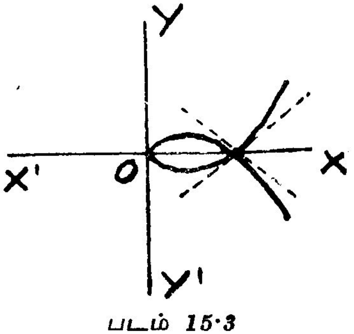
IV எல்லைகள் :

$x < 0$ எனில், y^2 குறை அல்லது y கற்பனை. எனவே $x < 0$ வளைகோட்டுப்பகுதி இல்லை.

மேலும் x ஆனது $3a$-லிருந்து ∞-க்கு அதிகரிக்க, y-ம் 0-லிருந்து ∞-க்கு அதிகரிக்கிறது.

V அணுகுகோடுகள் :

அணுகுகோடுகள் இல்லை



படம் 15·3

வளைகோடு பின்வரும் வரைபடத்தில் காட்டப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$xy^2 = a^2(a - x)$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$xy^2 = a^2(a - x) \quad \cdots (1$$

என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு.

I சமச்சீர் :

y-ன் படி இரண்டு. ∴ x-அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

(i) வளைகோடு ஆதிவழி செல்லவில்லை.

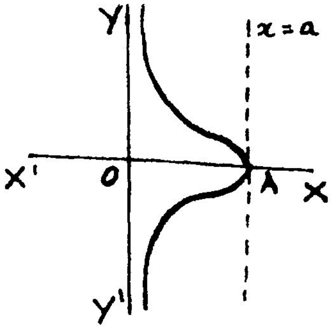
III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

சமன்பாட்டுடன், $y=0$ தீர்வு காண வளைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளி $(a, 0)$ எனக் கிடைக்கிறது. ஆதியை $(a, 0)$-க்கு மாற்றுக.

$$y^2(x + a) + a^2x = 0.$$

புதிய ஆதியில் தொடுகோடு $x=0$; அதாவது புதிய அச்சு.

எனவே $(a, 0)$-ல் தொடுகோடு பழைய y அச்சுக்கு இணையாகும்.



படம் 15·4

IV எல்லை :

y-க்கு தீர்வு காண்க ; y-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு

$$y = a\sqrt{\frac{a - x}{x}}$$

(i) $x < 0$ என்றாலும், $x > a$ என்றாலும் y கற்பனை. எனவே $x + a$-க்கு வலப்புறமும், y அச்சுக்கு இடப்புறமும் வளைகோடு உளதாகாது.

(ii) x ஆனது 0-லிருந்து a-க்கு அதிகரிக்க, y-ன் மிகைப்பகுதி $+\infty$-லிருந்து 0-க்கு குறைகிறது.

V அணுகுகோடு :

$x = 0$ மட்டுமே அணுகுகோடு. இச் செய்திகளைக் கொண்டு வளைகோட்டுக்கு வரைவடிவம் அமைக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 5:

$y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2)$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு

வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$$y^2 (a^2 + x^2) = x^2 (a^2 - x^2) \qquad \dots (1)$$

I சமச்சீர் :

x, y இரண்டின் படிகளுமே இரட்டை ; எனவே இரு அச்சுகளைப் பொறுத்தும் வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதி வழி செல்கிறது. ஆதியில் தொடுகோடுகள் $y^2 = x^2$ அல்லது $y = \pm x$ ஆகும். இரு தொடுகோடுகளும் மெய்; தனித்தன ; எனவே ஆதி கணுப்புள்ளியாம்.

III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

$y = 0$ பிரதியிட, $x = 0$ அல்லது $\pm a$. அதாவது வளைகோடு $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$ ஆகிய புள்ளிகளில் x அச்சை வெட்டும்.

$(a, 0)$-க்கு ஆதியை மாற்ற சமன்பாட்டின் புது வடிவம்

$$y^2 \{a^2 + (x + a)^2\} = (x + a)^2 \{a^2 - (x + a)^2\}$$

(அது) $y^2 \{x^2 + 2ax + 2a^2\} = (x + a)^2 \{-x^2 - 2ax\}$

குறைந்த படி உறுப்பை பூச்சியத்துடன் சமன்படுத்த $x = 0$ அல்லது புதிய y அச்சு, புது ஆதியில் தொடுகோடாகக் கிடைக்கிறது.

சமச்சீர் காரணமாக $(-a, 0)$-ல் தொடுகோடும் y அச்சுக்கு இணையாகும்.

IV அணுகுகோடுகள் :

வளைகோட்டுக்கு அணுகுகோடுகள் ஏதுமில்லை.

V பெருமம், சிறுமம் முதலியன :

(1)-ஐ வகையிடு செய்ய

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a^4 - 2a^2 x^2 - x^4}{(a^2 + x^2)^{3/2}\ (a^2 - x^2)^{1/2}}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0 \text{ ஆக } \quad a^4 - 2a^2 x^2 - x^4 = 0$$

அதாவது $x^2 = (-1 \pm \sqrt{2})\, a^2$

$\therefore \quad x = \pm a \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$ எனும் x-ன் மெய் மதிப்புகளுக்கு மட்டுமே $\frac{dy}{dx} = 0$

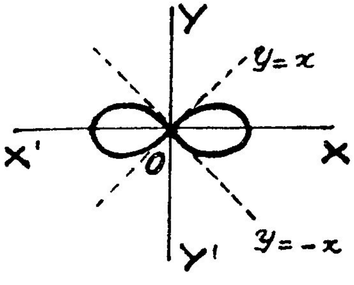
VI எல்லைகள்

(i) $y = \pm x \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{a^2 + x^2}}$ ஆதலால் $x^2 < a^2$ அல்லது $|x| < a$ ஆக இருக்கும்போது மட்டுமே y மெய்.

$\therefore$ எனவே $x = a$, $x = -a$ எனும் இருகோடுகளுக்கு உட்பட்டு வளைகோடு அமைந்து விடுகிறது.

(ii) வளைகோடு முதல் கால்வட்டப் பகுதியில் அமைந்துள்ள விதம் காண்போம். $x = 0$ எனில் $y = 0$ ஆகும். x அதிகரிக்க y-ம் அதிகரிக்கும் ; $x = a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$ ஆகும்போது $\frac{dy}{dx} = 0$ எனவே தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும். x மதிப்பு $a\sqrt{\sqrt{2} - 1}$-லிருந்து a-க்கு அதிகரிக்க, y மதிப்பு சிறிது சிறிதாகக் குறைந்து பூச்சியமாகும். இனி மற்ற கால்வட்டப் பகுதிகளில் வளைகோடு அமையும் விதம் சமச்சீரால் தெளிவாகும்.

கிடைத்த குறிப்புகளைக் கொண்டு வளைகோட்டின் வரை வடிவம் படத்தில் உள்ளவாறு கிடைக்கிறது.



படம் 15·5.

எடுத்துக்காட்டு 6:

$y^3 = x^3 + ax^2$ எனும் வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க

தீர்வு :

வளைகோட்டின் சமன்பாடாவது

$$y^3 = x^3 + ax^2 \qquad (1)$$

I சமச்சீர் :

இது சமச்சீர் இல்லாத வளைகோடாகும்.

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதி வழி செல்கிறது

ஆதியில் தொடுகோடு $x^2 = 0$ அதாவது $x = 0$, $x = 0$ தொடுகோடுகள் ஒன்றியன ; எனவே ஆதி கூர்ப்புள்ளி.

(1)-லிருந்து $ax^2 = y^3$ (x^3-ஐப் புறக்கணித்து)

$$\therefore \quad x = \pm \sqrt{\frac{y^3}{a}}$$

y மிகை எனில் தீர்வுகள் மெய்

$\therefore$ (0, 0)-ல் ஒற்றைக்கூர்ப்புள்ளி இருக்கிறது. y சிறிய மதிப்பாகவும் மிகையாகவும் இருந்தால் தீர்வுகளின் பெருக்கற்பலன் குறை.

$\therefore$ தீர்வுகள் எதிர்க்குறியீடுகள் கொண்டன.

$\therefore$ $(0, 0)$-கூர்ப்புள்ளி முதலினம்.

எனவே $(0, 0)$-ல் முதலின ஒற்றைக் கூர்ப்புள்ளி உள்ளது.

III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

$y = 0$ எனப்பிரதியிட $x = 0, x = -a$, எனவே $(-a, a)$ வளைகோட்டில் ஒரு புள்ளி. ஆதியை இப்புள்ளிக்கு மாற்றுக. மாற்றமடைந்த சமன்பாடு

$$y^2 = x(x-a)^2$$

$\therefore$ புதிய ஆதியில் தொடுகோடு புதிய y அச்சாகிய $x = 0$ ஆகும்.

$\therefore$ $(-a, 0)$-ல் தொடுகோடு பழைய y அச்சுக்கு இணையான கோடு ஆகும்.

IV அணுகுகோடுகள் :

(i) சமன்பாடு (1)-லிருந்து

$$y = x\left(1 + \frac{a}{x}\right)^{1/3}$$

$$= x\left[1 + \frac{a}{3x} - \frac{a^2}{9x^2} + \dots\dots\dots\right]$$

$\therefore$ ஒரே மெய் அணுகுகோடாவது

$$y = x + \frac{a}{3}$$

(ii) $y = x + \frac{a}{3} - \frac{a^2}{9x} + \dots\dots$ என்ற வளைகோட்டு வடிவத்திலிருந்து y அச்சின் இருபுறமும் எண்மதிப்பில் y ஆனது $x + \frac{a}{3}$-ஐ விடக் குறைந்தது எனத் தெரிகிறது.

(ii) $y = x + \frac{a}{3}$ என்ற அணுகுகோட்டுக்கு வலப்புறம் கீழாகவும், இடப்புறம் மேலாகவும் அமைந்துள்ளது.

(iii) வளைகோடு அணுகுகோட்டை $\left(-\frac{a}{9}, \frac{2a}{9}\right)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகிறது.

V பெருமம், சிறுமம் முதலியன:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 2ax}{3y^2}$$

(i) $x = -a$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = \infty$

எனவே $(-a, 0)$-ல் தொடுகோடு (முன்பு கூறியபடி) y அச்சுக்கு இணை.

(ii) $x = \dfrac{-2a}{3}$ எனில் $\dfrac{dy}{dx} = 0.$

அதாவது $\left(\dfrac{-2a}{3}, \dfrac{a}{2}\right)$-ல் தொடுகோடு x அச்சுக்கு இணையாகும்.

VI எல்லைகள் ;

x மிகையாக y-ம் மிகை.

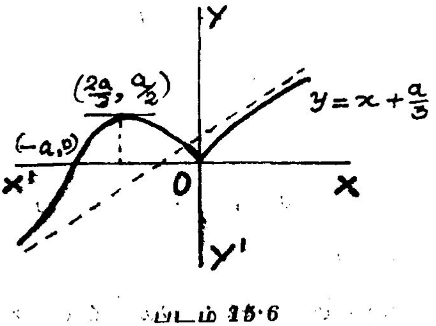
x குறையுாவும், 0-க்கும் $-a$-க்கும் இடையாக அமைந்தால் y-மிகை.

$x = -a$ எனில் $y = 0$

$x < -a$ எனில் y குறை.

எனவே வளைகோடு

என்பது போன்ற வடிவம் கொண்டுள்ளது.



படம் 15·6

எடுத்துக்காட்டு 7 :

$(y - x)^2 x - 3y(y - x) + 2x = 0$ என்ற சமன்பாடுடைய வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

வளைகோட்டின்சமன்பாடு

$$(y - x)^2 x - 3y(y - x) + 2x = 0 \qquad \ldots (1)$$

I சமச்சீர் :

வளைகோட்டுச் சமச்சீர் இல்லை.

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதி வழி செல்கிறது

ஆதியில் தொடுகோடு $x = 0$, அதாவது y அச்சு

III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

வளைகோடு இரு அச்சுக்களையும் வெட்டவில்லை.

IV அணுகுகோடுகள் :

(i) y அச்சுக்கு இணையான அணுகுகோடு $x = 3$.

(ii) சாய்ந்த அணுகுகோடுகள் $y - x = 0$-க்கு இணை.

அவை

$$(y - x)^2 - 3(y - x) \operatorname{Lt} \frac{y}{x} + \operatorname{Lt} 2 = 0$$

(அது) $\quad (y - x)^2 - 3(y - x) + 2 = 0$

(அது) $\quad [y - x - 2][y - x - 1] = 0$

$$\operatorname{Lt} \frac{y}{x} = 1 \text{ ஆக அமைய } x \to \infty \quad y \to \infty$$

சாய்ந்த அணுகுகோடுகள்

$$y - x - 2 = 0, \quad y - x - 1 = 0$$

(iii) (1)-லிருந்து

$$y = \frac{[x(2x-3) \pm \sqrt{[\{4x^4 - 9x^2 - 12x^3 - 4(x^4 + 2x^2 - 3x^3 - 6x\})]}}{2(x-3)}$$

$$= \frac{[x(2x - 3) \pm \sqrt{x \cdot x + 24)}]}{2(x - 3)}$$

$$= x\left[\left(1+\frac{3}{2x}\right) \pm \frac{1}{2x}\sqrt{1+\frac{24}{x}}\right] \Big/ \left(1-\frac{3}{x}\right)$$

$$= x\left[\left(1-\frac{3}{2x}\right) \pm \frac{1}{2x}\left(1+\frac{12}{x}+\cdots\right)\right]\left(1-\frac{3}{x}\right)^{-1}$$

$$= x\left[1-\frac{3}{2x} \pm \frac{1}{2x}\left(1+\frac{12}{x}+\cdots\right)\right]\left[1+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}+\cdots\right]$$

$$= x\left[1-\frac{3}{2x} \pm \frac{1}{2x} \pm \frac{6}{x^2}+\frac{3}{x}+\frac{9}{x^2}-\frac{9}{2x^2} \pm \frac{3}{2x^3}\right] + \cdots\cdots$$

$$= x\left[1+\frac{(3 \pm 1)}{2x}+\frac{(\pm 12+18-9 \pm 3)}{2x^2}\right] + \cdots\cdots$$

$$= x\left[1+\frac{3 \pm 1}{2x}+\frac{(9 \pm 15)}{2x^2}\right] + \cdots\cdots$$

$$= x+2+\frac{12}{x}+\cdots\cdots \text{ அல்லது } x+1-\frac{3}{x}+\cdots\cdots \qquad (3)$$

எனவே முதல் கால்வட்டப் பகுதியில், x-ன் பெரிய மதிப்புகளுக்கு, $y = x + 2$ என்ற அணுகுகோட்டுக்கு மேல்புறம் ஒரு கிளையும், $y = x + 1$ என்ற அணுகுகோட்டுக்கு கீழ்புறம் ஒரு கிளையும் அமைந்துள்ளது.

IV எல்லைகள் :

(i) $x = 0$ எனில் $y = 0$; x-ன் சிறு மிகை மதிப்புகளுக்கு, $\sqrt{x} > x$ ஆதலால் y-ன் இரு மதிப்புகளும் எதிர் குறியீடுகள் கொண்டன.

(ii) $x = 1$ எனில் (2)-லிருந்து

$$y = [-1 \pm \sqrt{25}]/(-4) = -1,\ 3/2$$

$x = \frac{3}{2}$ எனில் $y =$ தோராயமாக ± 2

$x = 2$ எனில் $y = \frac{(-2 \mp 7)}{2} = -4\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{2}$ (தோராயமாக)

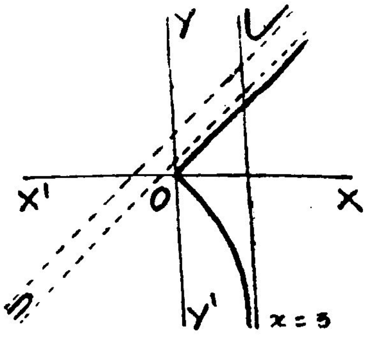
$x = 3$ எனில் y-ன் பின்னமேல் பகுதி மதிப்பு $9 \pm \sqrt{81}$ அல்லது 9 ± 9 ஆகவும் பின்ன கீழ்ப்பகுதி மதிப்பு 0 ஆகவும் ஆகும்.

x-க்கு 3-க்கு நெருக்கமான 2·9 என்ற மதிப்பிட்டால்

$$\frac{[x(2x-3) - \sqrt{x}\sqrt{x+24}]}{2(x-3)}$$ என்பது 3·7 என்ற மதிப்பாக தோராயமாக வரும்.

x ஆனது 3-ஐ விட சற்று பெரிதாக இருக்கையில் (2)-ல் வர்க்க மூலக் குறியீட்டுக்கு முன் மிகை மதிப்பு தருவதானல் கிடைக்கும் y மதிப்பு மிகப் பெரிதாக மிகையாக அமையும்;

வர்க்கமூலக் குறியீடுமுன் குறை மதிப்பு தருவதினல் y-க்கு 3·7 மதிப்பு கிடைக்கும்.



படம் 15·7

(iii) (2)-லிருந்து $x = 4$ எனில்

$$y = [4 \cdot 5 \pm \sqrt{112}]/2 = 10 \pm 5 \cdot 3$$

$$= 15 \cdot 3,\ 4 \cdot 7$$

(2)-ல் $x = 5$ பதிலிட

$$y = [5 \cdot 7 \pm \sqrt{5 \cdot 29}]/4$$

$$= 12,\ 6 \text{ தோராயமாக}$$

(iv) x குறையெனில், $x = 0$-க்கும்

$x = -24$-க்கும் இடையே y கற்பனை.

$x = -24$ எனில்

$$y = -(-24 \times 51) \times 54 = -22\ 7$$

அதாவது x-ன் குறை மதிப்புகளுக்கு வளைகோடு இரு அணுகு கோடுகளுக்கு இடையில் முற்றிலும் அமையும். அதன் வரை வடிவம் தரப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 8 :

$y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

$y = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு

I சமச்சீர் :

y அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

ஆதி வழி வளைகோடு செல்லவில்லை.

III வெட்டுத் துண்டங்கள் :

$x = 0$ என வளைகோட்டில் பிரதியிட $y = -1$

∴ y அச்சை வளைகோடு $(0, -1)$-ல் வெட்டும். ஆதியை இப் புள்ளிக்கு மாற்ற சமன்பாடு

$$y - 1 = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

(அது) $(y - 1)(x^2 - 1) = x^2 + 1$

(அது) $yx^2 - y - 2x^2 = 0$

என்றாகும்.

புது ஆதியில் தொடுகோடு $y = 0$ என்ற புதிய x அச்சு. எனவே $(0, -1)$-ல் தொடுகோடு பழைய x அச்சுக்கு இணை.

IV அணுகுகோடுகள் :

$y(x^2 - 1) = x^2 + 1$

ஆதலால் x, y-ன் உச்சப்படி கெழுக்களை பூச்சியத்துடன் சமன் படுத்த

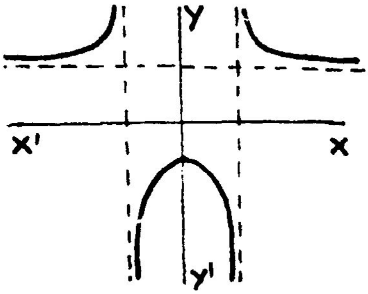
$$x^2 - 1 = 0, \quad y - 1 = 0$$

அதாவது $x = 1$, $x = -1$, $y = 1$ என அணுகுகோடுகள் கிடைக்கின்றன.

V எல்லைகள்

1-லிருந்து ∞-க்கு x அதிகரிக்க, ∞-லிருந்து 1-க்கு y குறையும்; 0-லிருந்து 1-க்கு x அதிகரிக்க, -1-லிருந்து ∞-க்கு y குறையும் ($\therefore$ $x > 1$ எனில் y மிகை; 0-லிருந்து 1 வரை x எனில் y குறை.

வளைகோட்டின் படம் பின்வருமாறு



படம் 15·8

எடுத்துக்காட்டு 9 :

$x^5 y^2 = (1 + y)^3 (4 - y^2)$ என்ற சமன்பாடுடைய வளை கோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

I சமச்சீர் :

y அச்சைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதி வழி செல்லாது.

III வெட்டுத் துண்டங்கள் :

y அச்சான $x = 0$-ஐ $(0, -1)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$ ஆகிய புள்ளிகளில் வெட்டும்.

$(0, -1)$ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்ற சமன்பாட்டின் புதிய வடிவம்

$$x^2 (y - 1)^2 = y^2 (4 - y^2 + 2y - 1)$$

∴ $(0, -1)$ என்ற புதிய ஆதியில் தொடுகோடுகள்

$$x^2 = 3y^2 \quad (\text{அது}) \; x = \pm y\sqrt{3}$$

எனவே $(0, -1)$-ல் கணுப்புள்ளி இருக்கிறது.

$(0, 2)$ என்ற புள்ளிக்கு ஆதியை மாற்றம் செய்தால் சமன் பாட்டின் புதிய வடிவம்

$$x^2 (y + 2)^2 = (y + 3)^2 (-y^2 - 4y)$$

எனவே $(0, 2)$-ல் தொடுகோடு புதிய $y = 0$;

அல்லது பழைய x அச்சுக்கு இணைகோடு.

இவ்வாறே $(0, -2)$-ல் தொடுகோடும்

பழைய x அச்சுக்கு இணைகோடு.

III அணுகுகோடு :

$y = 0$ என்பது அணுகுகோடு

IV எல்லைகள் :

x^2-க்கு சமன்பாட்டைத் தீர்வு காண்போம்.

$$x^2 = \frac{(1 + y)^2 (4 - y^2)}{y^2} = (1 + y)^2 \left(\frac{4}{y^2} - 1\right)$$

∴ $y < 2$ எனில் x கற்பனை.

y குறைந்து பூச்சியத்தை அணுக, x^2 அதிகரித்து முடிவிலியை அணுகுகிறது.

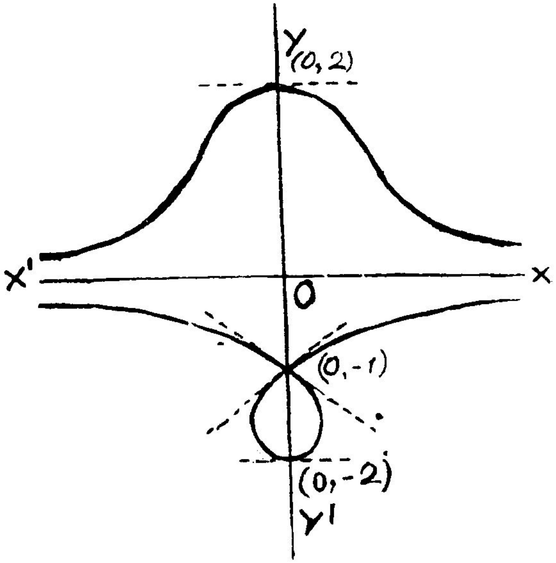
மற்றும் y குறை எண்ணாகவும், எண்மதிப்பில் 2-ஐ விடப் பெரிதாகவும் இருந்தால் x கற்பனை. கீழிருந்து $y \to 0$ எனில், $x^2 \to \infty$.

$y = -1$ எனில் $x = 0$.

$y = -2$ எனில் மீண்டும் $x = 0$.

$\therefore$ $y = -1$, $y = -2$ இடையே வளையம் ஒன்றுள்ளது.

வளைகோட்டின் தோராய வடிவம் தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 15·9

எடுத்துக்காட்டு 10 :

$x^3 + y^3 = 3\,axy$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

$$x^3 + y^3 = 3\,axy \qquad \ldots (1)$$

என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு. [இவ்வளைகோடு டேகார்ட்டின் இலையம் (Folium of Descartes) எனப்படும்.]

I சமச்சீர் :

x-ம் y-ம் பரிமாற்றம் செய்து பிரதியிடுவதனால் வளைகோட்டின் சமன்பாடு மாறாது. $\therefore$ $y = x$ என்ற நேர்க்கோட்டைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது,

II ஆதி :

வளைகோடு ஆதிவழி செல்கிறது. ஆதியில் தொடுகோடுகள் $xy = 0$. (அது) $x = 0$, $y = 0$. எனவே இரு அச்சுகளும் தொடுகோடுகள்.

III வெட்டுத்துண்டங்கள் :

$y = x$ என்ற கோடு வளைகோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் $(0, 0)$, $(3a/2,\ 3a/2)$ எனக் கிடைக்கிறது.

IV பெருமம், சிறுமம் முதலியன :

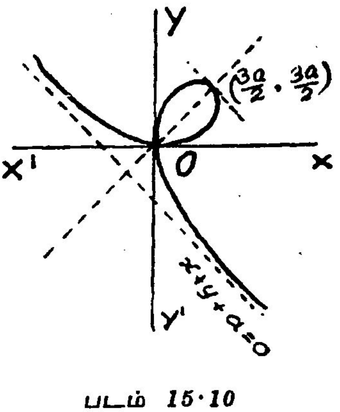
(1)-ஐ வகையிடு செய்ய

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 3a\left[x\frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right]$$

(அது) $(y^2 - ax)\dfrac{dy}{dx} = (ay - x^2)$

(அது) $$\frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$\left(\dfrac{3a}{2}, \dfrac{3a}{2}\right)$-ல் $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a(3a/2) - (3a/2)^2}{(a/2)^2 - a(3a/2)} = -1$



படம் 15·10

$\therefore \left(\dfrac{3a}{a}, \dfrac{3a}{2}\right)$-ல் வளைகோட்டின் சாய்வு வீதம் $= -1$; சாய்வுக் கோணம் $135°$.

பயிற்சிகள் 15 (A)

கவட்டினைக் காண்க.

1. (a) $y = x^3$

   (b) $a^2 y = x^3$

   (c) $y = x(x^2 - 1)$

   (d) $y = x(x^2 + 1)$

2. (a) $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$

   (b) $y^2(a - x) = x^2(a + x)$

   (c) $y^2 = \frac{x^2(x + a)}{(x - a)}$

   (d) $xy^2 + (x + a)^2(x + 2a) = 0$

3. (a) $3ay^2 = x^2(a - x)$

   (b) $ay^2 = x(x - a)^2$

   (c) $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$

4. (a) $y(x^2 + 4a^2) = 8a^3$

   (b) $y^2(a + x) = a^2(a - x)$

   (c) $xy^2 = 4a^2(2a - x)$

   (d) $x(x^2 + y^2) = a(2x^2 + y^2)$

5. (a) $y^2(x^2 + y^2) + a^2(x^2 - y^2) = 0$

   (b) $x^2(a^2 - x^2) = 8a^2y^2$

6. (a) $x^3 + y^3 = a^2 x.$

   (b) $x^3 + y^3 = ax^2$

7. (a) $ay^2 = x^3$

   (b) $ay^2 = x(y - x)^2$

   (c) $y^2(x + a) = (x - a)^3$

   (d) $ay^2 = x^2 y + x^3$

8. (a) $(x^2 - 1)y^2 = x$

(b) $x^2 y^2 = (x^2 - a^2)$

(c) $x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$

(d) $y^2 (2a - x) = x^3$

(e) $y^2 (x + 2) = (x + 1)$

(f) $xy^2 = a^2 (x - a)$

(g) $y = \dfrac{x^3 + ax^2 + a^3}{(x^2 - a^2)}$; இங்கே $a > 0$.

(h) $x (x - 2a)y^2 = a^2 (x - a)(x - 3a)$

(i) $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2 b^2$

9. (a) $x^3 - y^3 = 3\,axy$.

(b) $x^4 + y^4 = 4a^2\,xy$.

(c) $x^4 + y^4 = a^4 (x^2 - y^2)$

(d) $x^5 + y^5 = 5a\,x^2 y^2$.

10. (a) $y = (x - 2)(x + 1)^2$

(b) $x^3 y = (x + 1)$

(c) $a^4 y^2 = x^5 (2a - x)$

(d) $y^2 = (x - 2)^2 (x - 5)$

(e) $ay^2 = (x^2 + y^2)\,x$.

(f) $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$; இங்கே $a > b > c$.

(g) $(x - y)^2 (x + y)(2x + y) = a^2 y^2$

(h) $y^2 (x + 3a) = x (x - a)(x - 2a)$

(i) $\dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{b^2}{y^2} = 1$

(j) $x^3 = y^2 (x + 1)^3$

(k) $(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$

(l) $y^2 (2a - x) = x.$

11. $(1 + x)y^2 = (1 - x)x^2$ என்ற வளைகோடு முற்றிலும் $x = -1, x = +1$ என்ற கோடுகளுக்கிடையே அமையும் என நிறுவுக. $x = -1$ என்பது அதன் ஒரே மெய்யான அணுகு கோடு என்றும் நிறுவுக. வளைகோட்டின் சுவட்டினை வரைக.

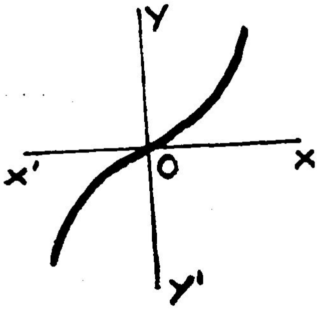
12. $x^3 + y^3 = ax^2$ என்ற வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க. $a > 0$ எனில் அதற்கு ஆதியில் முதலினத்தைச் சேர்ந்த கூர்ப்புள்ளி உண்டென்றும், $(a, 0)$-ல் வளைவு மாற்றப் புள்ளி உண்டென்றும் நிறுவுக.

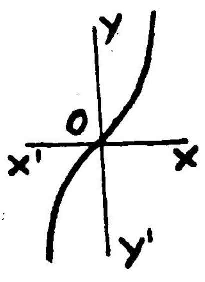
13. $x^2 (x^2 - 4a^2) = y^2 (x^2 - a^2)$ என்ற வளைகோட்டில் ஆதியின் தன்மையை முற்றிலும் ஆராய்ந்து, சுவட்டினை வரைக.

14. $ay^2 = x^2y + x^3$ என்ற வளைகோட்டிற்கு, ஆதியில் முதலினத்தைச் சேர்ந்த கூர்ப்புள்ளி உண்டென்றும், வளைகோட்டை $(a/2, a/2)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டும் $x + y = a$ என்ற அணுகு கோடு உண்டென்றும் நிறுவுக. வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

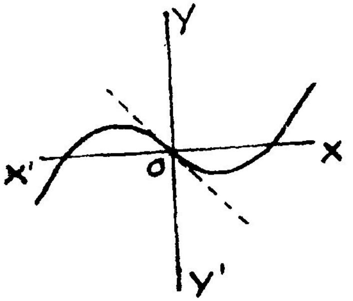
விடைகள் 15 (A)

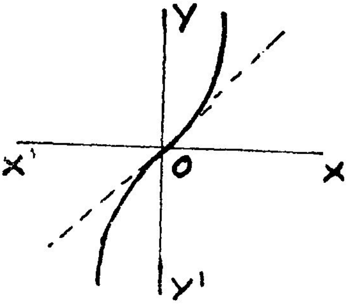
1. (a) $y = x^3$ (b) $a^2y = x^3$



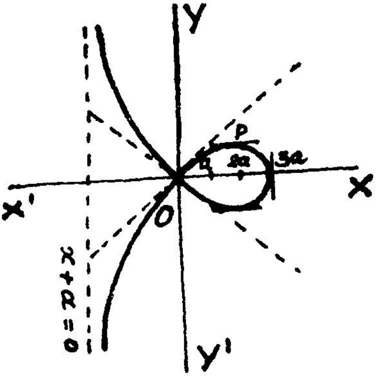


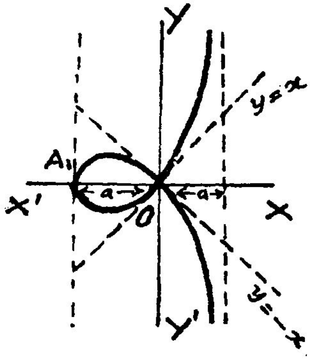
(c) $y = x(x^2 - 1)$ (d) $y = x(x^2 + 1)$



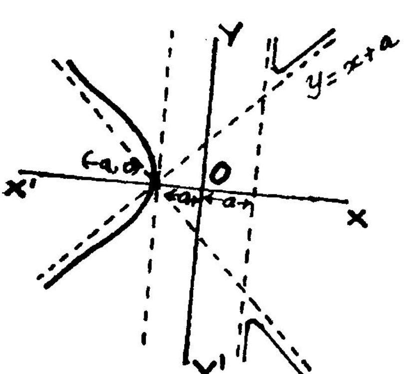


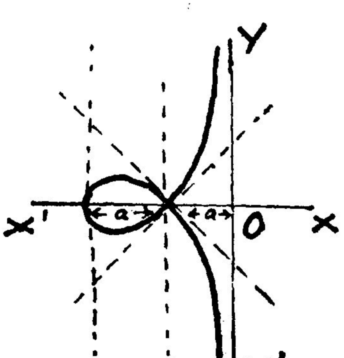
2. (a) $y^2(a+x) = x^2(3a - x)$ (b) $y^2(a - x) = x^2(a + x)$



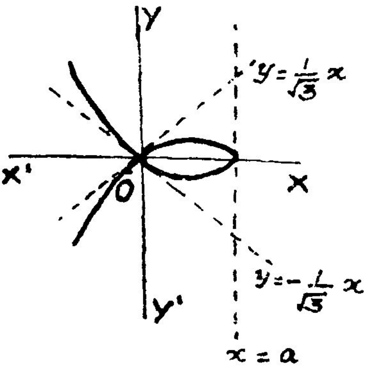


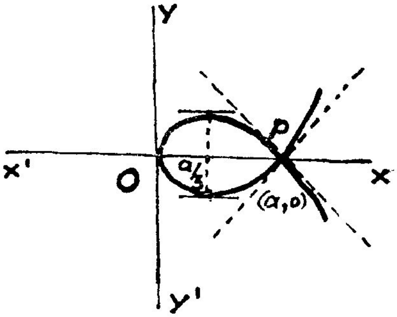
(c) $y^2 = \frac{x^2(x+a)}{x - a}$ (d) $xy^2 + (x+a)^2(x+2a) = 0$



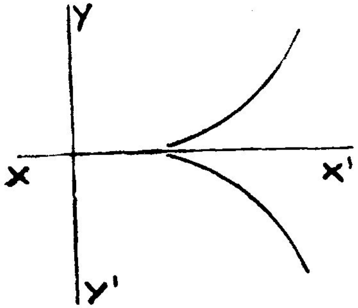


3. (a) $3ay^2 = x^2(a - x)$ (b) $ay^2 = x(x - a)^2$

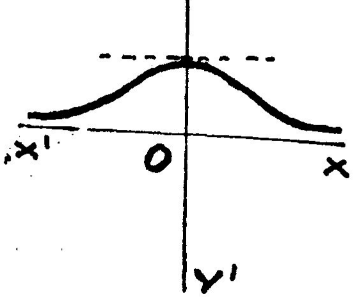


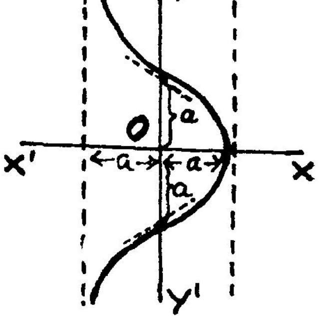


(c) $27ay^2 = 4(x - 2a)^3$

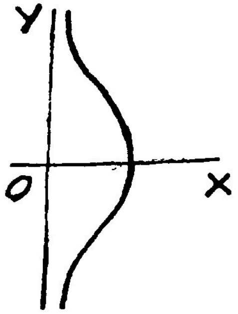


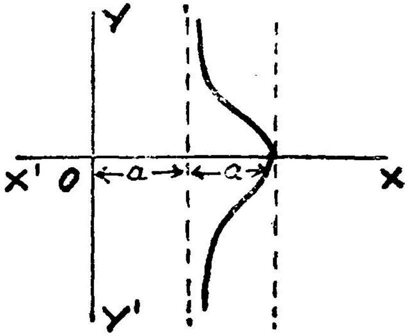
4. (a) $y(x^2 + 4a)^2 = 8a^3$ (b) $y^2(a + x) = a^2(a - x)$



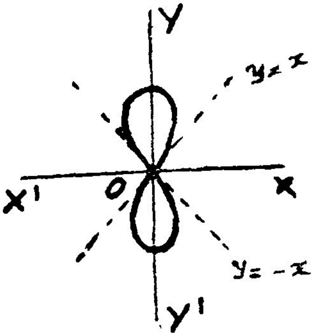


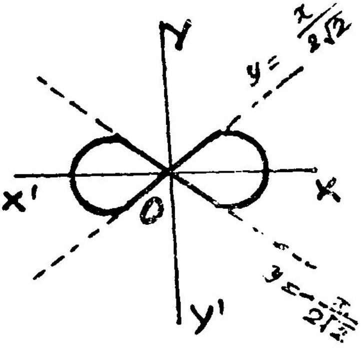
(c) $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ (d) $x(x^2+y^2) = a^2(2x^2+y^2)$



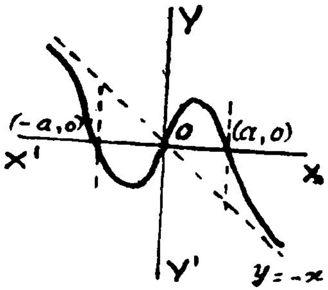


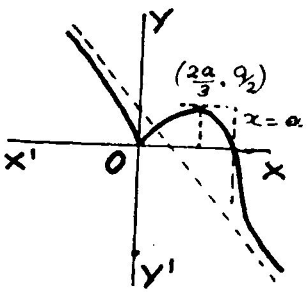
5. (a) $y^2(x^2 \; 4y^2)+a^2(x^2-y^2)=0$ (b) $x^2(a^2-x^2) = 8a^2y^2$



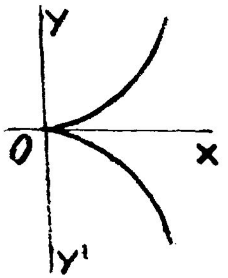


6. (a) $x^3+y^3=a^2x$ (b) $x^3+y^3=ax^2$

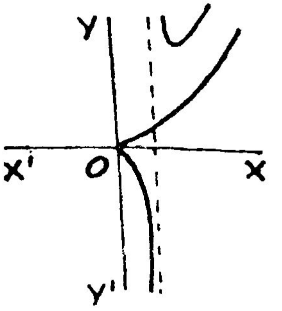




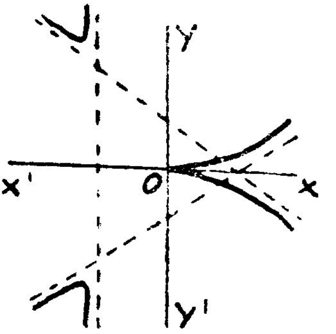
7. (a) $ay^2 = x^3$



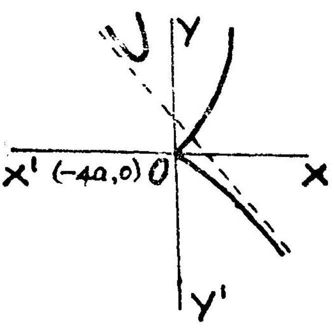
(b) $ay^2 = x(y-x)^2$



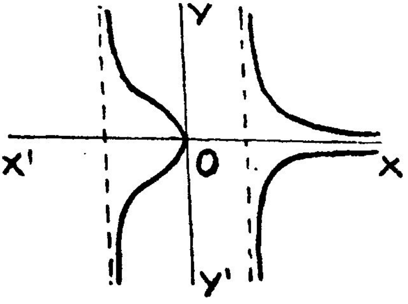
(c) $y^2(x+a) = (x-a)^3$



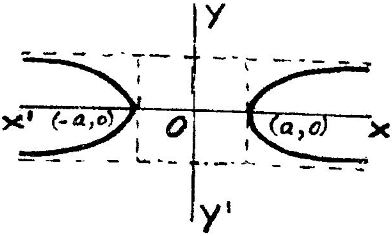
(d) $ay^2 = x^2y+x^3$



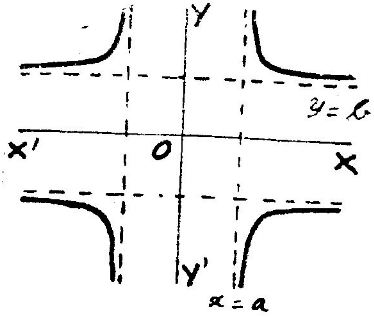
8. (a) $(x^2 - 1)y^2 = x$



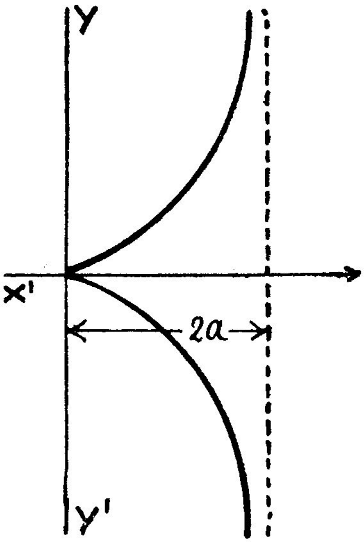
(b) $x^2 y^2 = (x^2 - a^2)$



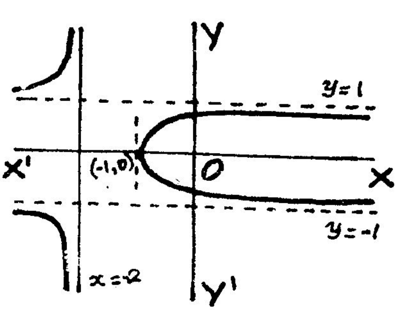
(c) $x^2 y^2 = a^2 (x^2 + y^2)$



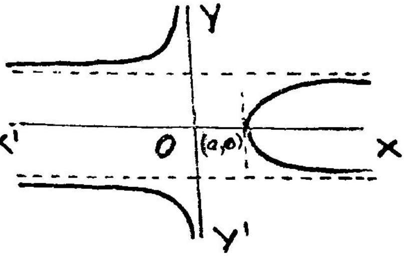
(d) $y^2 (2a - x) = x^3$



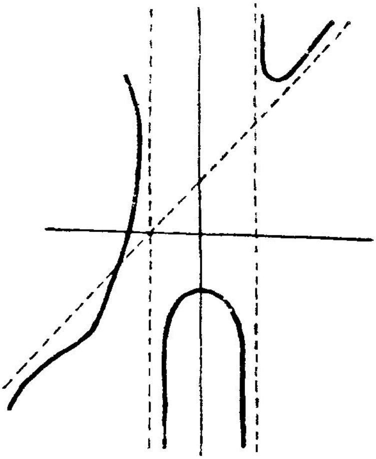
(e) $y^2 (x + 2) = x + 1$



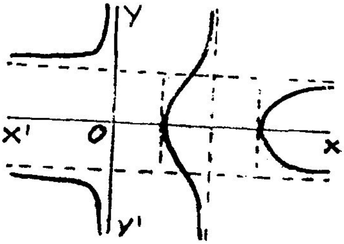
(f) $xy^2 = a^2(x-a)$



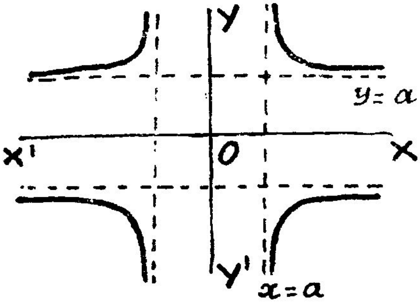
(g) $y = \dfrac{x^3 + ax^2 + a^3}{(x^2 - a^2)}$ இங்கே $a > 0$



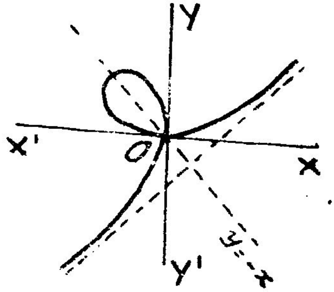
(h) $x(x-2a)y^2 = a^2(x-a)(x-3a)$



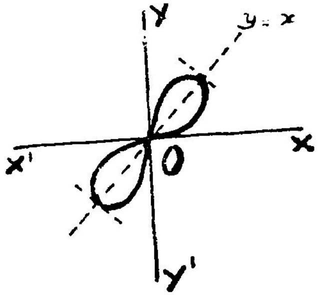
(i) $(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) = a^2 b^2$



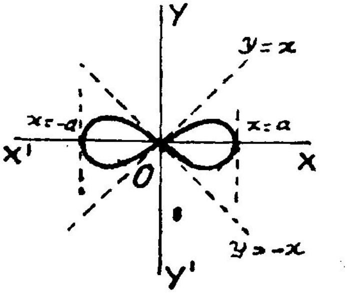
9. (a) $x^3 - y^3 = 3axy$



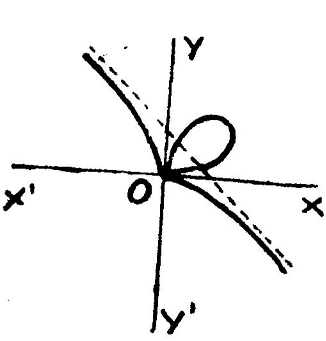
9. (b) $x^4 + y^4 = 4a^2 xy$



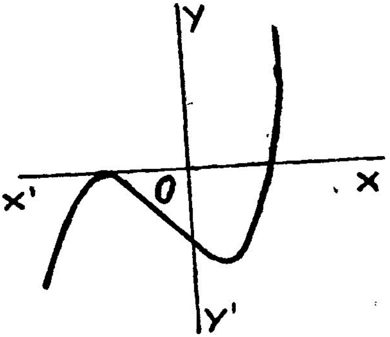
(c) $x^4 + y^4 = a^4 (x^2 - y^2)$



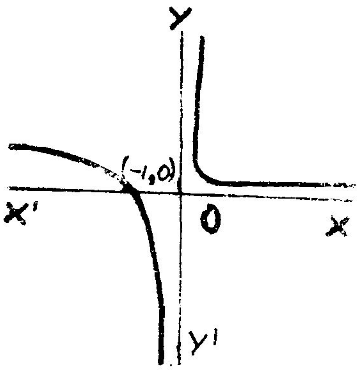
(d) $x^5 + y^5 = 5a x^2 y^2$



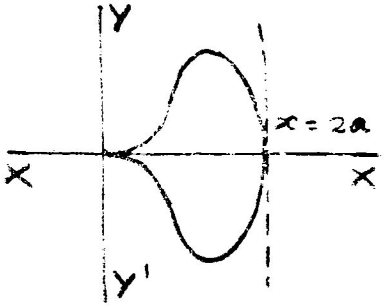
10. (a) $y = (x-2)(x+1)^2$



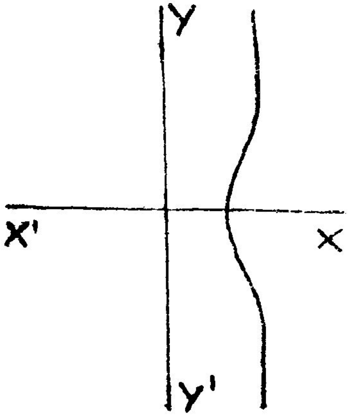
10. (b) $x^2y = x + 1$



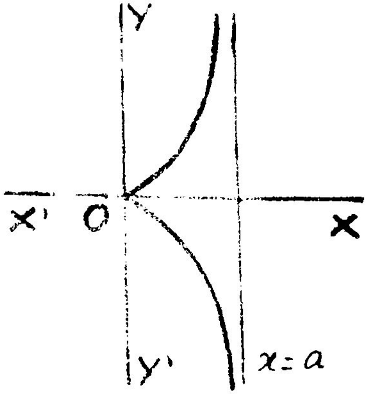
(c) $a^4y^2 = x^5(2a-x)$



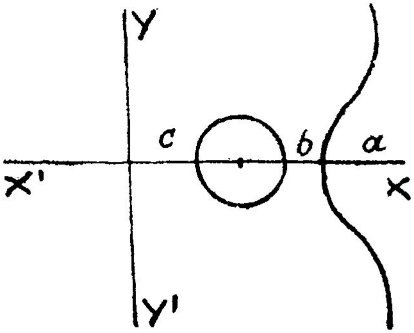
(d) $y^2 = (x-2)^2(x-5)$



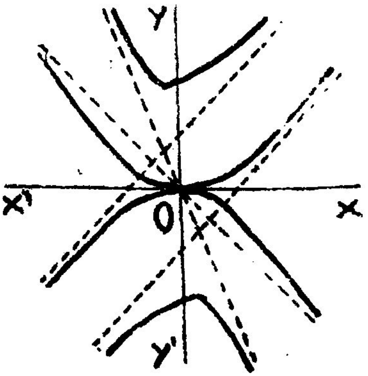
(e) $ay^2 = (x^2+y^2)x$



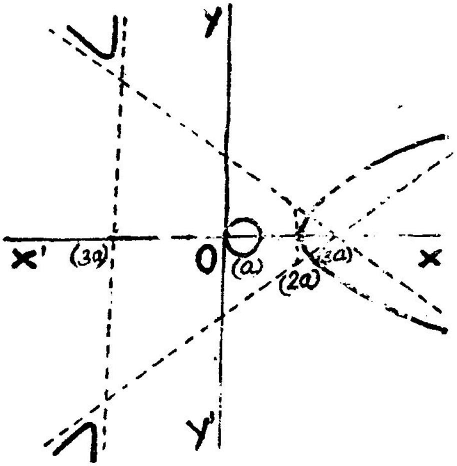
(f) $y^2 = (x-a)(x-b)(x-c)$

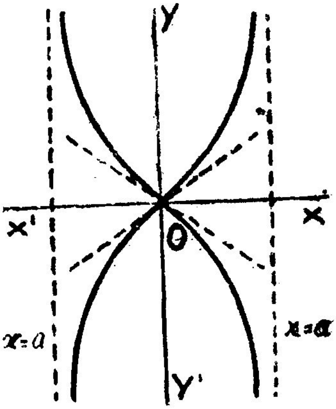


(g) $(x-y)^2(x+y)(2x+y) = a^2$ [illegible]

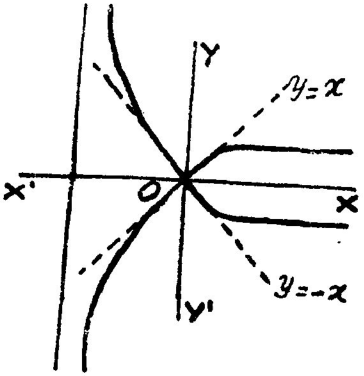


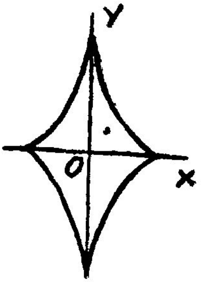
(h) $y^2(x+3a) = x(x-a)(x-2a)$ (i) $\frac{a^2}{x^2} - \frac{b^2}{y^2} = 1$



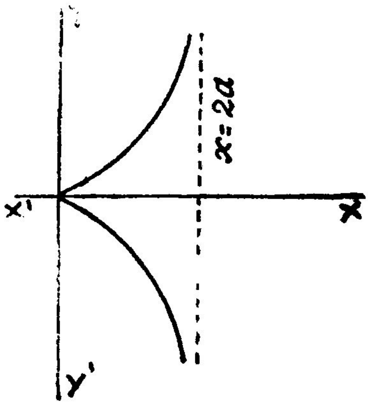


(j) $x^2 = y^2(x+1)^3$ (k) $(ax)^{2/3}+(by)^{2/3} = (a^2-b^2)^{2/3}$





(l) $y^2(2a - x) = x$

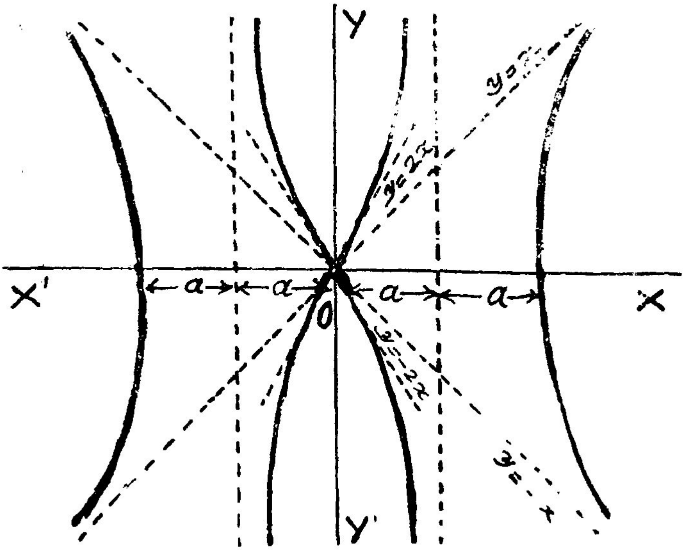


11. $(1+x)y^2 = (1-x)x^2$
எ. கா. 2-ல் $a = 1$ எனப்பிரதியிடுக

12. $x^3 + y^3 = ax^2$
6 (b) பார்க்கவும்

13. $x^2(x^2-4a^2) = y^2(x^2-a^2)$

14. $ay^2 = x^2y + x^3$
7 (d) பார்க்கவும்



§ 15-2. துணை அலகு அமைப்பில் சமன்பாடுடைய வளைகோட்டின் சுவடு

இப்பகுதியில் துணை அலகுகளில் அமைப்பு பெற்றுள்ள வளைகோடுகளின் சுவட்டினைக் காண்பது பற்றி ஆராய்வோம்.

I வளைகோட்டின் கட்டுப்பாடுகள் :

வளைகோட்டின் சமன்பாடு $x = \phi(t)$ $y = \psi(t)$ எனில், x, y ஆகியனவற்றிற்கு மிகப் பெரிய, மிகச் சிறிய மதிப்புக்களை இயலுமானால் கண்டுபிடிக்கவும். இதிலிருந்து இரு அச்சுக்களுக்கும் இணையான எக்கோடுகளுக்கிடையே வளைகோடு இடம்பெறும் அல்லது இடம் பெறாது என அறிய முடியும்.

II சமச்சீர் :

(i) $\phi(t)$ என்பது t-ல் இரட்டைப்படைச் சார்பலனாக இருந்து, $\psi(t)$; t-ல் ஒற்றைப்படைச் சார்பலனாக இருந்தால், வளைகோடு x அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$x = at^2$, $y = 2at$ என்பது x அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்ற பரவளையம்.

(ii) $\phi(t)$ t-ல் ஒற்றைப்படைச் சார்பலனாக இருந்து, $\psi(t)$, t-ல் இரட்டைப் படைச் சார்பலனாக இருந்தால் வளைகோடு y அச்சைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

(iii) $\phi(t)$, $\psi(t)$ என்பன, t-ல் ஒற்றை படைச் சார்பலன்களானால் வளைகோடு எதிர்எதிர் கால்வட்டப் பகுதிகளில் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$x = ct, \; y = \frac{c}{t}$$

III ஆதி :

(i) $x = 0$, பிரதியிட t-க்கு ஒரு மெய் மதிப்பு கிடைத்து அம்மதிப்பிற்கு $y = 0$ எனில் வளைகோடு ஆதி வழியே செல்லும்,

(ii) வளைகோட்டிற்கும் அச்சுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளிகளைக் காண்க.

IV அணுகுகோடுகள் :

அணுகுகோடுகள் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

V புள்ளிகள் :

$\frac{dy}{dx} = 0$, $\frac{dy}{dx} = \infty$ என்னுமாறு வளைகோட்டில் அமையும் புள்ளிகளைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

VI எல்லைகள் :

(i) வளைகோடு இடம் பெறாத பகுதிகளைக் காண்க.

(ii) பொருத்தமான t இடைவெளிகளில் $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ ஆகியவற்றின் குறியீடுகளைக் கருதுக.

(iii) பொருத்தமான t மதிப்புகளுக்கு x, y, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dy}{dx}$ ஆகியவற்றின் மதிப்புக்களைக் கருதுக.

(iv) x, y என்பன பொதுவான அலைவுக் காலத்தில் (period) திரும்புச் சார்புகளாக இருப்பின் வளைகோட்டின் ஒரு அலைவுக்கால வட்டத்தை மட்டும் ஆராய்தல் போதுமானது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

பின்வரும் வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

$$x = a(\theta + \sin\theta)$$
$$y = a(1 - \cos\theta)$$

தீர்வு :

I எல்லைகள் :

y-க்கு பெரும மதிப்பு $2a$, சிறும மதிப்பு 0

∴ வளைகோடு $y = 0$, $y = 2a$ ஆகிய இருகோடுகளுக்கிடையே அமையும்.

II சமச்சீர் :

$a(\theta + \sin\theta)$ என்பது θ-ல் ஒற்றைப்படைச் சார்பலன்; $a(1 - \cos\theta)$ என்பது θ-ல் இரட்டைப்படைச் சார்பலன். ∴ வளைகோடு y அச்சைப் பொருத்து சமச்சீர் உள்ளது.

III ஆதி :

(i) $x = 0$ எனில், $(\theta + \sin\theta) = 0$ அல்லது $\theta = 0$. அப்போது $y = 0$

∴ வளைகோடு ஆதி வழி செல்கிறது.

(ii) வளைகோடு x அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் காண $y = 0$ பிரதியிடுக. அப்போது $1 - \cos\theta = 0$. (அது) $\theta = 0$ அப்போது $x = 0$; எனவே ஒரு வெட்டும் புள்ளி $(0, 0)$.

$x = 0$ பிரதியிட $\theta + \sin\theta$ அது $\theta = 0$ அப்போது $y = 0$ எனவே வளைகோடு y அச்சை வெட்டுவதும் $(0, 0)$-ல் தான்.

IV அணுகுகோடுகள் :

$\theta \longrightarrow \infty$ எனில், $x \longrightarrow \infty$ அப்போது y எந்த எல்லையையும் அணுகாது.

∴ x அச்சுக்கு இணையான வளைகோட்டுக்கு அணுகுகோடுகள் ஏதுமில்லை.

cos θ எண் மதிப்பில் 1-ஐ விடப் பெரிதாக இருக்க முடியாது ஆதலால், y ஆனது ∞-ஐ அணுக முடியாது.

$\therefore$ y அச்சுக்கு இணையாகவும் வளைகோட்டுக்கு அணுகு கோடுகள் ஏதுமில்லை.

V பெருமம் சிறுமம், முதலியன

$$\frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta = 2\, a \sin \theta/2 \cos \theta/2.$$

$$\frac{dx}{d\theta} = a\,(1 + \cos \theta) = 2a \cos^2 \theta/2$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \tan \theta/2$$

எனவே $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ஆக, $\theta/2 = 0$ அல்லது $\theta = 0$

$\dfrac{dy}{dx} = \infty$ ஆக $\tan \dfrac{\theta}{2} = \infty$ அல்லது $\theta = \pi$

$\therefore$ வளைகோட்டுத் தொடுகோடுகள் $(0, 0)$-ல் x அச்சுக்கு இணையாகவும், $(a\pi,\ 2a)$ என்பது போன்ற புள்ளிகளில் x அச்சுக்கு செங்குத்தாகவும் இருக்கும்.

VI எல்லைகள் :

(i) $y = 2\, a \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$ (அது) $\sin \dfrac{\theta}{2} = \sqrt{\dfrac{y}{2a}}$.

எனவே y குறையானால், θ கற்பனை.

$\therefore$ x அச்சுக்கு கீழே, வளைகோட்டுப்பகுதி ஏதுமில்லை.

(ii) பின்வருமாறு பட்டியல் ஒன்று அமைப்போம்:

t	0	$\pi/2$	π	2π	$-\pi/2$	$-\pi$
x	0	$a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$	$a\pi$	$2a\pi$	$-a\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$	$-a\pi$
y	0	a	$2a$	0	a	$2a$
$\frac{dy}{dx}$	0	1	∞	0	-1	$-\infty$

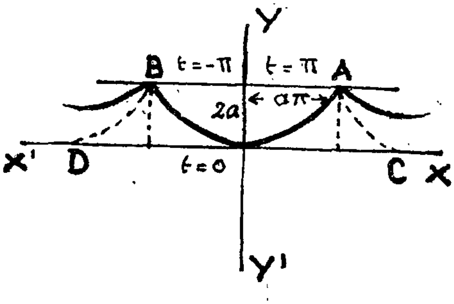
எனவே $(0, 0)$, $[a(\pi/2 + 1), a]$, $(a\pi, 2a)$, $(2a\pi, 0)$. $[-a(\pi/2 + 1), a]$, $(-a\pi, 2a)$ ஆகிய புள்ளிகள் வளைகோட்டில் அமைகின்றன.

(iii) x ஆனது O-லிருந்து $a\pi$-க்கு அதிகரிக்க, y-ம் O-லிருந்து $2a$-க்கு அதிகரிக்கும். ஆனால் x தொடர்ந்து $2a\pi$-க்கு அதிகரித்தால், y ஆனது O-க்கு மீண்டும் குறைந்து விடும்.

எனவே O-லிருந்து 2π வரை t-ன் மிகை மதிப்புகளுக்கு, முதல் கால்வட்டப் பகுதியில் வளைகோட்டின் $OA\,B_1$ என்ற பகுதியை வரைந்து கொள்வோம். x-ன் தொடர்ந்த அதிகரிப்புக்கு இயைந்து y-ன் அதிகரிப்பு OA_1B_1 போன்றே அமையும்.

எனவே வளைகோடு x அச்சின் இருபுறமும் முடிவிலி வரை மேற்கண்ட வளைவுக்கு முற்றிலும் சர்வசமமான வளைவுகளைக் கொண்டதாக அமையும்.

வளைகோட்டின் தோராய வடிவம் [உருள் வளை (cycloid) எனப் பெயர் பெற்றது] படத்தில் காட்டப்படுகிறது.



படம் 15·11

பயிற்சிகள் 15 (B)

1. சுவட்டினைக் காண்க :

(a) $x = a\cos\phi$.
$y = a\sin\phi$

(b) $x = at^2$
$y = 2\,at$

(c) $x = a(\theta + \sin\theta)$

$y = a(1 + \cos\theta)$

(d) $x = \dfrac{a(1 - t^2)}{1 + t^2}$

$y = \dfrac{at(1 - t^2)}{1 + t^2}$

(e) $x = a\cos^3\theta$

$y = a\sin^3\theta$

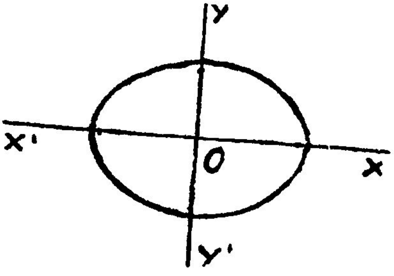
(f) $x = a\cos t + \dfrac{1}{2} a \log\tan^2 \dfrac{t}{2}$

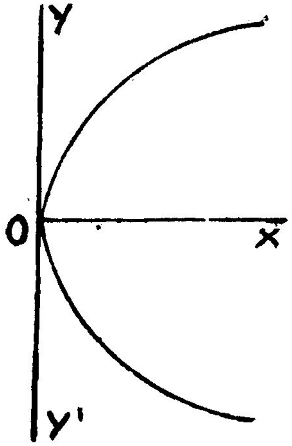
$y = a\sin t$

விடைகள் 15 (B)

1. (a) $x = a\cos\phi$, $y = a\sin\phi$

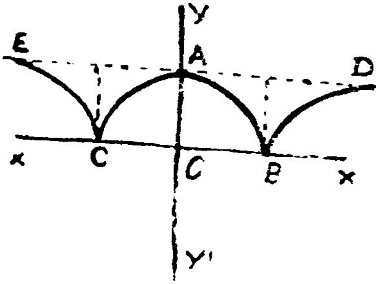
(b) $x = at^2$, $y = 2at$.

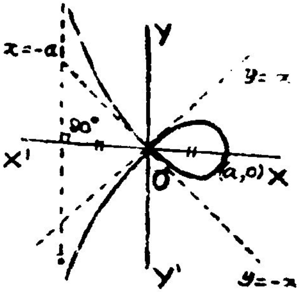




(c) $x = a(\theta + \sin\theta)$ (d) $x = \dfrac{a(1 - t^3)}{1 + t^2}$

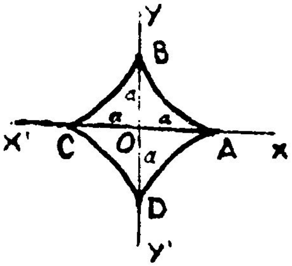
$y = a(1 + \cos\theta)$ $y = \dfrac{at(1 - t^2)}{1 + t}$





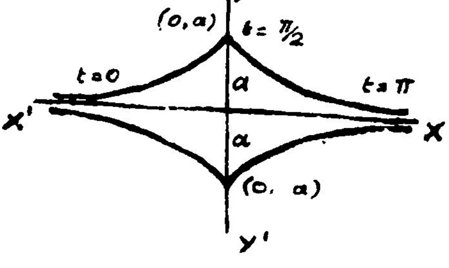
(e) $x = a\cos^3\theta$

$y = a\sin^3\theta$



(f) $x = a\cos t + \frac{1}{2} a \log \tan \dfrac{t^2}{2}$

$y = a \sin t$



§ 15-3. கோணதூர அமைப்பில் சமன்பாடுடைய வளைகோட்டின் சுவடு

இப்பகுதியில் கோணதூர அமைப்பில் சமன்பாடு கொண்டுள்ள வளைகோடுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.

I சமச்சீர் ;

$r = f(\theta)$ என்பது வளைகோட்டின் சமன்பாடு ;

(i) θ-க்குப் பதிலாக $-\theta$ பிரதியிடுவதனால் சமன்பாட்டில் மாற்றமில்லையெனில் வளைகோடு x அச்சைப் பொறுத்து சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(ii) θ-க்கு பதிலாக $180^\circ - \theta$ பிரதியிடுவதனாலோ அல்லது θ-க்கு பதிலாக $-\theta$-ம் r-க்கு பதிலாக $-r$-ம் பிரதியிடுவதனாலோ சமன்பாட்டில் மாற்றம் இல்லையெனில் வளைகோடு $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் உடையது.

(iii) θ-க்கு $90^\circ - \theta$ பிரதியிடுவதனால் சமன்பாட்டில் மாற்றம் இல்லையெனில் $\theta = \frac{\pi}{4}$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(iv) θ-க்கு பதிலாக $270^\circ - \theta$ பிரதியிடுவதனால் சமன் பாட்டில் மாற்றம் இல்லையெனில் $\theta = \frac{3\pi}{4}$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்துச் சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

(v) r-க்கு பதிலாக $-r$ பிரதியிடுவதானால் சமன்பாட்டில் மாற்றம் இல்லையெனில் துருவ ஆதியைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் பெற்றுள்ளது.

II கோண ஆதி :

(i) வளைகோட்டில் கோண ஆதி அமைகிறதா இல்லையா எனக் கண்டுபிடிக்கவும். θ-ன் மெய் மதிப்பு ஒன்றுக்கு $r = 0$ எனில் கோண ஆதி வளைகோட்டில் அமைகிறது.

(ii) ஆதியில் தொடுகோடு அல்லது தொடுகோடுகளைக்காண $r = 0$ எனப் பிரதியிட்டு, அதற்கிணைந்த θ மதிப்புகளைக் காண்க.

(iii) வளைகோடானது துவக்கக்கோடு, (Initial line), $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற கோடு ஆகியவற்றை வெட்டும் புள்ளிகளைக் காண்க.

III ϕ காணல்

Tanϕ கண்டுபிடித்து, அதிலிருந்து ϕ காணவும். ϕ, 0 அல்லது முடிவிலி மதிப்புப் பெறும் புள்ளிகளைக் காண்க.

IV அணுகுகோடுகள் :

(i) $\theta \longrightarrow 0$ எனில் $r \longrightarrow \infty$ ஆனால் அணுகுகோடு உள்ளது. இதனை வழக்கமான முறைப்படி காண்க.

(ii) $\theta \longrightarrow \infty$ எனில் $r \longrightarrow a$ ஆனால் $r = a$ என்ற வட்ட அணுகுகோடு உண்டு.

V வளைகோட்டின் எல்லைகள் :

(i) r அல்லது θ-க்கு தீர்வு காண்க.

சில θ மதிப்புகளுக்கு r^2 குறையானால் r கற்பனை எண்ணாக இருக்கும். அதாவது λ, β-களுக்கு இடையில் அமையும் θ மதிப்புகளுக்கு r^2 குறையானால் $\theta = \lambda$, $\theta = \beta$ என்பனவற்றிற்கிடையே வளைகோட்டின் பகுதி இல்லை.

(ii) r-ன் உச்ச எண் மதிப்பு a ஆனால் வளைகோடு $r = a$ என்ற வட்டத்திற்கு முற்றிலும் உள்ளடங்கி இருக்கும். r-ன் மிகக் குறைந்த எண் மதிப்பு b எனில் $r = b$ என்ற வட்டத்திற்கு வெளிப் புறத்தில் வளைகோடு அமைந்திருக்கும்.

(iii) $(0, \infty)$, $(0, -\infty)$ என்ற இடைவெளிகளில் θ, மாற்றம் பெற r-ன் மாற்றங்களைக் கண்டு பிடிக்கவும். குறிப்பாக $r = 0$, மற்றும் பெரும, சிறும மதிப்புகள் இவற்றிற்கியைந்த θ மதிப்புகளைக் கண்டு இப்புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

VI பிற குறிப்புகள் :

(i) வளைவு மாற்றப்புள்ளிகள் ஏதும் இருப்பின் அவற்றைக் காண்க.

(ii) சில வசதியான மதிப்புகளுக்கேற்ற புள்ளிகளைக் கண்டு பிடித்து வைத்துக் கொள்வது வளைகோடு வரைதலை எளிதாக்கும்.

(iii) கார்ட்டிசீயன் அமைப்பில், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை மாற்றியமைப்பது வளைகோடு வரைதலை எளிதாக்குமா என்பதை ஆராய்க.

§ 15-4. கோண தூர அமைப்பில் வளைகோடுகள் சில

கோணதூர அமைப்பில் சமன்பாடுகள் கொண்ட சில முக்கியமான வளைகோடுகளை இப்பகுதியில் அறிமுகப்படுத்துவோம்.

(i) $r^n = a^n \cos n\theta$ வகை

முக்கியமான வளைகோடுகள் பல இக்குடும்பத்தைச் சேர்ந்தன. எடுத்துக்காட்டாக

(a) $n = 1$ எனில்

$r = a \cos \theta$; இது வட்டம்

(b) $n = -1$ எனில்

$r \cos \theta = a$; இது நேர்கோடு.

(c) $n = 2$ எனில்

$r^2 = a^2 \cos^2 \theta$; இதற்குப் பெயர்

பெர்னோலியின் லெம்னிஸ்கேட் (Lemniscate of Bernoulli) அல்லது ஞாணி.

(d) $n = -2$ எனில்

$r^2 \cos 2\theta = a^2$; இது செவ்வக அதிபரவளைவு

(e) $n = \frac{1}{2}$ எனில்

$r^{1/2} = a^{1/2} \cos \frac{\theta}{2}$ அல்லது

$r = \frac{a}{2}(1 + \cos \theta)$; இதற்குப் பெயர் நெஞ்சுவளை (cardioid)

(d) $n = -\frac{1}{2}$ எனில்

$r^{-1/2} = a^{-1/2} \cos \frac{\theta}{2}$ அல்லது

$\frac{2a}{r} = 1 + \cos \theta$; இது பரவளைவு

இக்குடும்பத்தைச் சேர்ந்த வளைகோடுகளில் சிலவற்றை எடுத்துக்காட்டுகளில் விரிவாக ஆராய்ந்துள்ளோம்.

(ii) $r = a \sin n\theta$ என்ற வகை

இந்த வகையில் சேர்ந்த வளைகோடுகளின் வரைவடிவம் ரோஜாப் பூவின் இதழ்களைபோன்று அமைந்திருக்கும் இவற்றை ரோஜா இதழ்கள் (Rose petals) என்போம். n என்பது ஒற்றைப் படை எண்ணாக இருக்கும்போது $r = a \sin n\theta$-ன் வரை படத்தில் n இதழ்களும், n இரட்டைப்படை எண்ணாக இருக்கும்போது $2n$ இதழ்களும் இருக்கும். இக்குடும்பத்தைச் சேர்ந்த $r = a \sin 3\theta$-ன் வரைபடத்தை எடுத்துக்காட்டாக பின்னர் தந்துள்ளோம்.

(iii) சுருளிகள் (Spirals) :

(a) $r = a e^{\theta \cot \alpha}$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய சம கோணச் சுருளி (Equiangular spiral) [அல்லது லாகிருதச் சுருளி (Logarithmic spiral)].

இந்த அமைப்பில் உள்ள வளைகோட்டுக்கு ஒரு சிறப்புப் பண்பு உண்டு; ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் தொடுகோட்டுக்கும் ஆரை வெக்டருக்கும் இடையே உள்ள கோணமான ϕ ஆனது α என்ற மாறிலியாக இருக்கும்.

ஆதி வளைகோட்டில் இல்லை.

θ-ன் மதிப்பு $-\infty$-க்கும், ∞-க்கும் இடையே.

$r = a e^{m\theta}$ என்ற அமைப்பில் சமன்பாடு கொண்ட இத் தகைய வளைகோட்டை எடுத்துக்காட்டாக தந்துள்ளோம்.

(b) $r = a\theta$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய ஆர்க்கிமிடிஸ் சுருளி (spiral of Archimedes)

ஒரு நேர்கோடு, அதன் நிலைப்புள்ளி ஒன்றைப் பொருத்து மாறாத கோணத்திசை வேகத்துடன் சுழல, நேர்கோட்டின் மீது மாறாத திசை வேகத்துடன் செல்லும் புள்ளியின் இயங்கு வரை யென இந்த வளைகோட்டை வருணிக்கலாம்; $r = ut$, $\theta = nt$ என்றால், $a = u/n$ என $r = a\theta$.

(c) $r = a/\theta$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய தலைகீழ் சுருளி (reciprocal spiral).

துவக்கக் கோட்டின் மீது வரைந்த குத்துயரத்தை y எனக் கொண்டு

$$y = r\sin\theta = r\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\theta = \frac{a\sin\theta}{\theta}.$$

$\theta \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$; ஆனால் y ஆனது a என்ற முடிவில்லாத மதிப்பை அடையும். $\therefore$ $y = a$ என்பது அணுகு கோடாக இருக்குமாறு வளைகோடு அமையும்.

(iv) இலிமோசான் (Limacon) மற்றும் நெஞ்சுவளை (Cardioid) :

$a/2$ ஆரையாக உடைய வட்டத்தின் பரிதியில் 0 என்ற நிலைப் புள்ளியை துருவ ஆதியாக எடுத்துக்கொள்க; 0 வழிச்செல்லும் விட்டத்தை துவக்கக் கோடாக கருதுக. Q என்பது வட்டத்தில் யாதானும் ஒரு புள்ளியாயின் அதன் ஆரை வெக்டர் $r = a\cos\theta$

இந்த ஆரை வெக்டரில் a-லிருந்து c தொலைவில் இருபுறமும் P P' எனும் புள்ளிகளை குறிக்கவும். இப் புள்ளிகளின் இயங்கு வரையே இலிமோசான். அதன் சமன்பாடு $r = a\cos\theta + c$

$c = \pm a$ ஆக இருக்கும்போது இயங்குவரை $r = a(1+\cos\theta)$ அல்லது $r = a(1-\cos\theta)$ என்ற சமன்பாட்டுடன் நெஞ்சுவளை என்ற பெயருடன் விளங்கும்.

$r = a(1-\cos\theta)$-ன் வரைபடம் எடுத்துக்காட்டாகப் பின்னர் தரப்பட்டுள்ளது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 12 :

$r = a\sin 3\theta$ என்ற சமன்பாடுடைய வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

I சமச்சீர் :

r-ஐ $-r$ ஆலும், θ-ஐ $-\theta$ ஆலும் பிரதியிட வளைகோட்டின் சமன்பாட்டில் மாற்றம் இல்லை.

$\therefore$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

(i) $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \ldots$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு $r = 0$.

(ii) கோண ஆதியில் தொடுகோடுகள் $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{3}$,

$\theta = \frac{2\pi}{3}$ பிற θ மதிப்புகளும் இத்தொடுகளையே மீண்டும் தரும்.

III பெருமம்

$$\frac{dr}{d\theta} = 3a \cos 3\theta$$

$\frac{dr}{d\theta}$-ஐ பூச்சியத்துக்கு சமப்படுத்தினல்

$$\cos 3\theta = 0 \text{ அல்லது } 3\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$$

மேலும் $\frac{d^2r}{d\theta^2} = -9a \sin 3\theta$

$\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}$ முதலிய மதிப்புகளுக்கு

$\frac{d^2r}{d\theta^2}$ குறை. $\therefore$ θ-ன் இம் மதிப்புகளுக்கு

r பெருமம்; பெரும மதிப்பானது $= a \sin 3\left(\frac{\pi}{6}\right) = a.$

IV மதிப்பு பட்டியல்

வளைகோட்டை வரைவதற்கு பின்வரும் (r, θ) பட்டியல் மதிப்புகள் உதவும். இம்மதிப்புகளை வரைபடத்தாளில்

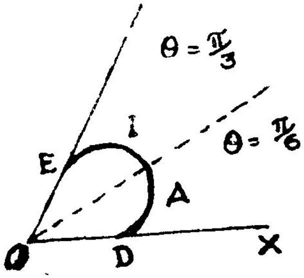
$\theta = 0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$r = 0$	a	0	$-a$	0	a	0	$-a$	0	a	0	$-a$	0

குறிக்கவும்.

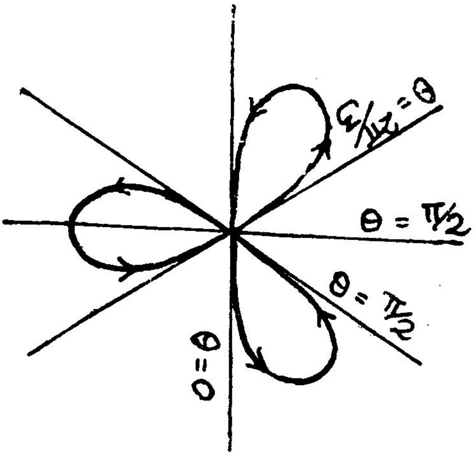
V எல்லைகள் :

θ ஆனது 0-லிருந்து $\pi/6$-க்கு அதிகரிக்க r மிகையாக இருக்கிறது; 0-லிருந்து a-க்கு அதிகரிக்கிறது. தொடர்ந்து θ ஆனது $\pi/6$ லிருந்து $\pi/3$-க்கு அதிகரிக்க r தொடர்ந்து மிகையாக இருக்

கிறது; ஆனால் மதிப்பு a-லிருந்து 0-க்கு குறைந்து விடுகிறது. இதனால் வளைகோட்டுடைய ஒரு பகுதியாக தடம் (loop) ஒன்று படத்தில் கண்டவாறு கிடைக்கிறது. இதனைத் தொடர்ந்து இன்னும் இரண்டு தடங்களை மதிப்புகள் மூலம் வரைய பின் வரும் மூன்று இலைகள் கொண்ட பூ (three leaved rose) போன்ற வடிவம் கிடைக்கிறது.



படம் 15·2



படம் 15·13

குறிப்பு : $r = a \sin 4\theta$-ன் வரைபடம் வரைந்தால் 8 இலைகள் கொண்ட பூவடிவம் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 13 :

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற (பெர்னௌலியின் லெம்னிஸ்கேட்) வளைகோட்டின் சுவட்டினைக் காண்க.

தீர்வு :

வளைகோட்டின் சமன்பாடு

$r^2 = a^2 \cos 2\theta$ எனத்தரப்பட்டுள்ளது.

I சமச்சீர் :

θ-க்கு $-\theta$ பிரதியிட்டாலும் θ-க்கு $\pi - \theta$ பிரதியிட்டாலும் சமன்பாட்டில் மாற்றமில்லை. எனவே வளைகோடு துவக்கக் கோட்டைப் பொறுத்தும், $\theta = \pi/2$ என்ற கோட்டைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் உடையது. r-ன் படி இரட்டைப்படை எண்; எனவே ஆதியைப் பொறுத்தும் சமச்சீர் உடையது.

II எல்லை :

$\cos 2\theta$-ன் குறை மதிப்புகள், r-க்கு கற்பனை மதிப்புகளைத் தரும். எனவே $\theta = -\dfrac{\pi}{4}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ மற்றும் $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$,

$\theta = \dfrac{5\pi}{4}$ இடைப் பகுதிகளில் மட்டுமே வளைகோட்டின் மெய்ப் பகுதி அமைந்திருக்கும்.

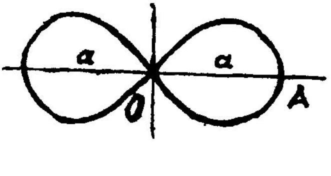
மேலும் $\theta = -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}$

மதிப்புகளுக்கு $r = 0$; $\theta = 0$ எனில் $r = \pm a$.

$\theta = -\pi/4$-லிருந்து $\theta = 0$ வரை r அதிகரிக்கிறது; ஆனால் $\theta = 0$-லிருந்து $\theta = \pi/4$ வரை r குறைகிறது. எப்போதும் r மதிப்பில் a-ஐ மிகுவதில்லை.

θ	0	$30°$	$45°$	$135°$
r	$+a$	$\pm \dfrac{a}{\sqrt{2}}$	0	இல்லை

வளைகோடு பின்வருமாறு இரு தடங்களோடு அமைந்து இருக்கும்.



படம் 15·14

எடுத்துக்காட்டு 14 :

$r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற சமன்பாடு கொண்ட நெஞ்சுவளை (cardioid) வளைகோட்டுக்கு சுவடுகாண்க :

தீர்வு :

$r = a(1 - \cos\theta)$ என சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ளது.

I சமச்சீர் :

θ-க்கு $-\theta$ பிரதியிட சமன்பாடு மாறவில்லை. ∴ துவக்கக் கோட்டைப் பொறுத்து வளைகோடு சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி :

$r = 0$ எனில் $1 - \cos\theta = 0$. எனவே வளைகோடு ஆதி வழி செல்கிறது. $\theta = 0$ என்பது ஆதியில் தொடுகோடு

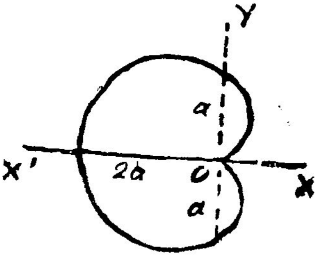
III எல்லை :

r, θ பட்டியல் அமைக்க

θ	0	60°	90°	120°	180°
r	0	$a/2$	a	$3a/2$	$2a$

0-லிருந்து π-க்கு θ அதிகரிக்க r-ம் 0-லிருந்து $2a$-க்கு அதிகரிக்கிறது.

வரைபடம் பின்வருமாறு அமைகிறது.



படம் 15·15

எடுத்துக்காட்டு 15 :

$r = a(\cos\theta + \sec\theta)$ என்ற சமன்பாடு கொண்ட வளைகோட்டின் சுவடு காண்க.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டை இருபுறமும் r-ஆல் பெருக்க

$$r^2 = a(r\cos\theta + r\sec\theta)$$

$$= a\left(r\cos\theta + \frac{r^2}{r\cos\theta}\right)$$

இதனைக் கார்ட்டீசியின் அமைப்பில் மாற்றியபின் சுவடுகாண்பது எளிதாதலால் முதலில் கார்ட்டீசியன் அமைப்பில் சமன்பாட்டை எழுதிக் கொள்வோம்.

$$x^2 + y^2 = a\left(x + \frac{x^2 + y^2}{x}\right)$$

அல்லது $$y^2 = x^2\,\frac{(2a - x)}{x - a}$$

I சமச்சீர்

துவக்கக் கோட்டைப் பொறுத்து (X அச்சு) சமச்சீர் உடையது.

II ஆதி

வளைகோடு ஆதி வழிச் செல்கிறது.

ஆதியில் தொடுகோடாவன : $-ay^2 - 2a\,x^2 = 0$

அல்லது $y^2 + 2x^2 = 0$. இவை கற்பனை. எனவே ஆதி தனிப் புள்ளி.

III வெட்டுத்துண்டங்கள்

$y = 0$ எனப் பிரதியிட $x = 0$, $x = 2a$

∴ வளைகோடு x அச்சை $(0, 0)$, $(2a, 0)$ எனும் இரு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. ஆதியை $(2a, 0)$-க்கு மாற்ற சமன்பாடு

$$y^2 = \frac{(x + 2a)^2\,(2a - x - 2a)}{x + 2a - a}$$

அது $$y^2 = \frac{-x\,(x + 2a)^2}{x + a}$$

∴ புதிய ஆதியில் தொடுகோடு $x = 0$ அது புதிய y அச்சு எனவே $(2a, 0)$-ல் தொடுகோடு y அச்சுக்கு இணை.

IV அணுகு கோடு :

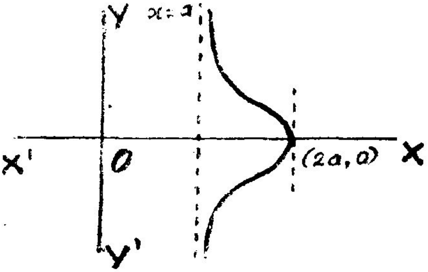
$x - a = 0$ அல்லது $x = a$ என்பது அணுகுகோடு.

V எல்லை

$x > 2a$ எனில் y^2 குறை ; y கற்பனை. எனவே $x > 2a$ எனும் மதிப்புகளுக்கு வளைகோடு உளதாகாது. இவ்வாறே $x < a$ (மிகை அல்லது குறை) மதிப்புகளுக்கும் வளைகோடு உளதாகாது.

x ஆனது a-லிருந்து $2a$-க்கு அதிகரிக்க
y ஆனது ∞-லிருந்து 0-க்கு குறைகிறது.

வளைகோட்டின் வரைவடிவம் பின்வருமாறு :



படம் 15·1

எடுத்துக்காட்டு 16 :

$r = ae^{m\theta}$ என வளைகோட்டின் சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு :

$r = ae^{m\theta}$ என வளைகோட்டின் சமன்பாடு தரப்பட்டுள்ளது.

I சமச்சீர்

வளைகோட்டுக்கு துவக்கக்கோட்டைப் பொறுத்து சமச்சீர் இல்லை.

II எல்லை

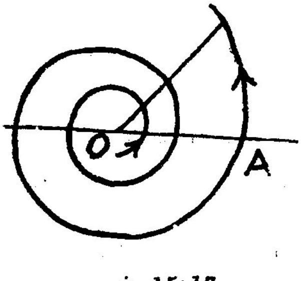
$\theta \longrightarrow \infty$ எனில் $r \longrightarrow \infty$

r எப்போதுமே மிகை

III புள்ளிகள்

θ	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
r	a	$ae^{m\pi/2}$	$ae^{m\pi}$	$ae^{3m\pi/2}$	$ae^{2m\pi}$

வளைகோடு பின்வரும் வடிவம் பெற்றிருக்கும்.



படம் 15·17

§ 15·5 முக்கிய வளைகோடுகள் சில :

(i) டேகார்டின் இலையம் (Folium of Descartes) என்ற பெயரையும் $x^3 + y^3 = 3axy$ என்ற சமன்பாட்டையும் உடைய வளைகோட்டை எடுத்துக்காட்டு 10 ஆகத் தரப்பட்டுள்ளது. இது ஒரு முக்கிய வளைகோடு

இதனைக் கோண தூர அமைப்பில்

$$r = \frac{3a \sin\theta \cos\theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$$

என எழுதிக்கொண்டும் சுவட்டினைக் காண முயலலாம்.

(ii) $x = a(\theta + \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய [நேர்மாறு உருள்வளை (inverted cycloid) வளைகோட்டை எடுத்துக்காட்டு 11 ஆகத் தந்துள்ளோம். இதன் சுவட்டினைக் கண்டது போலவே

$x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய உருள்வளை (cycloid) ஒரு முக்கியமான வளைகோடாகும். ஒரு தளத்தில் நேர்கோடு வழியே உருண்டு செல்லும் வட்டத்தின் பரிதியில் அமைந்த புள்ளியொன்றின் நியமப்பாதையே உருள்வளை என வருணிக்கலாம்.

(iii) $x = a\cos^3\theta$, $y = a\sin^3\theta$ என்ற துணையலகு அமைப்பில் சமன்பாடு கொண்டு விளங்கும் வளைகோட்டுக்கு உடுவளை (Astroid) என்றும் நான்கு கூர் அக உருள்வளை (Four cusped hopocycloid) என்றும் பெயர்.

θ-ஐ நீக்கம் செய்ய

$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ எனக் கார்ட்டீசியன் அமைப்பில் சமன்பாடு கிடைக்கிறது. இரு அச்சுக்களாலும் வெட்டுப்படும் இதன் தொடுகோட்டுத் துண்டங்கள் மாறிலி என்பது இதன் தனிச் சிறப்பாகும் (பயிற்சி 15 (B) 1 (e) பார்க்கவும்).

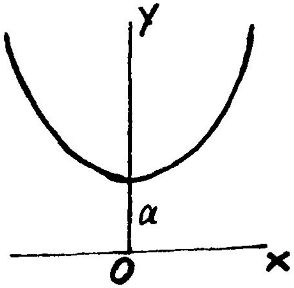
(iv) $y = a\cosh\dfrac{x}{a}$ என்ற சமன்பாட்டை உடைய சங்கிலியம் (catenary) ஒரு முக்கியமான வளைகோடு.

ஒரு சீரான சங்கிலியின் இரு முனைகளையும் நிலையாக வைத்து சங்கிலியைத் தொங்கவிட்டால் கிடைக்கும் அமைப்பு இவ்வளைகோடு ஆகும். a என்பது மாறிலியாக, $s = a\tan\chi$ என்றவாறு (s, χ) அமைப்பிலும்

$$x = a \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2}\right)$$

$$y = a \sec \chi$$

என துணையலகு அமைப்பிலும் சங்கிலியத்தின் சமன்பாடு இருக்கும்.



படம் 13·18

பயிற்சிகள் 15 (C)

சுவட்டினைக் காண்க :

1. (a) $r = a(1 + \cos\theta)$
   (b) $r = a(1 + \sin\theta)$
   (c) $r = a(1 - \sin\theta)$
   (d) $r = a + b\cos\theta$; இங்கே $a > b$.
   (e) $r = a + b\cos\theta$; இங்கே $a < b$.

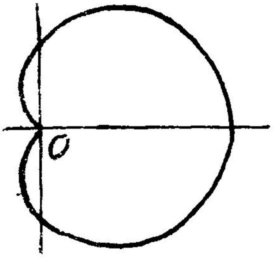
2. (a) $r = a\sin 2\theta$
   (b) $r = a\cos 3\theta$
   (c) $r = a\sin 4\theta$

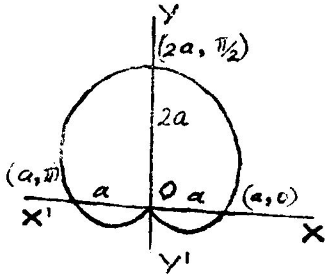
3. (a) $r = a(2\cos\theta + \cos 3\theta)$
   (b) $r\sin 4\theta = a$
   (c) $r = a\operatorname{cosec}\theta \pm b$

4. (a) $r\theta = a$
   (b) $r = a\theta$
   (c) $r^2\theta = a^2$
   (d) $r = \dfrac{\theta}{1 + \theta}$

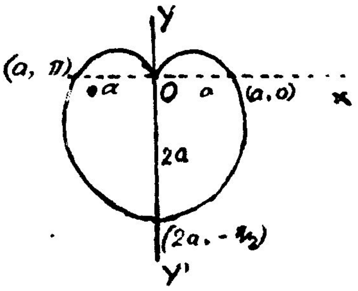
விடைகள் 15 (C)

1. (a) $r = a(1 + \cos\theta)$ (b) $r = a(1 + \sin\theta)$

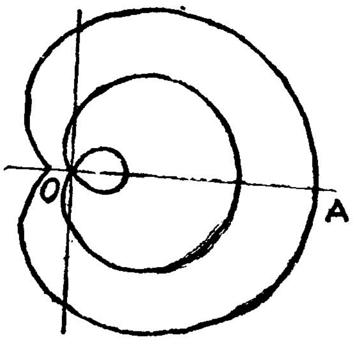


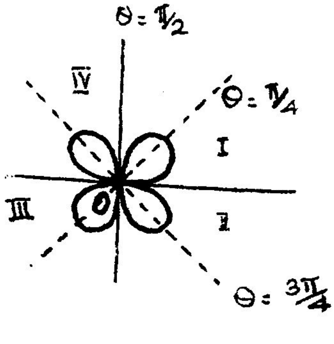


(c) $r = a(1 - \sin\theta)$

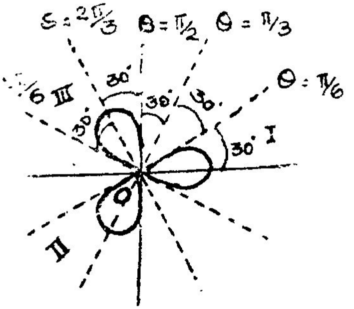


(d), (e) $r = a + l - \cos\theta;\ a \gtrless b$ 2. (a) $r = a \sin 2\theta$

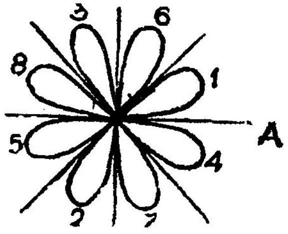




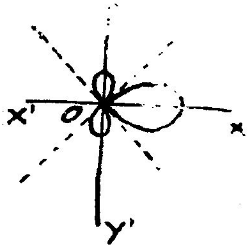
2. (b) $r = a \cos 3\theta$



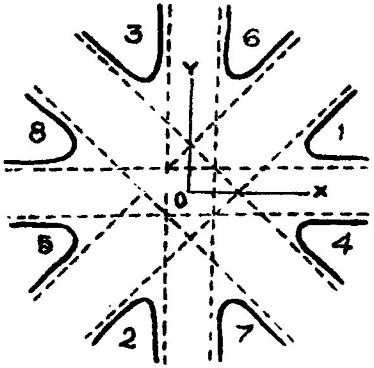
(c) $r = a \sin 4\theta$



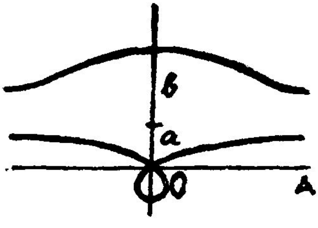
3. (a) $r = a\,(2 \cos \theta + \cos 3\theta)$



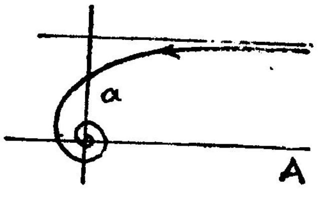
(b) $a = r \sin 4\theta$



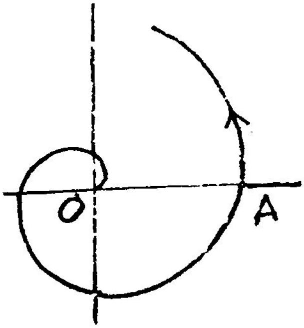
(c) $r = a \operatorname{cosec} \theta \pm b$



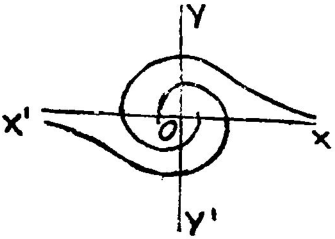
4. (a) $r\theta = a$



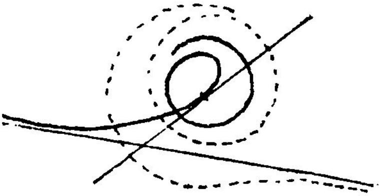
4. (b) $r = a\theta$



(c) $r^2\theta = a^2$



(d) $r = \dfrac{\theta}{1+\theta}$



மேற்கோள் நூல் பட்டியல்

1. Edwards — "Differential Calculus"

2. Ferrar — "Calculus"

3. Garack Prasad — "Differential Calculus"

4. Granville et al — "Elements of Differential and Integral Calculus"

5. Lang — "A First Course in Calculus"

6. Maxwell — "Analytical Calculus"

7. *மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை* — "*வகைநுண் கணிதம்*"

8. Shanthi Narayan — "Differential Calculus"

கலைச்சொற்கள்

ஆங்கிலம்—தமிழ்

A

Absolute value — மட்டு மதிப்பு
Acceleration — முடுக்கம்
Algebraic functions — இயற்கணிதச் சார்பலன்கள்
Angle of intersection (of two curves) — வெட்டும் கோணம் (இரு வளைகோடுகள்)
Approximate calculation — தோராயக் கணிப்புகள்
Arc — வில்
Astroid — உடுவளை
Asymptotes — அணுகுகோடுகள்

C

Cardiod — நெஞ்சுவளை
Catenary — சங்கிலியம்
Closed interval — அடைத்த இடைவெளி
Codomain — இணைசரங்கம்
Composite functions — கலவைச் சார்பலன்கள்
Concavity — குழிவு
Conjugate point — தனிப்புள்ளி, துணையிய புள்ளி
Constant — மாறிலி
Continuous functions — தொடர்ச்சியுள்ள சார்பலன்கள்
Convexity — குவிவு
Curvature — வளைவு
- **-centre of** — வளைவு மையம்
- **-chord of** — வளைவு நாண்
- **-circle of** — வளைவு வட்டம்
- **-Radius of** — வளைவாரை

Curve tracing — வளைகோடுகளின் சுவடுகளைக் காணல்
Cusps — கூர்ப்புள்ளி
Cycloid — உருள்வளை

D

Decreasing function — குறையும் சார்பு
Dependent variable — சார்ந்த மாறி
Derivative — வகைக்கெழு
Differential — வகையீடு
Differential coefficient — வகையீட்டுக் கெழு, வகைக் கெழு
Differentiation — வகையிடல்
Discontinuity — தொடர்ச்சியின்மை
Domain — சுரங்கம்
Double points — இரட்டைப் புள்ளி

E

Errors — பிழைகள்
Envelope — சூழி
Equations — சமன்பாடுகள்
-implicit — -உட்படு
-intrinsic — -உள்ளீட்டு
-parametric — -துணையலகு
-pedal — -பாத
-polar — -கோண தூர, துருவ
Equiangular spiral — சமகோணச் சுருளி
Even function — இரட்டைச் சார்பலன்
Evolute — வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி
Expansions — விரித்தல்
Exponential function — அடுக்குச் சார்பு
Extreme values — முனையுறுப்பு மதிப்புகள்

F

Folium of descartes — டேகார்ட்டின் இலையம்
Functions — சார்பலன்கள்
-Algebriaic — -இயற்கணித
-composite — -கலவை
-continuous — -தொடர்ச்சியான
-Exponential — -அடுக்கு
-Homogeneous — -ஒரு படித்தான
-Hyperbolic — -அதிபர வளைவு
-Implicit — -உட்படு
-Inverse — -நேர்மாறு

-Logarithmic	—	-மடக்கை
-monotonic	—	-ஒரே முறை
-of a function	—	-சார்பலனின்
-Trigonometric	—	-கோணகணித

G

Graph	—	வரைபடம்

H

Homogeneous function	—	ஒருபடித்தான சார்பலன்
Hyperbolic function	—	அதிபர வளைவுச் சார்பலன்
Hypocycloid	—	அக உருள்வளை

I

Implicit function	—	உட்படு சார்பு
Increasing function	—	வளரும் சார்பு
Increment	—	கூடுந்தொகை
Indeterminate forms	—	தேரப்பெறுத அமைப்புகள்
Independent variable	—	சாரா மாறி
Infinite limit	—	முடிவிலா எல்லைகள்
Infinite series	—	முடிவிலா தொடர்கள்
Inflexion	—	வளைவு மாற்றம்
Interval	—	இடைவெளி
-closed	—	-அடைத்த
-open	—	-திறந்த
Intrinsic equation	—	உள்ளீட்டுச் சமன்பாடு
Inverse function	—	நேர்மாறு சார்பலன்
Involute	—	வரைச் செங்கோட்டுத் தழுவி
Isolated point	—	தனிப்புள்ளி

L

Lemniscate	—	லெம்னிஸ்கேட், ஞாணி
Limits	—	எல்லைகள்
-Right handed	—	-வலப்புற
-Left handed	—	-இடப்புற

M

Maximum value	—	பெரும மதிப்பு
(Minimum) value	—	(சிறும) மதிப்பு

Mean value theorem — இடை மதிப்பு தேற்றம்
Monotonic function — ஓரியல்பு (ஒரேமுறை) சார்பு
-Strictly -திட்டமாய்

N

Node — கணு
Normal — (செங்குத்து), வரைச் செங்கோடு
Numbers — எண்கள்
-Irrational — -விகிதமுரு
-Rational — -விகிதமுறு
-Real — -மெய்

O

Odd funtion — ஒற்றைச் சார்பு
Open Interval — திறந்த இடைவெளி

P

Parametric equations — துணையலகுச் சமன்பாடுகள்
Partial differentiations — பகுதி வகையிடல்
Pedal equations — பாதச் சமன்பாடு
Percentage error — சதவீதப் பிழை
Points — புள்ளிகள்
-Conjugate — -துணையிய
-Cusp — -கூர்
-Double — -இரட்டை
-Node — -கணு
-Multiple — -மடங்கு
-of Inflection — -வளைவு மாற்ற
-Singular — -சிறப்பு
-Stationary — —கணநிலை
Polar coordinates — கோணதூரக் கூறுகள்

R

Radius of curvature — வளைவாரை
Radius vector — ஆரைவெக்டர்
Range — வீச்சு
Remainder — மீதி

S

Second order derivative — இரண்டாம் (வரிசை) வகைக் கெழு

Series — தொடர்கள்
- -Binomial — -ஈருறுப்பு
- -Taylor's — -டெய்லர்
- -Maclaurin — -மெக்லாரின்

Sign of derivative — வகைக்கெழுவின் குறி
Singular points — சிறப்புப் புள்ளிகள்
Spiral — சுருளி
Stationary values — கணநிலை மதிப்புகள்
Subtangent — தொடுகோட்டடி
Subnormal — வரைச் செங்கோட்டடி
Successive differentiation — தொடர் வகையிடல்

T

Tangent — தொடுகோடு
Trigonometric functions — கோண கணிதச் சார்பலன்கள்
Total differential — மொத்த வகையீடு

V

Variables — மாறிகள்
Velocity — திசைவேகம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

★

பின்வரும் பொருள்களில்

பட்டப்படிப்பிற்குரிய நூல்கள்

விரைவில் வெளிவரும்

கணிதம்	—	41	நூல்கள்
இயற்பியல்	—	28	,,
வேதியியல்	—	39	,,
தாவரவியல்	—	30	,,
விலங்கியல்	—	40	,,
பொறியியல்	—	50	,,
வரலாறு	—	45	,,
அரசியல்	—	34	,,
பொருளாதாரம்	—	83	,,
வணிகவியல்	—	36	,,
புள்ளியியல்	—	16	,,
உளவியல்	—	8	,,
புவியியல்	—	13	,,